

OTTO MOHR

TECHNISCHE MECHANIK

ZWEITE AUFLAGE

Berlin

Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn

ABHANDLUNGEN

AUS DEM

GEBIETE DER TECHNISCHEN MECHANIK

VON

Dr.-Ing. OTTO MOHR

GEHEIMER RAT UND PROFESSOR.

ZWEITE

NEUBEARBEITETE UND ERWEITERTE AUFLAGE.

MIT 491 TEXTABBILDUNGEN.

BERLIN 1914

VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN

Alle Rechte, insbesondere das der Uebersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Vorwort zur ersten Auflage.

Das vorliegende Buch enthält in neuer Bearbeitung eine größere Anzahl von Aufsätzen aus dem Gebiete der angewandten Mechanik, die während einer langen Reihe von Jahren entstanden sind und in verschiedenen, zum Teil wenig verbreiteten Zeitschriften veröffentlicht wurden. Der Inhalt jener Aufsätze, der zum großen Teil bereits in die neueren Lehrbücher der technischen Mechanik und der Baumechanik übergegangen ist, wurde nicht wesentlich abgeändert und erweitert. Aber die Neuordnung und die Zusammenfassung zu zwölf gesonderten Abhandlungen gestattete es, das Zusammengehörige zu vereinigen, Wiederholungen zu vermeiden und auch die Darstellung zu vereinfachen.

Die zwölf Abhandlungen stehen vielfach miteinander in Zusammenhang; sie wurden daher so geordnet, daß überall nur auf Vorhergegangenes zu verweisen war.

Die zum Verständnis erforderlichen Vorkenntnisse sind sehr gering. Sie umfassen außer den Hauptsätzen der Elementarmechanik nur die niedere Mathematik und die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung. Die jungen Ingenieure des Bau- und Maschinenfaches werden also das Buch schon während ihres Studiums benutzen können.

Alle Abbildungen sind in den Text eingefügt worden, weil dadurch die Bequemlichkeit des Lesens wesentlich erhöht wird. Diese Rücksicht war auch maßgebend bei Auswahl der zur Erläuterung dienenden Beispiele. Die in den Originalaufsätzen vorkommenden Beispiele, welche zu ihrer Darstellung Zeichnungen von größeren Abmessungen erfordern, wurden daher durch andere ersetzt. Es

ist übrigens in Aussicht genommen, eine Sammlung von größeren, aus der Praxis zu entnehmenden Aufgaben und Beispielen für eine besondere Veröffentlichung zu bearbeiten.

Jeder Abhandlung wurden kurze literarische Notizen angefügt, die auf Vollständigkeit keinen Anspruch erheben können; es wurde jedoch überall angegeben, wo vollständigere Literaturnachweise zu finden sind.

Dresden, im Oktober 1905.

MOHR.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die im Vorwort zur ersten Auflage ausgesprochene Absicht, eine Sammlung von größeren, aus der Praxis zu entnehmenden Aufgaben und Beispielen zu bearbeiten, habe ich nicht zur Ausführung bringen können, weil der Zustand meiner Augen die Arbeit am Zeichentische mir leider verbot. Dagegen enthält die neue Auflage eine Reihe von Zusätzen und Erweiterungen, von denen die wichtigsten hier kurz erwähnt werden mögen.

Die Abhandlung II über die Grundzüge der graphischen Statik gibt in den Abschnitten 16 bis 20 *Regeln für die Zusammensetzung räumlicher Kräftegruppen*, durch welche die bisher bekannten Verfahren wesentlich vereinfacht werden.

Die Abhandlung V, in der ich eine neue *Hypothese über die Grundlagen der Festigkeitslehre* dargelegt hatte, wurde in den Besprechungen des Buches mehrfach als ein dunkler Punkt bezeichnet, der einer weiteren Klärung durch Festigkeitsversuche bedürfe, und es ist nicht zu leugnen, daß die Erfahrungstatsachen, die mir damals zu Gebote standen, nicht nach allen Richtungen hin genügten. Um so größer ist meine Befriedigung darüber, daß die Arbeiten deutscher, englischer und amerikanischer Ingenieure in dem letzten Jahrzehnt diese Lücke ausgefüllt und eine Bestätigung meiner Annahmen gebracht haben, wie ich sie kaum zu hoffen wagte. Man findet in dem Abschnitt 11 der Abhandlung hierüber die näheren Angaben.

Mit einem anderen dunklen Punkt der Baumechanik beschäftigt sich die Abhandlung VI über *die Lehre vom Erddruck*. Meine Meinung, daß die Annahmen von *Rankine* denen von *Coulomb* vorzuziehen seien, hat mehrfach Widerspruch gefunden. Ich habe hieraus Veranlassung genommen, meine Ansicht näher zu begründen und zu zeigen, erstens, daß die Theorie von *Coulomb* unhaltbar ist, und zweitens, daß die Entscheidung der streitigen Fragen durch Erddruckversuche nicht erwartet werden darf.

Neu eingefügt in die Sammlung ist die Abhandlung VIII über *den Spannungszustand einer Stauwand*. Bei Besprechung der neuen Stauanlagen im Nil wurden in englischen Zeitschriften Bedenken erhoben gegen die übliche Berechnung der Standsicherheit großer Stauwänden, und es wurde bei dieser Gelegenheit ein abgeändertes Verfahren in Vorschlag gebracht, das zu wesentlich ungünstigeren Ergebnissen führte. Die Abhandlung gibt den Nachweis, daß jene Bedenken unbegründet waren, und daß also kein Grund vorliegt, die bisherigen, auch in Deutschland gebräuchlichen Annahmen zu verlassen.

Die zweite neue Abhandlung XIII entwickelt eine *allgemeine Theorie der ebenen Träger*. Sie stellt sich also die Aufgabe, ein großes Gebiet der Baumechanik von einem einheitlichen Standpunkt aus zu behandeln. Die Bewegung einer Kette aus dehnbaren Gliedern, die um reibungslose Gelenke sich drehen, unterliegt, wenn die Bewegungen sehr klein sind, einfachen Gesetzen, die eine statische Deutung zulassen und dadurch an Anschaulichkeit gewinnen. Auf diese einfachen Gesetze lassen sich alle Untersuchungen zurückführen, die mit den inneren Kräften und mit den Formänderungen der ebenen Träger sich befassen. Ein Blick auf das Inhaltsverzeichnis zeigt die Vielseitigkeit des Verfahrens.

Dresden, im Oktober 1913.

MOHR.



Digitized by the Internet Archive
in 2025

https://archive.org/details/bwb_S0-EMH-165

INHALT.

	Seite
Abhandlung I. Das Gleichgewicht und die unendlich kleinen Bewegungen eines starren Körpers	1— 39
1. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. 2. Achse und Strecke 3. Darstellung der Drehgeschwindigkeit eines starren Körpers, 4. Die Schubgeschwindigkeit einer Achse. 5. Die Geschwindigkeitskugel und die Nullachsen eines Körperpunktes, 6. Das Moment zweier Achsen, 7. Arbeitsgeschwindigkeit und statisches Moment einer Kraft. 8. Die Schubgeschwindigkeiten in den zusammengesetzten Bewegungen und die statischen Momente einer Kräftegruppe. 9. Die Momentenstrecken einer Gruppe von Kräften, die auf einen starren Körper wirken. 10. Gleichwertige Streckengruppen. 11. Die Koordinaten einer Streckengruppe. 12. Die Arbeitsgeschwindigkeit einer Kräftegruppe. 13. Die rechtwinkligen Projektionen gleichwertiger Streckengruppen auf eine Ebene und auf eine Achse. 14. Die Koordinaten einer Strecke und einer Achse. 15. Kräftepaare und Drehungspaare. 16. Nullwertige Streckengruppen oder Gleichgewichtsgruppen. 17. Die möglichen Lagen der Strecken einer nullwertigen Gruppe. 18. Nullwertige Gruppen von <i>zwei</i> Strecken. 19. Nullwertige Gruppen von <i>drei</i> Strecken. 20. Nullwertige Gruppen von <i>vier</i> Strecken. 21. Nullwertige Gruppen von <i>fünf</i> Strecken. 22. Nullwertige Gruppen von <i>sechs</i> Strecken. 23. Nullwertige Gruppen von <i>sieben</i> Strecken. 24. Die Zusammensetzung einer gegebenen Gruppe von Strecken zu einer möglichst einfachen gleichwertigen Gruppe. 25. Erstes Beispiel. 26. Die wichtigsten Eigenschaften der konjugierten Achsen und Strecken einer Gruppe. 27. Zweites Beispiel. 28. Drittes Beispiel. 29. Viertes Beispiel. 30. Eigenschaften der gleichzeitigen Geschwindigkeiten der Punkte eines starren Körpers. 31. Einige Eigenschaften der Schraubenbewegung. 32. Die Bedingungen des Gleichgewichtes eines starren Körpers bei beschränkter Bewegungsfreiheit. 33. Literarische Notizen.	
Abhandlung II. Die Grundzüge der graphischen Statik	40— 82
1 Einleitende Bemerkungen.	
A. Ebene Kräftegruppen	41— 67
2. Zusammensetzung einer gegebenen Kräftegruppe zu ihrer Resultanten. 3. Das Seilpolygon. 4. Ebene Gleichgewichtsgruppen. 5. Aufgabe: Das Seilpolygon einer gegebenen Kräftegruppe durch zwei gegebene Punkte zu legen. 6. Aufgabe: Das Seilpolygon einer gegebenen	

Kräftegruppe durch drei gegebene Punkte zu legen. 7. Die Bestimmung der statischen Momente paralleler Kräfte mittels des Seilpolygons. 8. Bestimmung der Biegemomente mittels des Seilpolygons. 9. Anwendung des Seilpolygons auf die Bestimmung der Wirkungen eines beweglichen Lastenzuges. 10. Die Seilkurven. 11. Die Differentialgleichung der Seilkurve lotrechter Kräfte. 12. Anwendung der Seilkurve zur Bestimmung des Trägheitsmomentes einer ebenen Fläche in bezug auf eine Achse.

B. Kräftegruppen im Raume 67— 82

13. Einleitende Bemerkungen. 14. Kräfte, deren Achsen in einem Punkt sich schneiden. 15. Parallele Kräfte. 16. Eine Kräftegruppe (P) zu ersetzen durch eine in der xy -Ebene liegende Kraft R in Verbindung mit einer zur z -Achse parallel gerichteten Kraft Q . 17. Eine Kräftegruppe (P) zu ersetzen durch eine Kraft K in Verbindung mit einem Kräftepaar U , dessen Ebene normal zu K gestellt ist. 18. Eine Kräftegruppe (P) zu ersetzen durch eine Kraft, die durch einen gegebenen Punkt geht, in Verbindung mit einem Kräftepaar. 19. Eine Kräftegruppe (P) zu ersetzen durch eine Kraft T in Verbindung mit einer Kraft S , deren Achse gegeben ist. 20. Eine Kräftegruppe (P) zu ersetzen durch eine Kraft S , die in einer gegebenen Ebene liegt, in Verbindung mit einer Kraft T , die durch einen gegebenen Punkt geht. 21. Eine Kräftegruppe (P) zu ersetzen durch eine Kraft K in Verbindung mit einem Kräftepaar U , dessen Ebene senkrecht zu K gestellt ist. 22. Eine Kräftegruppe (P) zu ersetzen durch eine Kraft, die durch einen gegebenen Punkt geht, in Verbindung mit einem Kräftepaar. 23. Eine Kräftegruppe (P) zu ersetzen durch ein in einer gegebenen Ebene liegendes Kräftepaar U in Verbindung mit einer Kraft Q . 24. Den Nullpunkt einer gegebenen Ebene in bezug auf eine Kräftegruppe zu bestimmen. 25. Die Nullebene eines gegebenen Punktes in bezug auf eine Kräftegruppe zu bestimmen. 26 und 27. Eine gegebene Kräftegruppe durch zwei Kräfte zu ersetzen. 28. Literarische Notizen.

Abhandlung III. Die Geometrie der Massen 83—109

A. Die Momente ersten Grades einer Gruppe von materiellen Punkten 83— 88

1. Der Schwerpunkt einer Punktgruppe. 2. Der Schwerpunkt der Projektion einer Punktgruppe. 3. Graphische Bestimmung des Schwerpunktes einer Punktgruppe. 4. Zerlegung einer Punktgruppe in Teilgruppen. 5. Gleichwertige Punktgruppen

B. Die Momente zweiten Grades einer ebenen Punktgruppe oder einer ebenen Fläche 88— 98

6. Trägheitsmomente einer ebenen Punktgruppe in bezug auf alle Achsen der Ebene, die einer gegebenen Achse parallel gerichtet sind. 7. Die Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente einer ebenen Fläche in bezug auf alle Achsen der Ebene, die durch den Schwerpunkt gehen. 8. Die Ausführung der graphischen Darstellung. 9. Andere Darstellungen.

C. Die Momente zweiten Grades von räumlichen Punktgruppen oder Körpern	99—109
--	--------

10. Beziehungen zwischen den Zentrifugalmomenten eines Körpers in bezug auf alle Paare von Ebenen, die durch einen Punkt gehen.
 11. Die Momentenkugeln. 12. Die Hauptebenen und die Hauptachsen eines Punktes A . 13. Die Größen der Trägheitsmomente für die Hauptebenen des Punktes A . 14. Die Richtungen der Hauptachsen des Punktes A . 15. Die Beziehungen zwischen den Hauptträgheitsmomenten und den übrigen Momenten zweiten Grades. 16. Graphische Darstellung der Beziehungen. 17. Die Beziehungen zwischen den Hauptachsen des Schwerpunktes und den Hauptachsen eines anderen gegebenen Punktes. 18. Literarische Notizen.

Abhandlung IV. Die Bewegung der ebenen Getriebe 110—191

Erster Teil. Die Geometrie der Bewegung ebener Getriebe 110—174.

1. Der Geschwindigkeitsplan einer ebenen Punktgruppe. 2. Der Geschwindigkeitsplan einer starren Punktgruppe. 3. Der Geschwindigkeitsplan einer ähnlich-veränderlichen Punktgruppe. 4. Der Geschwindigkeitsplan eines Stabpolygons. 5. Der Geschwindigkeitsplan eines Stabpolygons mit Schieberverbindungen. 6. Der Beschleunigungsplan einer Punktgruppe. 7. Der Beschleunigungsplan einer starren Punktgruppe. 8. Der Beschleunigungsplan eines Stabpolygons mit Gelenkverbindungen. 9. Der Beschleunigungsplan eines Stabpolygons mit Schieberverbindungen. Anwendung des Satzes von Coriolis. 10. Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne ebener Getriebe. 11. Beispiele und Aufgaben. 12. Die Krümmung der Bahn eines Punktes und ihrer Evolute. 13. Die Beschleunigungen zweiter Ordnung der ebenen Bewegung einer starren Punktgruppe. 14. Der Plan der Beschleunigungen zweiter Ordnung eines ebenen Getriebes. 15. Die Krümmung der Bahn und der Bahn-evolute eines mit einem Getriebegliede starr verbundenen Punktes. 16. Die geometrische Bewegung einer Ebene. 17. Die Krümmung der Bahnen des Geschwindigkeitsspol. 18. Beispiele zum Abschnitt 17.

Zweiter Teil. Die Kinetik ebener Getriebe 175—191

19. Das Gesetz der Bewegung eines Getriebes. 20. Die Zerlegung der Bewegung des Getriebes. 21. Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte mv'_3 . 22. Die Summe $\sum mv_1^2$ für ein Getriebeglied. 23. Die Resultante der Kräfte mv'_2 für ein Getriebeglied. 24. Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte K und mv'_2 bei reibungsloser Bewegung eines Getriebes. 25. Die Gelenkkräfte bei reibungsloser Bewegung eines Getriebes. 26. Die graphische Bestimmung der Gelenkkräfte bei reibungsloser Bewegung. 27. Die inneren Kräfte eines Getriebegliedes. 28. Die Gelenkreibung und ihr Einfluß auf die Beschleunigung des Getriebes. 29. Beziehungen zwischen der Anzahl der Glieder eines Getriebes, der Anzahl der Gelenke und der Stäbe. 30. Literarische Notizen.

Abhandlung V. Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenzen und den Bruch eines Materials? 192—235

1. Der Spannungszustand eines Körperpunktes. 2. Die Beziehung zwischen den Spannungen zweier Flächen. 3. Die Hauptspannungen eines

Körperpunktes A . 4. Die Bestimmung des Spannungszustandes eines Körperpunktes A durch seine Hauptspannungen. 5. Die Spannungen der in einer Hauptebene liegenden Oberflächenelemente der Kugel A . 6. Die vollständige graphische Darstellung des Spannungszustandes eines Körperpunktes. 7. Die graphische Darstellung der Formänderung eines isotropen Körpers innerhalb der Elastizitätsgrenzen. 8. Die älteren Hypothesen über die Ursachen der Elastizitätsgrenzen und des Bruches. 9. Begründung einer neuen Hypothese für isotrope Stoffe. 10. Vereinfachte Darstellung der Grenzkurven. 11. Prüfung der neuen Hypothese durch die Erfahrung. 12. Literarische Notizen.

Abhandlung VI. Die Lehre vom Erddruck 236—263

1. Einleitende Bemerkungen. 2. Die Annahmen der Theorie von Rankine. 3. Die Hauptachsen eines Punktes des Erdkörpers. 4. Der feste Punkt des Hauptkreises $\alpha\beta$. 5. Die Grenzlinien der Hauptkreise eines Körperpunktes. 6. Die beiden Grenzzustände eines Körperpunktes. 7. Besondere Fälle. 8. Ein Hilfsmittel zur Veranschaulichung der Entstehung der Grenzzustände. 9. Anwendungen. 10. Bestimmung des Erddrucks gegen eine ebene Wandfläche. 11. Die Grenzzustände des Gleichgewichtes in einem unbegrenzten Erdkörper mit Kohäsion. 12. Die Spannungszustände eines Erdkörpers von nicht gleichartiger Beschaffenheit. 13. Der Erddruck gegen eine σ_x -Fläche. 14. Der Erddruck gegen eine ebene Gleitfläche. 15. Der Erddruck gegen eine gekrümmte Gleitfläche. 16. Bedenken gegen die Theorie von Coulomb. 17. Die Bestimmung der Stützmauerstärke. 18. Literarische Notizen.

Abhandlung VII. Die Spannungen im prismatischen Balken . . . 264—283

1. Die Gleichgewichtsbedingungen. 2. Die Bestimmung der Normalspannungen. 3. Graphische Lösung. 4. Besondere Fälle. 5. Eine andere Bestimmung der Normalspannungen. 6. Der Kern der Querschnittsfläche. 7. Druckspannungen im prismatischen Körper ohne Zugfestigkeit. 8. Die Schubspannungen im Balkenquerschnitt. 9. Die graphische Darstellung des Spannungszustandes eines unendlich kleinen Balkenteils. 10. Literarische Notiz.

Abhandlung VIII. Der Spannungszustand einer Stauwand . . . 284—308

1. Einleitende Bemerkungen. 2. Erklärungen und Bezeichnungen. 3. Die Gleichgewichtsbedingungen. 4. Annahmen über die Verteilung der Spannungen. 5. Erste Annahme. 6. Der Rechnungsgang. 7. Beispiel. 8. Zweite Annahme. 9. Zweites Beispiel. 10. Drittes Beispiel. 11. Graphische Darstellung des Spannungszustandes eines Punktes der Mauer. 12. Vergleichung der beiden Annahmen in bezug auf ihre Wahrscheinlichkeit. 13. Literarische Notiz.

Abhandlung IX. Der kontinuierliche Balken 309—341

1. Gegenstand der Untersuchung und ihre Voraussetzungen. 2. Die Differentialgleichung der elastischen Linie. 3. Die Biegemomente und die Schubkräfte der Querschnitte eines kontinuierlichen Balkens. 4. Die Berechnung der Stützenmomente. 5. Der kontinuierliche Balken konstanten

Querschnittes mit zwei Feldern von gleicher Länge. 6. Der kontinuierliche Balken konstanten Querschnittes auf vier zur Balkenmitte symmetrisch liegenden Stützen. 7. Der kontinuierliche Balken konstanten Querschnittes auf vier Stützen, die symmetrisch zur Balkenmitte und in gleicher Höhe liegen. 8. Senkung der Mittelstützen bei bereits ausgeführten Balken mit drei Feldern. 9. Schädliche Folgen einer zufälligen Aenderung der Stützhöhen. 10. Die Berechnung des kontinuierlichen Balkens von veränderlichem Querschnitt. 11. Die Annäherungswerte der Größen S für ein Balkenfeld. 12. Einfluß der Veränderlichkeit des Balkenquerschnittes. 13. Literarische Notizen.

Abhandlung X. Die elastische Linie 342—374

1. Darstellung der elastischen Linie eines geraden Balkens als Seilkurve. 2. Beziehungen zwischen der elastischen Linie und den Biegemomenten und Stützkraften eines Balkens. 3. Graphische Bestimmung der elastischen Linie eines geraden Balkens. 4. Gegenseitige Beziehung zwischen den Senkungen zweier Punkte eines an seinen Enden frei unterstützten Balkens. 5. Bestimmung der elastischen Senkungen eines Balkenpunktes bei verschiedenen Belastungen des Balkens. 6. Die Stützkraften eines kontinuierlichen Balkens. 7. Einflußlinien. 8. Beziehung zwischen drei aufeinanderfolgenden Stützenmomenten eines kontinuierlichen Balkens von konstantem Querschnitt. 9. Die Biegemomente eines kontinuierlichen Balkens von konstantem Querschnitt in dem Fall, wenn nur *ein* Balkenfeld belastet ist und alle Stützen in gleicher Höhe liegen. 10. Die Bestimmung der beiden Stützenmomente neben dem belasteten Balkenfelde. 11. Die von einer Einzellast erzeugten Biegemomente eines kontinuierlichen Balkens von konstantem Querschnitt. 12. Die Einflußlinien der Biegemomente eines kontinuierlichen Balkens von konstantem Querschnitt. 13. Die von einer Einzellast erzeugten Schubkräfte der Querschnitte eines kontinuierlichen Balkens. 14. Graphische Bestimmung der Biegemomente eines kontinuierlichen Balkens von konstantem Querschnitt bei gegebener Belastung und Stützenlage. 15. Anwendung auf den Fall, in dem nur *ein* Balkenfeld belastet ist und alle Stützen in einer Horizontalen liegen. 16. Einfluß der Höhenlage einer Stütze. 17. Literarische Notizen.

Abhandlung XI. Der vollwandige Bogenträger mit Kämpfergelenken 375—389

1. Einleitende Bemerkungen. 2. Gang der Untersuchung. 3. Die inneren Kräfte und die Formänderung eines Bogenträgers. 4. Graphische Bestimmung der Strecken v . 5. Graphische Bestimmung der Strecke u . 6. Graphische Bestimmung des Horizontalschubes bei zusammengesetzten Belastungen. 7. Die Kämpferdrucklinie. 8. Wirkung einer Aenderung der Stützenlage und einer Temperaturänderung. 9. Literarische Notiz.

Abhandlung XII. Das ebene Fachwerk 390—479

1. Erklärungen. 2. Die Hauptgleichung der Theorie des Fachwerks. 3. Einfache und zusammengesetzte Fachwerke. 4. Anwendung des Geschwindigkeitsplans bei Berechnung der Stabkräfte eines einfachen Fachwerks. 5. Beispiel eines Ausnahmefalles. 6. Anwendung von Momentengleichungen bei Berechnung der Stabkräfte eines einfachen Fachwerks.

7. Graphische Bestimmung der Stabkräfte eines einfachen Fachwerks, dessen Lasten nach Größe und Richtung gegeben sind. 8. Einflußzahlen und Einflußlinien. 9. Darstellung der Einflußlinien durch Seilpolygone. 10. Berechnung der Formänderungen einfacher Fachwerke. 11. Bestimmung der Formänderung eines einfachen Fachwerks mittels eines Geschwindigkeitsplanes. 12. Die Biegelinie. 13. Die Bildung der Biegelinie. 14. Die Längen und die Längenänderungen der überzähligen Stäbe eines zusammengesetzten Fachwerks. 15. Die Stabkräfte des zusammengesetzten Fachwerks. 16. Die Formänderungsarbeit eines zusammengesetzten Fachwerks. 17. Eine allgemeine Beziehung zwischen je zwei elastischen Formänderungen eines einfachen oder zusammengesetzten Fachwerks. 18. Das Bogenfachwerk mit Kämpfergelenken. 19. Das kontinuierliche Balkenfachwerk. 20. Das Bogenfachwerk ohne Kämpfergelenke. 21. Die Nebenspannungen im ebenen Fachwerk. 22. Literarische Notizen.

Abhandlung XIII. Allgemeine Theorie der ebenen Träger 480—542

1. Kleine Bewegungen einer Kette aus dehnbaren Gliedern. 2. Statische Darstellung der Kettenbewegung. 3. Die geschlossene Kette aus dehnbaren Gliedern. 4. Die Kette aus undeformablen Gliedern. 5. Die geschlossene Kette aus undeformablen Gliedern. 6. Die Einflußzahlen der Stabkräfte einfacher Fachwerke. 7. Die Formänderung eines Fachwerks. 8. Die Stabkräfte der überzähligen Stäbe eines zusammengesetzten Fachwerks. 9. Die elastische Linie eines geraden Balkens. 10. Die Berechnung der Pfostenträger. 11. Die Berechnung des Brückenrahmens. 12. Die Berechnung des vollwandigen Bogenträgers mit eingespannten Enden. 13. Die Berechnung der Nebenspannungen in Fachwerken mit steifen Knotenverbindungen. 14. Literarische Notiz.

Abhandlung XIV. Das Raumbachwerk 543—567

1. Einleitende Bemerkungen. 2. Die Stützung des Raumbachwerks. 3. Die Anzahl und die Anordnung der notwendigen Stäbe. 4. Die Gleichgewichtsbedingungen. 5. Die Berechnung der Stabkräfte eines einfachen Raumbachwerks aus den Gleichgewichtsbedingungen der Knoten. 6. Erstes Beispiel. Berechnung der Stabkräfte einer Kuppel nach Zimmermannscher Bauart. 7. Zweites Beispiel. Berechnung der Stabkräfte einer Kuppel nach Schwedlerscher Bauart. 8. Die Auflösung der Gleichgewichtsbedingungen bei unregelmäßiger Form des Fachwerks. 9. Die Bestimmung der Stabkräfte auf kinematischem Wege. 10. Die Berechnung der Formänderung eines einfachen Raumbachwerks. 11. Literarische Notizen.

Abhandlung I.

Das Gleichgewicht und die unendlich kleinen Bewegungen eines starren Körpers.

1. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. Wenn ein starrer Körper unter der Einwirkung einer Kräftegruppe vom Ruhezustande aus sich in Bewegung setzt, so wird in jedem, also auch im *ersten* unendlich kleinen Zeitabschnitt der Bewegung dem Körper eine kinetische Energie erteilt, die gleich ist der algebraischen Summe der von den Kräften geleisteten Arbeiten. Eine Bewegung, bei der diese Arbeit gleich null ist, kann *nicht* entstehen, weil *jeder* Punkt des Körpers ruhen muß, wenn seine kinetische Energie gleich null ist. Hieraus folgt der Satz, welcher der Statik zugrunde liegt und das *Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten* genannt worden ist: *Ein ruhender Körper verbleibt in Ruhe, wenn bei jeder möglichen unendlich kleinen Bewegung die Arbeitsumme der auf ihn wirkenden Kräfte gleich null ist.*

Zwischen den Strecken, die einerseits die möglichen Gleichgewichtsgruppen, anderseits die möglichen Bewegungen eines starren Körpers darstellen, ergeben sich aus jenem Satze bemerkenswerte geometrische Beziehungen, die in allen Teilen der technischen Mechanik Anwendung finden und deshalb auf möglichst einfachem Wege hier abgeleitet werden sollen.

2. Achse und Strecke. Eine mit einem bestimmten *Sinne* behaftete Gerade heißt eine *Achse*. Mit jeder Geraden fallen also *zwei* Achsen zusammen, die dem Sinne nach einander entgegengesetzt sind. Der Sinn einer Achse wird in der Zeichnung durch einen Pfeil und bei der Bezeichnung mit zwei Buchstaben durch deren Aufeinanderfolge angegeben. Mit *AB* wird demnach die Achse bezeichnet, deren Sinn von *A* nach *B* zeigt.

Ein von zwei Punkten begrenzter und mit einem bestimmten Sinne behafteter Teil einer Geraden wird eine *Strecke* genannt. Der

Sinn der Strecke wird in derselben Weise bezeichnet wie der einer Achse. Wenn auf einer Achse eine Strecke dargestellt wird, so legt man der letzteren das positive oder das negative Vorzeichen bei, je nachdem ihr Sinn mit dem der Achse übereinstimmt oder ihm entgegengesetzt ist. Eine Strecke BA trägt sonach auf der Achse AB das *negative* Vorzeichen; sie hat in bezug auf diese Achse einen negativen Wert. Wir bezeichnen jede Achse mit einem *kleinen* Buchstaben und eine Strecke auf dieser Achse mit demselben *großen* Buchstaben. Die Strecke P liegt also auf der Achse p und hat einen positiven Wert, wenn sie den Sinn von p hat. Durch Strecken können verschiedenartige Größen dargestellt werden: Wege, Kräfte, Geschwindigkeiten, Drehungen, Bewegungsgrößen, Impulse usf. Für jede solche Darstellung ist der zugehörige Maßstab anzugeben.

Um die im folgenden auftretenden Beziehungen bequem ausdrücken und geometrisch darstellen zu können, legen wir jeder Achse den Wert der unbenannten Zahl eins bei. Erforderlichenfalls kann dieser Wert durch eine Strecke von der Größe der Längeneinheit und dem Sinne der Achse dargestellt werden.

3. Darstellung der Drehgeschwindigkeit eines starren Körpers. Die Drehung eines Körpers um eine Gerade AB erscheint einem Auge, welches in dieser Geraden sich befindet, verschieden, je nachdem es von A nach B oder von B nach A sieht. Die Drehung der Räder eines Wagens, der auf einem Wege von Süd nach Nord sich bewegt, erscheint einem Beobachter als eine *Rechts-* oder als eine *Links*drehung, je nachdem er rechts oder links vom Wege steht, je nachdem also der Sehstrahl den Sinn Ost-West oder den Sinn West-Ost hat. Die bezeichnete Drehbewegung ist demnach eine Rechtsdrehung in bezug auf die Achse OW und zugleich eine Linksdrehung in bezug auf die Achse WO . Die Zeiger einer Uhr drehen sich rechts in bezug auf die Achse, die mit dem von vorn auf das Zifferblatt gerichteten Sehstrahl zusammenfällt. Wir legen der *Rechts*drehung das *positive*, der *Links*drehung das *negative* Vorzeichen bei.

Der Bewegungszustand eines starren Körpers, der um eine feste Gerade AB sich dreht, kann für einen bestimmten Zeitpunkt durch eine Strecke CD auf der Drehachse AB unzweideutig dargestellt werden, wenn festgesetzt wird, daß die Drehung eine *Rechts*-drehung in bezug auf den Sinn der Strecke CD sein soll, und daß die Länge CD in einem bestimmten Maßstabe, z. B.

$$1 \text{ cm} = 5 \text{ sek}^{-1}$$

die Größe der *Drehgeschwindigkeit* oder Winkelgeschwindigkeit im Zeitpunkte der Betrachtung angibt. In bezug auf die Achse AB ist sonach die Drehung negativ, wenn CD den Sinn BA hat. Die *Lage* der Strecke CD auf der Achse AB kommt bei dieser Darstellung *nicht* in Betracht: Die Strecke kann auf der Achse beliebig verschoben werden, ohne daß dadurch der dargestellte Bewegungszustand verändert wird.

4. Die Schubgeschwindigkeit einer Achse. Bei einer unendlich kleinen Bewegung eines starren Körpers durchlaufen die

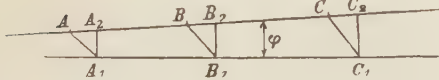


Abb. 1.

Punkte $A, B, C \dots$ (Abb. 1), die auf einer mit dem Körper starr verbundenen Achse liegen, unendlich kleine Strecken *erster* Ordnung $AA_1, BB_1, CC_1 \dots$, deren Projektionen

$AA_2, BB_2, CC_2 \dots$ auf die Achse AB nur um unendlich kleine Größen *zweiter* Ordnung voneinander abweichen und daher nach Sinn und Größe einander gleich sind. Denn der Winkel φ , den die Richtungen der beiden Achsen AB, A_1B_1 bilden, ist unendlich klein, und sein Kosinus

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots$$

weicht daher nur um eine unendlich kleine Größe *zweiter* Ordnung von eins ab. Die Strecken

$$AA_2 = BB_2 = CC_2 = \dots$$

bezeichnen die *Verschiebung*, die der Achse AB in ihrer eigenen Richtung erteilt wird. Man bestimmt also die *Schubgeschwindigkeit* einer Achse AB , indem man die Länge jener unendlich kleinen Wegstrecken durch die unendlich kleine Zeitdauer der Bewegung dividiert, oder *indem man die Geschwindigkeit irgend eines Punktes der Achse auf die Achse projiziert*. Die Schubgeschwindigkeit ist negativ, wenn ihr Sinn dem der Achse entgegengesetzt ist. Die Maßeinheit der Schubgeschwindigkeiten stimmt mit der Einheit der Geschwindigkeiten überein und ist also 1 cm sek^{-1} .

5. Die Geschwindigkeitskugel und die Nullachsen eines Körperpunktes. Um die *gleichzeitigen* Schubgeschwindigkeiten aller Achsen, welche durch einen Körperpunkt A gehen, zu ermitteln, muß die Geschwindigkeit AA_0 des Punktes auf jede dieser Achsen projiziert werden. Die Kugel vom Durchmesser AA_0 schneidet

also auf jeder durch den Punkt A gehenden Achse eine Strecke AD (Abb. 2) ab, deren Größe und Sinn die Schubgeschwindigkeit dieser Achse darstellt. Diese Geschwindigkeitskugel des Körperpunktes A ist bestimmt, wenn die Schubgeschwindigkeiten von drei Achsen, die durch A gehen und nicht in einer Ebene liegen, bekannt sind. Denn durch den Punkt A und die drei Endpunkte der darstellenden Strecken läßt sich nur eine

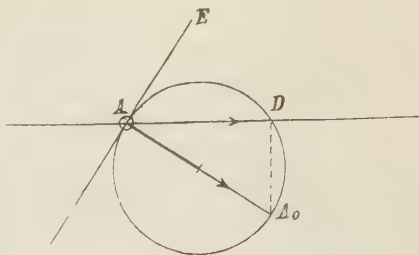


Abb. 2.

Kugel legen, deren Durchmesser AA_0 die Geschwindigkeit des Punktes A bestimmt. Die Achsen des Punktes A , deren Schubgeschwindigkeiten in dem Zeitpunkt der Betrachtung gleich null sind, bilden den Strahlenbüschel A der Ebene AE , welche die Geschwindigkeitskugel im Punkte A berührt. Diese Achsen werden die *Nullachsen* des Punktes A genannt und ihre Ebene AE heißt die *Nullebene* dieses Punktes. Zwei Nullachsen des Punktes A bestimmen seine Nullebene. Liegen drei Nullachsen eines Punktes nicht in einer Ebene, so ruht dieser Punkt zur Zeit der Betrachtung. Schneiden sich drei Nullachsen einer Ebene nicht in einem, sondern in drei Punkten A, B, C , so ist jeder Punkt D der Ebene ein Nullpunkt und jede ihrer Achsen eine Nullachse. Dieser Sonderfall tritt ein, wenn der Körper um eine ruhende Achse sich dreht, die in der Ebene ABC liegt.

6. Das Moment zweier Achsen. AB und CD (Abb. 3 und 4) seien zwei starr miteinander verbundene Achsen, deren kürzester Abstand die Länge a hat. Um die Lage der beiden Achsen gegeneinander festzustellen, kann man den in der Zeichnung dargestellten Kreiszyylinder vom Halbmesser a benutzen. In der *ersten* Lage (Abb. 3) fällt AB mit der Zylinderachse zusammen und zeigt nach *oben*, während die Achse CD den Zylinder *vorn* im Punkte F berührt. Die *zweite* Lage (Abb. 4) ergibt sich aus der ersten durch Vertauschung der beiden Achsen. Um die beiden Achsen aus der ersten Lage in die zweite überzuführen, erteilt man ihnen eine Parallelverschiebung, bei der F nach E und E nach G gelangt, darauf eine Linksdrehung um die Achse FG von der Größe des Winkels DFB und schließlich eine Drehung von 180° um die Zylinderachse. Man kann in beiden Lagen die vordere Achse

als den Minutenzeiger und die hintere Achse als den Stundenzeiger einer Uhr ansehen. Durch den Abstand a der beiden Zeiger voneinander und durch den Winkel α , der im Sinne der Uhrzeigerdrehung vom Stundenzeiger nach dem Minutenzeiger durchlaufen wird, ist die relative Lage der beiden Achsen gegeneinander voll-

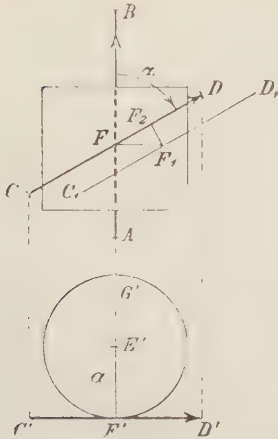


Abb. 3.

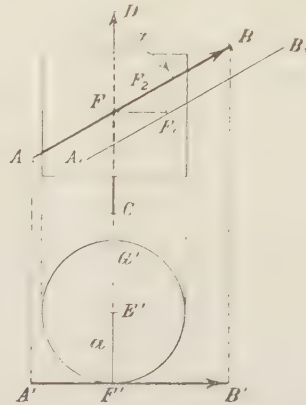


Abb. 4.

kommen bestimmt. Wir nennen die Größe $a \sin \alpha$ das *Moment der beiden Achsen* und bezeichnen es mit $[AB, CD]$ oder $[CD, AB]$. Das Vorzeichen des Momentes wird durch den Sinus des Winkels α bestimmt. Es ist zu beachten, daß bei dieser Bezeichnung die Aufeinanderfolge der beiden Achsen gleichgültig ist. Das Moment ist gleich null, wenn die beiden Achsen in einer Ebene liegen.

7. Arbeitsgeschwindigkeit und statisches Moment einer Kraft. Wir bezeichnen eine der beiden Achsen AB, CD (Abb. 3 und 4) mit p , die andere mit q , lassen die Achse q auch dem Sinne nach mit der Zylinderachse zusammenfallen und erteilen dem Körper eine Drehgeschwindigkeit, welche durch die positive Strecke Q auf der Achse q dargestellt wird. Der Punkt F der Achse p durchläuft dann in der unendlich kleinen Zeit dt die unendlich kleine Wegstrecke

$$FF_1 = Qa dt$$

mit der Geschwindigkeit Qa . Die Projektion dieser Geschwindigkeit auf die Achse p hat die Größe

$$Qa \sin \alpha = Q[p, q].$$

Ändert sich das Vorzeichen der Strecke Q , so ändert sich zugleich der Sinn oder das Vorzeichen der Schubgeschwindigkeit der Achse p , die daher *das Moment der Strecke Q in bezug auf die Achse p* genannt und mit $[p, Q]$ oder $[Q, p]$ bezeichnet wird. Bei der Bestimmung dieser Größe

$$[p, Q] = Q[p, q] = Qa \sin \alpha \quad (1)$$

sind die Vorzeichen von Q und von $\sin \alpha$ zu berücksichtigen.

Wirkt auf den bewegten Körper eine Kraft, die nach Lage, Größe und Sinn durch die Strecke P auf der Achse p dargestellt wird, so nennt man das Produkt $PQa \sin \alpha$ aus der Kraft P und der Schubgeschwindigkeit der Achse p *die Arbeitsgeschwindigkeit der Kraft P* ; sie bildet *das Moment der beiden Strecken P, Q* und wird mit

$$[P, Q] = PQ[p, q] = PQa \sin \alpha \quad (2)$$

bezeichnet. Die Maßeinheit dieser Größe ist $1 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{sek}^{-1}$ und ihr Vorzeichen wird durch die Vorzeichen der drei Größen P, Q und $\sin \alpha$ bestimmt. Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kraft P ist *positiv*, wenn die Kraft den Sinn der Schubgeschwindigkeit der Achse p hat.

Das *virtuelle Moment* oder das *statische Moment* der Kraft P in bezug auf die Achse q wird mit $[q, P]$ oder $[P, q]$ bezeichnet. Es entsteht aus der Arbeitsgeschwindigkeit $[P, Q]$, wenn man die Drehgeschwindigkeit Q durch die unbenannte Zahl $+1$, d. h. *durch den Wert der Achse q* ersetzt. Dieses Moment hat demnach die Größe

$$[q, P] = P[p, q] = Pa \sin \alpha \quad (3)$$

und ihre Maßeinheit ist $1 \text{ kg} \cdot \text{cm}$.

Die Verwandtschaft der Beziehungen zwischen den Kräften, die auf einen starren Körper wirken, einerseits und den unendlich kleinen Bewegungen eines solchen Körpers andererseits beruht darauf, daß in dem Begriffe der Arbeitsgeschwindigkeit $PQ[p, q]$ die beiden Grundbegriffe Kraft und Drehgeschwindigkeit in gleicher Form enthalten sind. Die beiden Begriffe der Schubgeschwindigkeit $Q[p, q]$ und des statischen Kraftmomentes $P[p, q]$, welche aus dem Begriffe der Arbeitsgeschwindigkeit abgeleitet werden können, indem entweder der Kraft P oder der Drehgeschwindigkeit Q der Wert $+1$ beigelegt wird, sind in jenen Beziehungen einander zugeordnet. *Einer jeden Eigenschaft, die in den geometrischen Gesetzen der Bewegung eines starren Körpers den Schubgeschwindigkeiten zukommt, steht in der Statik eine gleichlautende Eigenschaft der statischen Kraftmomente gegenüber.*

8. Die Schubgeschwindigkeiten in den zusammengesetzten Bewegungen und die statischen Momente einer Kräftegruppe. Einem starren Körper mögen *nacheinander* mehrere unendlich kleine Drehungen um feste Achsen $q_1, q_2, q_3 \dots$ erteilt werden. Hierbei beschreibt der Körperpunkt A ein unendlich kleines Polygon $ABCDE$ im Raume (Abb. 5). Bei der ersten Drehung



Abb. 5.

gelangt der Punkt von A nach B , bei der zweiten von B nach C usf. Die resultierende Wegstrecke AE bildet die *geometrische Summe* der Strecken, die der Punkt A bei der ersten Drehung, der Punkt B bei der zweiten usf. beschreibt. Da die Abstände der Punkte $A, B, C \dots$ unendlich kleine Größen *erster* Ordnung sind, so weichen die Richtungen und die Größen der von allen diesen Punkten bei einer unendlich kleinen Drehung beschriebenen Wegstrecken nur um unendlich kleine Größen *zweiter* Ordnung voneinander ab, d. h. diese Strecken sind gleich gerichtet und gleich groß. Das Polygon $ABCDE$ entsteht also auch, indem man die Wegstrecken geometrisch summiert, die der Punkt A *von seiner ursprünglichen Lage aus* bei jeder einzelnen Drehung durchlaufen würde. Die Ortsänderung ist demnach *unabhängig von der Reihenfolge* der unendlich kleinen Drehungen und bleibt auch dieselbe, wenn die Drehungen nicht *nacheinander*, sondern *gleichzeitig* ausgeführt werden. Die hierbei entstehende *resultierende Geschwindigkeit eines Körperpunktes A* bildet die *geometrische Summe der Geschwindigkeiten*, die der Punkt bei jeder einzelnen Drehung annehmen würde. Hieraus folgt, daß die bei den *Einzel-drehungen entstehenden Schubgeschwindigkeiten einer Achse p* bei *gleichzeitiger Ausführung der Drehungen sich algebraisch summieren*, d. h. es ist:

$$[p, (Q)] = [p, Q_1] + [p, Q_2] + [p, Q_3] + \dots, \quad (4)$$

wenn (Q) die *Gruppe* der Drehgeschwindigkeitsstrecken $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ bezeichnet, durch welche die zusammengesetzte Bewegung des Körpers gebildet wird.

In gleicher Weise bildet sich das statische Moment der aus den Kräften $P_1, P_2, P_3 \dots$ bestehenden Kräftegruppe (P) in bezug auf eine Achse q durch *algebraische* Summierung der Einzelmomente:

$$[q, (P)] = [q, P_1] + [q, P_2] + [q, P_3] + \dots \quad (5)$$

9. Die Momentenstrecken einer Gruppe von Kräften, die auf einen starren Körper wirken. Das statische Moment

$[q, (P)]$ der Kräftegruppe (P) in bezug auf die Achse q wird dargestellt durch eine Strecke Q auf der Achse q . Die Länge von Q bestimmt in dem gewählten Momentenmaßstabe die Größe des Momentes, und der Sinn von Q bezeichnet den Sehstrahl, für den das Moment *rechts* drehend erscheint. Indem man die im Abschnitt 5 beschriebenen Eigenschaften der Schubgeschwindigkeiten auf die Kraftmomente überträgt, ergeben sich die folgenden Beziehungen:

Trägt man von einem Punkte A aus auf jeder durch A gehenden Achse q die Strecke

$$Q = [q, (P)] = AD$$

(Abb. 2) auf, die nach Größe und Sinn das statische Moment der Kräftegruppe darstellt, so liegen die Endpunkte D aller dieser Momentenstrecken auf einer Kugel, der *Momentenkugel des Punktes A*. Dem von dem Kugeldurchmesser AA_0 dargestellten *Hauptmoment des Punktes A* entspricht bei der unendlich kleinen Bewegung des Körpers, die von der Streckengruppe (P) dargestellt werden kann, die *Geschwindigkeit* des Punktes A .

Die Achsen AE des Punktes A , deren Kraftmomente gleich null sind, bilden den Strahlenbüschel der Ebene, welche die Momentenkugel im Punkte A berührt.

Zwei Nullachsen des Punktes A bestimmen seine Nullebene.

Liegen *drei* Nullachsen des Punktes A nicht in einer Ebene, so sind alle durch A gehende Achsen Nullachsen und A ist der Nullpunkt einer jeden durch ihn gelegten Ebene.

Schneiden sich drei Nullachsen einer Ebene nicht in *einem*, sondern in *drei* Punkten, so ist jede Achse der Ebene eine Nullachse der Kräftegruppe (P) . Bei diesen Beziehungen kommt die Lage der Kräfte auf ihren Achsen, also die Lage der *Angriffspunkte* *nicht* in Betracht. Die Angriffspunkte können auf den Kraftachsen beliebig verschoben werden, ohne daß dadurch die statischen Momente geändert werden.

10. Gleichwertige Streckengruppen. Man nennt zwei Streckengruppen (q) , (S) , welche gleichzeitige Drehgeschwindigkeiten eines starren Körpers darstellen, *gleichwertig*, wenn sie denselben Bewegungszustand des Körpers bestimmen, wenn also die beiden Bewegungen einer jeden mit dem Körper starr verbundenen Achse u dieselbe Schubgeschwindigkeit

$$[u, (q)] = [u, (S)] \quad (6)$$

erteilen. Dann sind auch die Geschwindigkeiten eines jeden Körper-

punktes in beiden Bewegungen nach Größe, Richtung und Sinn einander gleich. Diese Eigenschaft soll durch das Zeichen

$$(Q) \quad (S) \quad (7)$$

dargestellt werden.

Ebenso nennt man zwei *Kräftegruppen* (P) , (R) , die auf einen starren Körper einwirken, gleichwertig

$$(P) \quad (R), \quad (8)$$

wenn für jede Achse u die beiden statischen Momente der Gruppen gleich groß sind:

$$[u, (P)] = [u, (R)]$$

II. Die Koordinaten einer Streckengruppe. *Drei* Körperpunkte A, B, C , die nicht in einer Geraden liegen, bestimmen die *Lage* eines starren Körpers. Daher bestimmen in jedem Zeitpunkt die Geschwindigkeiten von A, B, C die gleichzeitigen Geschwindigkeiten aller anderen Körperpunkte. Der Bewegungszustand eines starren Körpers, d. h. die Gesamtheit der gleichzeitigen Geschwindigkeiten aller Körperpunkte, ist folglich gegeben, *wenn die Schubgeschwindigkeiten der sechs Kanten irgend eines mit dem Körper starr verbundenen Tetraeders $ABCD$ bekannt sind.* Sie sind *hinreichend*, aber auch *erforderlich*, um die Geschwindigkeitskugeln der drei Körperpunkte A, B, C zu bilden. Die Schubgeschwindigkeiten der drei Achsen DA, DB, DC bestimmen ferner die Geschwindigkeitskugel des vierten Körperpunktes D , und da von den vier Achsen EA, EB, EC, ED , die irgend einen fünften Körperpunkt E mit den vier Tetraederecken verbinden, in jedem Falle mindestens *drei* nicht in einer Ebene liegen, so kann auch die Geschwindigkeitskugel E gebildet werden aus den Schubgeschwindigkeiten jener vier Achsen, welche durch die vier Geschwindigkeitskugeln A, B, C, D gegeben sind. *Demnach sind zwei Gruppen $(Q), (S)$ von Drehgeschwindigkeiten gleichwertig, wenn sie einer jeden der sechs Kanten des Tetraeders gleiche Schubgeschwindigkeiten erteilen.*

Ebenso sind zwei Kräftegruppen $(P), (R)$, die auf einen starren Körper einwirken, *gleichwertig, wenn in bezug auf jede der sechs Tetraederkanten die beiden statischen Momente der Kräftegruppen gleich groß sind.* Die Form und die Lage des mit dem Körper starr verbundenen Tetraeders können willkürlich gewählt werden. Für analytische Untersuchungen eignet sich am besten ein unendlich großes Tetraeder, welches von drei rechtwinkligen Koordinatenebenen und der unendlich fernen Ebene begrenzt wird. Für die geometrische

Darstellung ist dagegen ein Tetraeder von *endlichen* Abmessungen vorzuziehen. Wir benutzen in der Regel ein Tetraeder von der in den Abb. 6 und 7 dargestellten Form. Die mit den Tetraederkanten AB , AC , AD , CD , DB , BC auch dem Sinne nach zusammenfallenden Achsen sind in vorstehender Reihenfolge mit x , y , z , x' , y' , z' bezeichnet. Die drei Tetraederkanten AB , AC , AD stehen rechtwinklig aufeinander und haben gleiche Längen, nämlich $\sqrt{2}$ Längeneinheiten, also 1,414 cm.

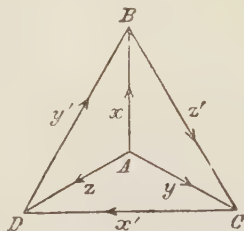


Abb. 6.

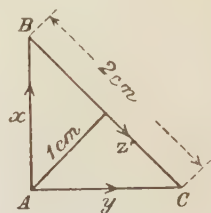


Abb. 7.

Demnach sind die Kanten CD , DB , BC 2 cm lang, und der kürzeste Abstand der zueinander rechtwinklig gerichteten Achsen x und x' , y und y' , z und z' beträgt 1 cm. Der Sinn der Achsen wurde so gewählt, daß die drei Momente $[x, x']$, $[y, y']$, $[z, z']$ den Wert $+1$ cm annehmen. Es ist zu beachten, daß die Momente aller übrigen Achsenpaare, z. B.: $[x, y]$, $[x, z]$, $[x, y']$. . . gleich null sind, weil die beiden Achsen in einer Ebene liegen. Daher hat eine Gruppe (K) , welche aus den sechs Strecken X , Y , Z , X' , Y' , Z' besteht, in bezug auf die Achsen x , y , z , x' , y' , z' die Momente:

$$\left. \begin{aligned} [x, (K)] &= [x, X'] = X' \cdot 1 \text{ cm}, & [y, (K)] &= [y, Y'] = Y' \cdot 1 \text{ cm} \\ [z, (K)] &= [z, Z'] = Z' \cdot 1 \text{ cm}, & [x', (K)] &= [x', X] = X \cdot 1 \text{ cm} \\ [y', (K)] &= [y', Y] = Y \cdot 1 \text{ cm}, & [z', (K)] &= [z', Z] = Z \cdot 1 \text{ cm} \end{aligned} \right\} (9)$$

Die Gruppe (K) ist gleichwertig der gegebenen Streckengruppe (Q) :

$$(K) \sim (Q),$$

wenn die sechs Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} [x, (K)] &= [x, (Q)], & [y, (K)] &= [y, (Q)], & [z, (K)] &= [z, (Q)] \\ [x', (K)] &= [x', (Q)], & [y', (K)] &= [y', (Q)], & [z', (K)] &= [z', (Q)] \end{aligned} \right\} (10)$$

erfüllt sind. Die Strecken der Gruppe (K) erhalten demnach die Werte:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{[x, (Q)]}{1 \text{ cm}}, & Y' &= \frac{[y, (Q)]}{1 \text{ cm}}, & Z' &= \frac{[z, (Q)]}{1 \text{ cm}} \\ X' &= \frac{[x', (Q)]}{1 \text{ cm}}, & Y &= \frac{[y', (Q)]}{1 \text{ cm}}, & Z &= \frac{[z', (Q)]}{1 \text{ cm}} \end{aligned} \right\} (11)$$

Die sechs Strecken X, Y, Z, X', Y', Z' auf den Tetraederkanten x, y, z, x', y', z' heißen die *tetraedrischen Koordinaten* der Streckengruppe (Q) . Sie sind selbstverständlich gleichartig den Strecken der Gruppe (Q) , sie bezeichnen also gleichzeitige Drehgeschwindigkeiten um die Tetraederkanten, wenn die Streckengruppe (Q) eine unendlich kleine Bewegung des starren Körpers darstellt, und sie bezeichnen Kräfte, wenn (Q) eine Gruppe von Kräften bildet, die auf den starren Körper einwirken.

Zwei gleichartige Streckengruppen (P) und (R) sind nach dem Vorstehenden gleichwertig, wenn sie in bezug auf ein und dasselbe Tetraeder gleiche Koordinaten haben, oder, was dasselbe ist, wenn sie einer und derselben Koordinatengruppe (K) gleichwertig sind.

12. Die Arbeitsgeschwindigkeit einer Kräftegruppe. Auf einen starren Körper, dem in einem gegebenen Zeitpunkt die Bewegung (Q) , d. h. eine Gruppe gegebener Drehgeschwindigkeiten erteilt wird, möge eine gegebene Kräftegruppe (P) einwirken. Unter Arbeitsgeschwindigkeit der Gruppe (P) versteht man die algebraische Summe der Arbeitsgeschwindigkeiten der Einzelkräfte. Sie bildet das Moment der beiden Streckengruppen (P) , (Q) und wird daher mit $[(P), (Q)]$ bezeichnet. Wir bezeichnen ferner mit X, Y, Z, X', Y', Z' die Koordinaten der Bewegung (Q) und mit $X_1, Y_1, Z_1, X'_1, Y'_1, Z'_1$ die Koordinaten der Kräftegruppe (P) . Eine Einzelkraft P hat bei der Bewegung (Q) die Schubgeschwindigkeit

$$[p, (Q)] = [p, X] + [p, Y] + [p, Z] + [p, X'] + [p, Y'] + [p, Z']$$

und also eine Arbeitsgeschwindigkeit von der Größe $P[p, (Q)]$. Beachtet man, daß

$$P[p, X] = PX[p, x] = X[x, P]$$

$$P[p, Y] = PY[p, y] = Y[y, P]$$

usf. ist, so folgt:

$$P[p, (Q)] = X[x, P] + Y[y, P] + Z[z, P] + X'[x', P] + Y'[y', P] + Z'[z', P]$$

Bildet man nach dieser Formel die Arbeitsgeschwindigkeiten der Einzelkräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$, aus welchen die Gruppe (P) besteht, und berücksichtigt, daß die statischen Momente der Kräftegruppe (P) durch die Gleichungen

$$[x, (P)] = [x, P_1] + [x, P_2] + \dots = 1 \text{ cm} \cdot X'_1$$

$$[y, (P)] = [y, P_1] + [y, P_2] + \dots = 1 \text{ cm} \cdot Y'_1$$

usf. bestimmt werden, so ergibt sich für die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräftegruppe (P) der Wert:

$$[(P), (Q)] = 1 \text{ cm} (X X'_1 + Y Y'_1 + Z Z'_1 + X' X_1 + Y' Y_1 + Z' Z_1). \quad (12)$$

Diese Gleichung zeigt, daß *gleichwertige Kräftegruppen bei gleichwertigen Bewegungen gleiche Arbeitsgeschwindigkeiten haben.*

Nach Gleichung (12) kann jedes Moment durch die Koordinaten der das Moment bildenden Achsen und Strecken ausgedrückt werden.

13. Die rechtwinkligen Projektionen gleichwertiger Streckengruppen auf eine Ebene und auf eine Achse. Wir bezeichnen mit (P_1) , (Q_1) die rechtwinkligen Projektionen von zwei gleichwertigen Gruppen (P) , (Q) auf eine Ebene α und wählen ein Koordinatentetraeder $ABCD$, dessen Kanten CD , DB , BC oder x' , y' , z' in der Ebene α liegen, während die Kanten AB , AC , AD oder x , y , z zu α rechtwinklig gerichtet sind, also in dem unendlich fernen Punkt A sich schneiden. In bezug auf jede der Achsen x , y , z ist das Moment einer Strecke P gleich dem Moment ihrer Projektion P_1 ; daher sind in bezug auf jede dieser drei Achsen die Momente der vier Streckengruppen (P) , (Q) , (P_1) , (Q_1) gleich groß. Ferner sind in bezug auf jede der drei Achsen x' , y' , z' die Momente der beiden Streckengruppen (P_1) , (Q_1) gleich null. Es folgt hieraus, daß *die rechtwinkligen Projektionen von gleichwertigen Streckengruppen gleichwertig sind:*

$$(P_1) \equiv (Q_1).$$

Erteilt man ferner einem starren Körper in der Richtung irgend einer Achse v eine Parallelverschiebung von der Geschwindigkeit V , so ist die Arbeitsgeschwindigkeit einer auf den Körper wirkenden Kräftegruppe (P) gleich dem Produkt aus der Geschwindigkeit V und der algebraischen Summe der Projektionen der Kräfte P auf die Achse v . *Gleichwertige Kräftegruppen haben daher in bezug auf jede Achse gleiche Projektionen.*

Indem man diese Eigenschaft auch auf Drehungsgruppen überträgt, ergibt sich: *Gleichwertige Streckengruppen haben gleiche Projektionen in bezug auf jede Achse und folglich auch gleiche geometrische Summen.* Daß die beiden gleichartigen Streckengruppen (Q) und (S) dieselbe geometrische Summe G haben, soll in der Folge durch das Zeichen:

$$(Q) \equiv (S) \equiv G \quad (13)$$

ausgedrückt werden. Um die geometrische Summe G zu bestimmen, bildet man die Projektionen der sechs Koordinaten auf die zueinander rechtwinklig gerichteten Achsen x , y , z :

$$\begin{aligned}
 G_x &= X + (Y' - Z') \sqrt{\frac{1}{2}} \\
 G_y &= Y + (Z' - X') \sqrt{\frac{1}{2}} \\
 G_z &= Z + (X' - Y') \sqrt{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Die Länge der geometrischen Summe ergibt sich dann aus der Formel:

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2} \tag{15}$$

14. Die Koordinaten einer Strecke und einer Achse. Eine Kraft P leistet keine Arbeit, wenn der Körper, auf den sie wirkt, um die ruhende Achse p sich dreht. Die Koordinaten einer Strecke P , mag dieselbe eine Kraft oder eine Drehgeschwindigkeit darstellen, sind daher nach Gleichung 12) voneinander abhängig durch die Bedingung:

$$\begin{aligned}
 [P, P] &= 2 \text{ cm } (X X' + Y Y' + Z Z') = 0 \\
 \text{oder} \quad X X' + Y Y' + Z Z' &= 0
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Eine Strecke P wird demnach durch fünf Koordinaten X, Y, Z, X', Y' bestimmt; die sechste ergibt sich aus der Gleichung:

$$Z' = - \frac{X X' + Y Y'}{Z} \tag{17}$$

Dividiert man die Koordinaten der Strecke P durch den Wert von P , so entstehen die *sechs unbenannten Zahlenwerte*:

$$\frac{X}{P} = x, \quad \frac{Y}{P} = y, \quad \frac{Z}{P} = z, \quad \frac{X'}{P} = x', \quad \frac{Y'}{P} = y', \quad \frac{Z'}{P} = z' \tag{18}$$

welche die Koordinaten einer Strecke auf der Achse p von dem Werte

$$\frac{P}{P} = +1$$

bilden und in Uebereinstimmung mit Abschnitt 2 die *Koordinaten der Achse p* genannt werden. Die sechs Koordinaten einer Achse sind durch *zwei* Bedingungen voneinander abhängig. Da sie eine Einzelstrecke darstellen, so ist nach Gleichung 16):

$$x x' + y y' + z z' = 0 \tag{19}$$

und da ihre geometrische Summe gleich $+1$ ist, so muß nach den Gleichungen 14) und 15)

$$\begin{aligned} \left(x + (y' - z')\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(y + (z' - x')\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \\ \left(z + (x' - y')\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = 1 \end{aligned} \quad (20)$$

sein.

15. Kräftepaare und Drehungspaare. Wenn die geometrische Summe einer Streckengruppe gleich null ist, so müssen ihre sechs Koordinaten nach den Gleichungen 14) die drei Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} X + (Y' - Z')\sqrt{\frac{1}{2}} &= 0 \\ Y + (Z' - X')\sqrt{\frac{1}{2}} &= 0 \\ Z + (X' - Y')\sqrt{\frac{1}{2}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

erfüllen. Eine solche Streckengruppe wird also durch *drei* von diesen Bedingungen unabhängige Koordinaten bestimmt. Wenn wir von dem Sonderfalle, in dem jede der sechs Koordinaten gleich null ist, hier vorläufig absehen, so ist die Streckengruppe gleichwertig einer Einzelstrecke U , weil die Bedingung 16) in den Gleichungen 21) enthalten ist. Die Größe der Strecke U ist *gleich null*, ihre Entfernung aber ist *unendlich groß*, weil ihre Momente, z. B. in bezug auf die Koordinatenachsen, endliche Werte haben. Man nennt U daher eine *unendlich kleine* und *unendlich ferne* Strecke. Eine solche Gruppe von *Drehgeschwindigkeiten* bestimmt die einfachste Bewegung, die einem Körper erteilt werden kann: die Drehung um eine unendlich ferne Achse u , also eine *Parallelverschiebung*, bei der alle Körperpunkte Geschwindigkeiten V von gleicher Größe und gleicher Richtung haben. Die Richtung der Geschwindigkeit V ist rechtwinklig zu den Parallelebenen, die in der unendlich fernen Drehachse u sich schneiden. Größe und Richtung der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit V können bestimmt werden durch die Geschwindigkeitskugel *einer* Tetraederecke, also z. B. durch die Schubgeschwindigkeiten $X' \cdot 1 \text{ cm}$, $Y' \cdot 1 \text{ cm}$, $Z' \cdot 1 \text{ cm}$ der in der Ecke A sich schneidenden Achsen x , y , z . Werden die Projektionen von V auf die Achsen x , y , z mit V_x , V_y , V_z bezeichnet, so ist demnach

$$\left. \begin{aligned} V_x &= X' \cdot 1 \text{ cm} \\ V_y &= Y' \cdot 1 \text{ cm} \\ V_z &= Z' \cdot 1 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$V = 1 \text{ cm } \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} \quad (23)$$

Die unendlich kleine und unendlich ferne Strecke U ist gleichwertig einer unendlich großen Anzahl von Streckengruppen (Q), die aus je zwei Strecken Q_1, Q_2 bestehen und folgende drei Bedingungen erfüllen:

1) Die beiden Strecken müssen in einer der Parallelebenen liegen, die in der unendlich fernen Achse u sich schneiden, weil alle Achsen dieser Ebenen Nullachsen sind.

2) Die beiden Strecken Q_1, Q_2 müssen nach Größe und Richtung einander gleich, dem Sinne nach einander entgegengesetzt sein, weil ihre geometrische Summe gleich null ist.

3) Jede zu jenen Parallelebenen normal gerichtete Achse v von dem Sinne der Geschwindigkeit V muß eine positive Schubgeschwindigkeit von der Größe

$$[v, Q_1] + [v, Q_2] = V$$

haben, denn diese Schubgeschwindigkeit stimmt mit der Geschwindigkeit der Körperpunkte überein. Die angegebene Größe ist gleich dem Produkt aus dem gemeinschaftlichen Wert der beiden gleich großen Strecken Q_1, Q_2 und ihrem Abstände voneinander.

Zwei parallele Strecken von gleicher Größe und entgegengesetztem Sinn werden ein *Streckenpaar*, also ein *Kräftepaar* oder ein *Drehungspaar* genannt, je nachdem die Strecken Q_1, Q_2 Kräfte oder Drehgeschwindigkeiten darstellen.

Ein *Kräftepaar* P_1, P_2 ist also gleichwertig einer unendlich kleinen und unendlich fernen Kraft U in der Ebene des Paares. Die Hauptmomentenstrecke des Paares ist für jeden Punkt rechtwinklig zu dieser Ebene gerichtet, hat die Größe $P_1 h$, wenn mit h der Abstand zwischen beiden Kräften bezeichnet wird, und den Sinn des Sehstrahls, für den der Drehsinn des Paares mit dem Sinne der Uhrzeigerdrehung übereinstimmt.

Die Arbeitsgeschwindigkeit eines jeden Kräftepaares U_1 ist bei jeder Parallelverschiebung U_2 gleich null:

$$[U_1, U_2] = 0,$$

weil die positive Arbeit der einen Kraft ebenso groß ist wie die negative der anderen.

16. Nullwertige Streckengruppen oder Gleichgewichtsgruppen. Der im vorigen Abschnitt erwähnte Sonderfall, in dem alle sechs Koordinaten einer Streckengruppe (Q) gleich null sind, bezeichnet, wenn die Strecken Drehgeschwindigkeiten darstellen, den

Ruhezustand des Körpers. Denn sind die Schubgeschwindigkeiten der sechs Kanten des Koordinatentetraeders gleich null, so ruhen die Ecken des Tetraeders und folglich auch alle anderen Körperpunkte. Bezeichnen die Strecken der Gruppe *Kräfte*, die auf einen ruhenden Körper einwirken, so verbleibt der Körper in Ruhe, weil der Gleichung (12) zufolge die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräftegruppe bei jeder unendlich kleinen Anfangsbewegung gleich null sein würde. Man sagt, der Körper befinde sich unter Einwirkung der Kräfte im *Gleichgewicht* und nennt daher eine solche Kräftegruppe eine *Gleichgewichtsgruppe* oder eine *nullwertige* Gruppe. Die letztere Bezeichnung kann auch auf Gruppen von Drehgeschwindigkeiten angewandt werden.

Daß die Strecken $P_1, P_2, P_3 \dots$ eine nullwertige Gruppe bilden, soll in der Folge durch das Zeichen:

$$(P) \equiv P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp \dots \equiv 0 \quad (24)$$

ausgedrückt werden. Wir bezeichnen die Koordinaten der Achsen $p_1, p_2, p_3 \dots$ der Strecken $P_1, P_2, P_3 \dots$ mit x, y, z, x', y', z' unter Anfügung der Streckennummer. Das Moment der Strecke P_1 in bezug auf die Koordinatenachse x ist daher z. B.:

$$[x, P_1] = P_1 [x, p_1] = P_1 x'_1 \cdot 1 \text{ cm.}$$

Die sechs Nullwertigkeitsbedingungen lauten demnach:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= X = P_1 x'_1 + P_2 x'_2 + P_3 x'_3 + \dots = \sum P x' \\ 0 &= \sum P y' = \sum P z' = \sum P x = \sum P y = \sum P z. \end{aligned} \right\} (25)$$

Eine Strecke, die nach Lage und Größe mit P_1 übereinstimmt, dem *Sinne* nach aber ihr entgegengesetzt ist, soll mit $\mp P_1$ bezeichnet werden.

Zerlegt man eine nullwertige Gruppe

$$P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4 \mp P_5 \equiv 0$$

in zwei beliebige Teilgruppen, z. B.: P_1, P_2, P_3 und P_4, P_5 , und wendet den Sinn der Strecken *einer* der beiden Gruppen, so entstehen zwei *gleichwertige* Gruppen:

$$P_1 \mp P_2 \mp P_3 \quad \mp P_4 \mp P_5.$$

Denn die Bedingung der Gleichwertigkeit dieser beiden Gruppen:

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 = -P_4 x_4 - P_5 x_5$$

stimmt für jede Achse x' überein mit der Bedingung der Nullwertigkeit der ganzen Gruppe.

Die rechtwinklige Projektion (Q) einer nullwertigen Streckengruppe (P) auf irgend eine Ebene α bildet wieder eine nullwertige Gruppe. Denn bezieht man die Bedingungen der Nullwertigkeit

auf sechs Achsen, von denen drei in der Ebene α liegen und drei zu ihr senkrecht gerichtet sind, so sind die Bedingungen der Nullwertigkeit der Gruppe (Q) in denen der Gruppe (P) enthalten. Die *geometrische Summe* einer nullwertigen Streckengruppe hat die Größe null, wie unmittelbar aus den Gleichungen (14) hervorgeht.

17. Die möglichen Lagen der Strecken einer nullwertigen Gruppe. Das Moment, welches von der nullwertigen Gruppe (P) mit irgend einer anderen Gruppe (Q) oder mit irgend einer Einzelstrecke R gebildet wird, hat die Größe null:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= P_1 [p_1, (Q)] + P_2 [p_2, (Q)] + \dots + P_n [p_n, (Q)] \\ 0 &= P_1 [p_1, R] + P_2 [p_2, R] + \dots + P_n [p_n, R] \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Sind von den n Achsen der Gruppe (P) die Achsen $p_1, p_2 \dots p_{n-1}$ Nullachsen der Gruppe (Q) oder der Einzelstrecke R , so muß, wie aus den vorstehenden Gleichungen folgt, auch die Achse p_n zu diesen Nullachsen gehören. *Die Achse p_n muß also Nullachse einer jeden Streckengruppe sein, zu deren Nullachsen die $(n-1)$ anderen Achsen $p_1, p_2 \dots p_{n-1}$ gehören, und sie muß jede Achse r schneiden, die von den anderen $(n-1)$ Achsen der Gruppe (P) geschnitten wird.*

Durch diese Bedingungen ist jede der n Achsen einer nullwertigen Streckengruppe *abhängig* von den übrigen $(n-1)$ Achsen. *Achsen, welche voneinander unabhängig sind, können nicht die Träger einer nullwertigen Streckengruppe sein.* Wir nennen als Beispiel einer Gruppe von unabhängigen Achsen die sechs Kanten eines Tetraeders: Jede Strecke dieser sechs Achsen muß gleich null sein, wenn die Gruppe nullwertig sein soll. Die vorstehende Betrachtung führt zu der folgenden Aufgabe: Gegeben sind $(n-1)$ voneinander unabhängige Achsen $p_1, p_2 \dots p_{n-1}$; es sollen die Lagen der Achsen p_n angegeben werden, welche die Bildung der nullwertigen Gruppe

$$P_1 \nmid P_2 \nmid \dots \nmid P_n \equiv 0$$

ermöglichen. Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe ergibt sich aus der folgenden Betrachtung. Den sechs Bedingungen der Nullwertigkeit kann man nach Gleichung (25) die Form geben:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= x_1 + \frac{P_2}{P_1} x_2 + \frac{P_3}{P_1} x_3 + \dots + \frac{P_n}{P_1} x_n \\ 0 &= y_1 + \frac{P_2}{P_1} y_2 + \frac{P_3}{P_1} y_3 + \dots + \frac{P_n}{P_1} y_n \\ 0 &= z_1 + \frac{P_2}{P_1} z_2 + \frac{P_3}{P_1} z_3 + \dots + \frac{P_n}{P_1} z_n \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= x'_1 + \frac{P_2}{P_1} x'_2 + \frac{P_3}{P_1} x'_3 + \dots + \frac{P_n}{P_1} x'_n \\ 0 &= y'_1 + \frac{P_2}{P_1} y'_2 + \frac{P_3}{P_1} y'_3 + \dots + \frac{P_n}{P_1} y'_n \\ 0 &= z'_1 + \frac{P_2}{P_1} z'_2 + \frac{P_3}{P_1} z'_3 + \dots + \frac{P_n}{P_1} z'_n \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Eliminiert man aus diesen sechs Gleichungen die $(n-1)$ Unbekannten $\frac{P_2}{P_1}, \frac{P_3}{P_1} \dots \frac{P_n}{P_1}$, so bleiben $(7-n)$ Gleichungen übrig, die außer den bekannten Koordinaten der gegebenen Achsen $p_1, p_2 \dots p_{n-1}$ nur die sechs unbekannten Koordinaten $x_n, y_n \dots z_n$ der Achse p_n enthalten und daher die Form haben:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= X' x_n + Y' y_n + Z' z_n + X x'_n + Y y'_n + Z z'_n \\ 0 &= X'_1 x_n + Y'_1 y_n + Z'_1 z_n + X_1 x'_n + Y_1 y'_n + Z_1 z'_n \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Die Größen $X, Y, Z \dots$ sind Funktionen der bekannten Koordinaten $x, y, z \dots$ der Achsen $p_1, p_2 \dots p_{n-1}$. Sie ergeben sich aus der angedeuteten Rechnung, brauchen jedoch für den vorliegenden Zweck hier nicht entwickelt zu werden. Die Gleichungen (28) sprechen die Bedingung aus, daß die unbekannte Achse p_n Nullachse einer jeden der $(7-n)$ Streckengruppen $(Q), (Q_1) \dots$ sein muß, deren Koordinaten:

$$\left. \begin{aligned} (Q) &\equiv X \pm Y \pm Z \pm X' \pm Y' \pm Z' \\ (Q_1) &\equiv X_1 \pm Y_1 \pm Z_1 \pm X'_1 \pm Y'_1 \pm Z'_1 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

durch die Gleichungen (28) gegeben sind. Nachdem diesen Bedingungen gemäß eine Achse p_n gewählt worden ist, bestimmen die Gleichungen (27) die Größenverhältnisse $\frac{P_2}{P_1}, \frac{P_3}{P_1} \dots \frac{P_n}{P_1}$ der Strecken.

Die angedeuteten, etwas unbequemen Rechnungen können durch das in den folgenden Abschnitten beschriebene geometrische Verfahren ersetzt werden.

18. Nullwertige Gruppen von zwei Strecken: $P_1 \pm P_2 \equiv 0$. Damit die Achse p_2 geschnitten werde von jeder Achse q , die auch p_1 schneidet, muß p_2 mit p_1 zusammenfallen. Von einer Achse p_1 ist also nur die mit ihr zusammenfallende Achse p_2

von entgegengesetztem Sinn abhängig. Die Strecke P_2 ist bestimmt durch die Bedingung

$$P_1 \mp P_2 \equiv 0$$

oder

$$P_2 \equiv + P_1$$

d. h. P_2 hat Größe, Richtung und Sinn der gewendeten Strecke P_1

19. Nullwertige Gruppen von drei Strecken: $P_1 \mp P_2 \mp P_3 \equiv 0$. Jede Achse q , die von p_1 und p_2 geschnitten wird, kann p_3 nur dann schneiden, wenn die drei Achsen in einer Ebene liegen und in einem Punkte A sich schneiden (Abb. 8). Von

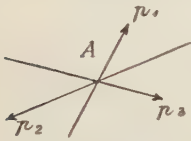


Abb. 8.

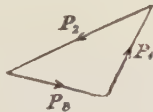


Abb. 9.

zwei sich schneidenden Achsen p_1 , p_2 ist also jede Achse abhängig, die durch ihren Schnittpunkt A geht und in ihrer Ebene liegt. Die Größenverhältnisse $P_1 : P_2 : P_3$ werden in einer besonderen Zeichnung, dem Streckenplan (Abb. 9),

bestimmt durch die Bedingung, daß die geometrische Summe der drei Strecken gleich null sein muß.

Sind die drei Achsen p_1 , p_2 , p_3 parallel, so kann das Verhältnis $\frac{P_2}{P_1}$ durch eine Momentengleichung in bezug auf eine Achse

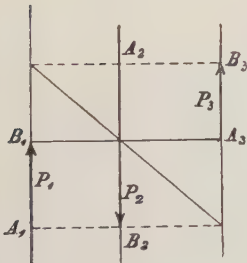


Abb. 10.

bestimmt werden, welche die Ebene der Strecken in einem Punkte der Achse p_3 rechtwinklig schneidet. Das zweite Verhältnis $\frac{P_3}{P_1}$ ergibt sich darauf aus der Bedingung, daß die geometrische Summe der drei Strecken gleich null sein muß. Geometrisch werden diese Bedingungen durch Abb. 10 dargestellt:

$$P_1 : P_2 : P_3 = A_1 B_1 : A_2 B_2 : A_3 B_3.$$

20. Nullwertige Gruppen von vier Strecken. $P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4 \equiv 0$. Es sind folgende vier Fälle zu unterscheiden:

1) Die gegebenen drei Achsen p_1 , p_2 , p_3 (Abb. 11) liegen in einer Ebene α , und da sie voneinander unabhängig sind, gehen sie nicht durch einen Punkt. Von diesen drei Achsen ist jede Achse p_4 der Ebene α abhängig, weil jede Achse q , die von p_1 , p_2 , p_3 geschnitten wird, jede andere Achse der Ebene schneidet. Ist eine

Achse p_4 gewählt worden, so legt man, um die nullwertige Gruppe zu bilden, auf eine der drei Diagonalen r des Achsenviereckes, z. B. auf die Achse AB (Abb. 11), zwei Strecken R von gleicher Größe und entgegengesetztem Sinn, also die nullwertige Gruppe

$$R + R \equiv 0,$$

bildet darauf im Streckenplan (Abb. 12) die beiden Gruppen:

$$P_1 + P_2 + R \equiv 0$$

$$P_3 + P_4 + R \equiv 0$$

und durch Zusammenlegen derselben die zu bestimmende Gruppe

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \equiv 0.$$

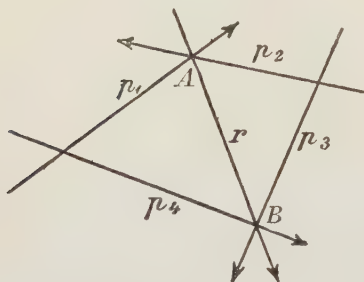


Abb. 11.

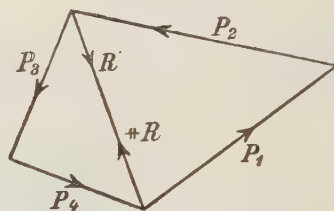


Abb. 12.

2) Die gegebenen Achsen p_1, p_2, p_3 liegen nicht in einer Ebene und schneiden sich in einem Punkte A , der auch unendlich fern

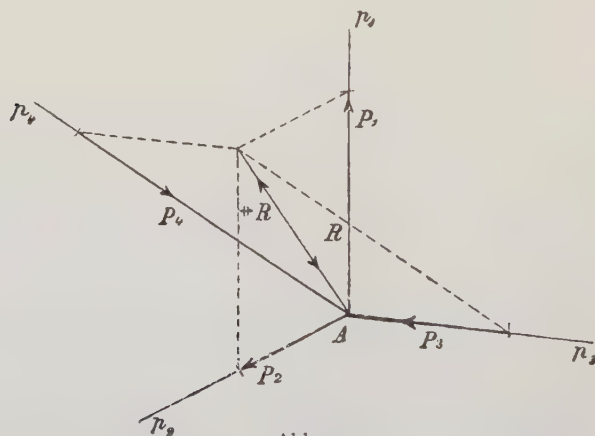


Abb. 13.

liegen kann. Die Achsen, welche zugleich p_1, p_2, p_3 schneiden, gehen alle durch den Punkt A ; p_4 muß daher auch durch diesen

Punkt gehen. Auf die Schnittlinie der beiden Ebenen p_1p_2 und p_3p_4 (Abb. 13) legt man die nullwertige Gruppe

$$R \mp R \equiv 0$$

und bestimmt die gesuchte Gruppe

$$P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4 \equiv 0$$

durch Zusammenlegen der beiden nullwertigen Gruppen:

$$P_1 \mp P_2 \mp R \equiv 0 \text{ und } P_3 \mp P_4 \mp R \equiv 0.$$

3) Zwei der gegebenen Achsen p_1, p_2 schneiden sich im Punkte A , und ihre Ebene α wird von der dritten Achse p_3 im Punkte B geschnitten (Abb. 14). Der Punkt A und die Achse p_3 bestimmen eine

zweite Ebene β . Die Achsen, welche zugleich p_1, p_2, p_3 schneiden, bilden zwei Strahlenbüschel: den Büschel A in der Ebene β und den Büschel B in der Ebene α . Die Achse p_4 muß daher entweder dem Büschel A in der Ebene α oder dem Büschel B in der Ebene β angehören.

Im ersten Falle wird

P_3 gleich null; derselbe kommt daher hier nicht in Betracht. Im zweiten Falle, der in Abb. 14 dargestellt ist, verfährt man wie in den vorhergehenden Beispielen: Man legt auf die Gerade AB die nullwertige Streckengruppe

$$R \mp R \equiv 0$$

und legt die beiden Gruppen:

$$P_1 \mp P_2 \mp R \equiv 0 \text{ und } P_3 \mp P_4 \mp R \equiv 0$$

zusammen.

4) Die drei gegebenen Achsen p_1, p_2, p_3 schneiden sich nicht und bestimmen also eine Schar der Erzeugenden eines einfachen Hyperboloids. Die Achsen q , welche jede der drei Achsen p_1, p_2, p_3 schneiden, bilden die zweite Schar. Die Achse p_4 muß also der ersten Schar angehören. Um eine der nullwertigen Gruppen

$$P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4 \equiv 0$$

zu bilden, legt man durch eine der Achsen q irgend eine Ebene α

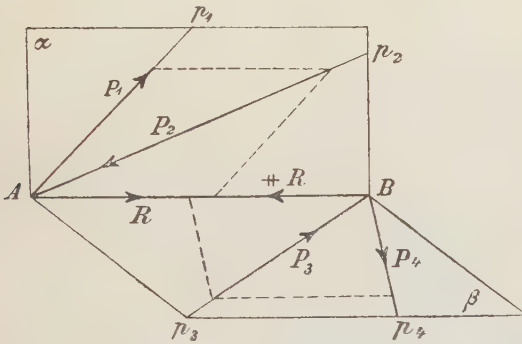


Abb. 14.

(Abb. 15), bezeichnet die Projektionen von p_1, p_2, p_3 auf α mit a_1, a_2, a_3 und die Schnitte der Ebenen $p_1 a_1, p_2 a_2, p_3 a_3$ mit der durch q senkrecht zu α gelegten Ebene β mit n_1, n_2, n_3 . Man

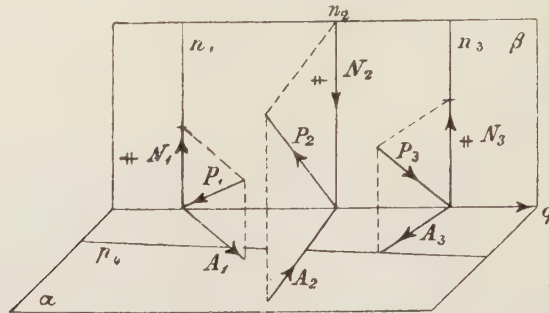


Abb. 15.

wählt dann die Strecke N_1 nach Belieben und bildet die fünf nullwertigen Streckengruppen:

$$\begin{aligned} N_1 \mp N_2 \mp N_3 &\equiv 0 \\ \mp N_1 \mp P_1 \mp A_1 &\equiv 0 \\ \mp N_2 \mp P_2 \mp A_2 &\equiv 0 \\ \mp N_3 \mp P_3 \mp A_3 &\equiv 0 \\ \mp A_1 \mp A_2 \mp A_3 \mp P_4 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Durch Zusammenlegen dieser fünf Gruppen entsteht die zu bestimmende nullwertige Streckengruppe

$$P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4 \equiv 0.$$

Die beschriebene Konstruktion ist nur zum Teil in Abb. 15 dargestellt.

21. Nullwertige Gruppen von fünf Strecken: $P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4 \mp P_5 \equiv 0$. Wir übergehen die besonderen Fälle, in denen zwei oder mehrere der gegebenen vier Achsen sich schneiden, und nehmen also an, daß die vier voneinander unabhängigen Achsen p_1, p_2, p_3, p_4 sich *nicht* schneiden. Da die Gruppe aus *fünf* Strecken besteht, so muß die fünfte Achse p_5 nach Abschnitt 17 *zwei* Bedingungen von der Form der Gleichungen (28) erfüllen, d. h. p_5 muß Nullachse von *zwei* Streckengruppen (Q) und (Q_1) sein, welche durch die vier gegebenen Achsen p_1, p_2, p_3, p_4 bestimmt sind. *In jeder Ebene α liegt also eine einzige Achse p_5 , welche diese Bedingung erfüllt, nämlich die Verbindungsachse der beiden Nullpunkte der Streckengruppen (Q) und (Q_1) in der Ebene α , und durch jeden Punkt A des Raumes geht ebenfalls eine Achse p_5 :*

die Schnittachse der beiden Nullebenen des Punktes A in bezug auf die Streckengruppen (Q) und (Q_1) . Hierbei ist abgesehen von den Sonderfällen, in welchen die beiden Nullpunkte der Ebene α oder die beiden Nullebenen des Punktes A zusammenfallen. Es kann also bei Bildung der nullwertigen Gruppe die Bedingung gestellt werden, daß die Achse p_5 durch einen willkürlich gewählten Punkt A gehen oder in einer willkürlich gewählten Ebene α liegen soll.

Erster Fall. Der Punkt A ist gegeben (Abb. 16). Man wählt nach Belieben eine Ebene β , die den Punkt A nicht enthält, be-

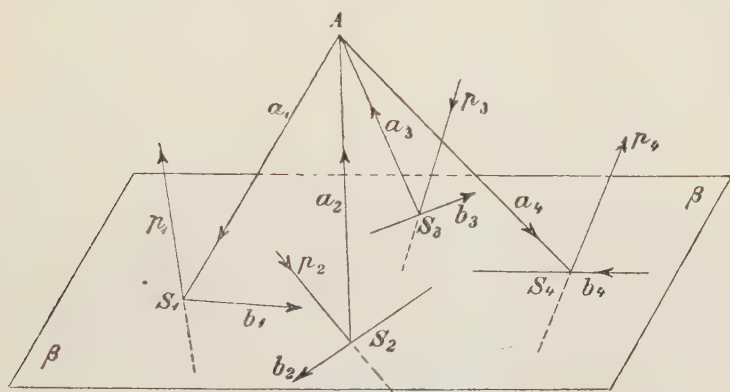


Abb. 16.

zeichnet mit S_1, S_2, S_3, S_4 die Schnittpunkte der Ebene β mit den gegebenen Achsen p_1, p_2, p_3, p_4 , ferner mit a_1, a_2, a_3, a_4 die Achsen, welche A mit den vier Schnittpunkten verbinden, und mit b_1, b_2, b_3, b_4 die Achsen, in welchen β von den vier Ebenen $p_1 a_1, p_2 a_2, p_3 a_3, p_4 a_4$ geschnitten wird. Man wählt dann nach Belieben die Strecke B_1 auf der Achse b_1 und bildet die sechs nullwertigen Gruppen:

$$\begin{aligned} B_1 \mp B_2 \mp B_3 \mp B_4 &\equiv 0 \\ \mp B_1 \mp P_1 \mp A_1 &\equiv 0 \\ \mp B_2 \mp P_2 \mp A_2 &\equiv 0 \\ \mp B_3 \mp P_3 \mp A_3 &\equiv 0 \\ \mp B_4 \mp P_4 \mp A_4 &\equiv 0 \\ \mp A_1 \mp A_2 \mp A_3 \mp A_4 \mp P_5 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Durch Zusammenlegen dieser sechs Gruppen entsteht die zu bestimmende nullwertige Gruppe

$$P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4 \mp P_5 \equiv 0.$$

Zweiter Fall. Die Ebene α ist gegeben. Durch die Schnittpunkte S_1, S_2, S_3, S_4 der gegebenen Achsen p_1, p_2, p_3, p_4 mit der

Ebene α legt man Achsen a_1, a_2, a_3, a_4 , die in irgend einem Punkte A außerhalb α , z. B. wie in Abb. 17 in einem unendlich fernen Punkte sich schneiden, und bezeichnet die Achsen, in welchen β von den Ebenen $p_1 a_1, p_2 a_2, p_3 a_3, p_4 a_4$ geschnitten wird, mit $b_1,$

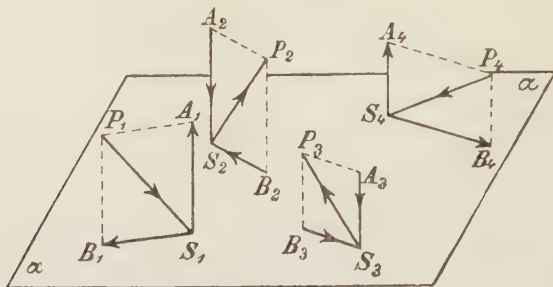


Abb. 17.

b_2, b_3, b_4 . Man wählt dann die Strecke A_1 auf der Achse a_1 nach Belieben und bildet die sechs nullwertigen Gruppen

$$\begin{aligned} & ++ A_1 ++ A_2 ++ A_3 ++ A_4 \equiv 0 \\ & A_1 \mp P_1 \mp B_1 \equiv 0 \\ & A_2 \mp P_2 \mp B_2 \equiv 0 \\ & A_3 \mp P_3 \mp B_3 \equiv 0 \\ & A_4 \mp P_4 \mp B_4 \equiv 0 \\ & ++ B_1 ++ B_2 ++ B_3 ++ B_4 \mp P_5 \equiv 0. \end{aligned}$$

Durch Zusammenlegen dieser sechs Gruppen entsteht die zu bestimmende nullwertige Gruppe:

$$P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4 \mp P_5 \equiv 0.$$

22. Nullwertige Gruppen von sechs Strecken: $P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4 \mp P_5 \mp P_6 \equiv 0$. Durch die Koordinaten der fünf gegebenen und voneinander unabhängigen Achsen p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 wird nach Abschnitt 17 eine Streckengruppe (Q) bestimmt, zu deren Nullachsen p_6 gehören muß. Diese Achsen bilden in jeder Ebene einen Büschel. Es kann daher die Bedingung gestellt werden, daß p_6 in einer willkürlich gewählten Ebene α liegen und durch einen Punkt A dieser Ebene gehen soll; die Aufgabe ist bestimmt, wenn nicht zufällig A mit dem Nullpunkt von α für die Gruppe (Q) zusammenfällt. Um in einem solchen Falle die nullwertige Gruppe (P) zu bilden, bestimmt man nach dem vorigen Abschnitt die beiden, aus je fünf Strecken bestehenden Gruppen:

$$(P') \equiv P'_1 \mp P'_2 \mp P'_3 \mp P'_4 \mp R' \equiv 0$$

$$(P'') \equiv P''_1 \mp P''_2 \mp P''_3 \mp P''_4 \mp R'' \equiv 0.$$

In diesen Ausdrücken bezeichnen P'_1 und P''_1 zwei Strecken der Achse p_1 , P'_2 und P''_2 zwei Strecken der Achse p_2 usw. und R' , R'' zwei Strecken in der Ebene α . Man kann, wie in Abb. 18 angedeutet ist, die Strecke R'' mit einer Zahl q multiplizieren und diese Zahl so wählen, daß die Achse p_6 der Strecke

$$P_6 \equiv R' \mp q R''$$

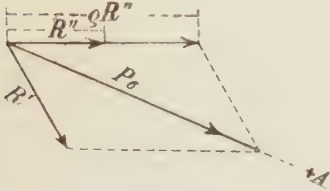


Abb 18.

durch den gegebenen Punkt A geht. Indem man sämtliche Strecken der Gruppe (P'') mit der Zahl q multipliziert und die hierdurch entstehende Gruppe $(q P'') \equiv 0$ mit der Gruppe

$$(P') \equiv 0$$

zusammenlegt, entsteht die zu bestimmende Gruppe:

$$(P') + (q P'') \equiv P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4 \mp P_5 \mp P_6 \equiv 0.$$

Es ist also:

$$P_1 = P'_1 + q P''_1, \quad P_2 = P'_2 + q P''_2, \quad P_3 = P'_3 + q P''_3, \\ P_4 = P'_4, \quad P_5 = q P''_5.$$

23. Nullwertige Gruppen von sieben Strecken: $P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4 \mp P_5 \mp P_6 \mp P_7 \equiv 0$. Wenn die sechs Achsen $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ voneinander unabhängig sind, und die Lage der Achse p_7 *willkürlich* gewählt wird, so genügen die sechs Bedingungen 27), um die relativen Werte der sieben Strecken zu bestimmen. Von sechs unabhängigen Achsen ist also jede andere Achse *abhängig*. Um für die sieben gegebenen Achsen die nullwertige Streckengruppe zu bestimmen, legt man durch eine der Achsen, z. B. p_7 , irgend eine Ebene α . Man bestimmt dann nach Abschnitt 21) die drei, aus je fünf Strecken bestehenden Gruppen:

$$(P') \equiv P'_1 \mp P'_2 \mp P'_3 \mp P'_4 \mp R' \equiv 0$$

$$(P'') \equiv P''_1 \mp P''_2 \mp P''_3 \mp P''_5 \mp R'' \equiv 0$$

$$(P''') \equiv P'''_1 \mp P'''_2 \mp P'''_3 \mp P'''_6 \mp R''' \equiv 0.$$

Wie im vorigen Abschnitt bezeichnen P'_1, P''_1, P'''_1 Strecken der Achse p_1 , P'_2, P''_2, P'''_2 Strecken der Achse p_2 usw., ferner R', R'', R''' drei Strecken in der Ebene α . Man bestimmt darauf die beiden Zahlen q', q'' aus der Bedingung, daß die Strecke

$$P_7 \equiv R''' \mp q'' R'' \mp q' R'$$

auf die gegebene Achse p_7 fällt. Multipliziert man nun alle Strecken der Gruppe (P') mit q' , alle Strecken der Gruppe (P'') mit q'' , so

entsteht durch Zusammenlegen der drei nullwertigen Gruppen $(q' P')$, $(q'' P'')$ und (P''') die zu bestimmende Gruppe:

$$(q' P') \dagger (q'' P'') \dagger (P''') \quad P_1 \dagger P_2 \dagger P_3 \dagger P_4 \dagger P_5 \dagger P_6 \dagger P_7.$$

Es ist demnach:

$$\begin{aligned} P_1 &= q' P'_1 + q'' P''_1 + P'''_1, & P_2 &= q' P'_2 + q'' P''_2 + P'''_2, \\ P_3 &= q' P'_3 + q'' P''_3 + P'''_3, & P_4 &= q' P'_4, \\ P_5 &= q'' P''_5, & P_6 &= P'''_6. \end{aligned}$$

24. Die Zusammensetzung einer gegebenen Gruppe von Strecken zu einer möglichst einfachen gleichwertigen Gruppe. Da die *graphische* Zusammensetzung der Strecken in der nächstfolgenden Abhandlung beschrieben wird, so können wir uns hier auf das rechnerische Verfahren beschränken. Eine gegebene Streckengruppe (P) wird durch ihre *sechs* Koordinaten X, Y, Z, X', Y', Z' bestimmt. Da eine Einzelstrecke nur *fünf* voneinander unabhängige Koordinaten hat, so ist es im allgemeinen nicht möglich, eine gegebene Gruppe (P) durch eine gleichwertige Einzelstrecke R zu ersetzen. Die Möglichkeit tritt nur dann ein, wenn die Bedingung 16):

$$X X' + Y Y' + Z Z' = 0$$

erfüllt ist. Die Einzelstrecke

$$R \quad (P)$$

wird dann die *Resultante* der Gruppe genannt. Die beiden wichtigsten und einfachsten Fälle ergeben sich, wenn alle Strecken der Gruppe in einer Ebene α liegen oder durch einen Punkt A gehen. Im ersten Fall kann man die Ebene der Koordinatenachsen x', y', z' auf die Ebene α legen; dann werden die drei Koordinaten X, Y, Z gleich null. Im zweiten Falle legt man den Schnitt der drei Koordinatenachsen x, y, z auf den Punkt A und macht dadurch die Koordinaten X', Y', Z' gleich null. In beiden Fällen ist demnach die Bedingung der Gleichung 16) erfüllt.

Hierher gehört auch der Fall, wenn alle Strecken der gegebenen Gruppe

$$U \equiv U_1 \dagger U_2 \dagger U_3 \dagger \dots$$

unendlich klein sind und in der unendlich fernen Ebene liegen, wie man am leichtesten erkennt, wenn man die Strecken $U_1, U_2, U_3 \dots$ als *Drehungspaare*, also als Parallelverschiebungen eines starren Körpers ansieht, deren Geschwindigkeiten mit $V_1, V_2, V_3 \dots$ bezeichnet werden mögen. Die resultierende Bewegung ist dann eben-

falls eine Parallelverschiebung mit der Geschwindigkeit, welche durch die geometrische Summe

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$$

dargestellt wird. Bezeichnen $U_1, U_2, U_3 \dots$ *Kräftepaare*, so sind ihre *Hauptmomentenstrecken* $V_1, V_2, V_3 \dots$ geometrisch zu summieren.

Zwei Einzelstrecken K_1, K_2 werden nach Abschnitt 14 durch je fünf Koordinaten $X_1, Y_1, Z_1, X'_1, Y'_1$ und $X_2, Y_2, Z_2, X'_2, Y'_2$ bestimmt, und die beiden fehlenden Koordinaten sind dann durch die Gleichungen:

$$Z'_1 = - \frac{X_1 X'_1 + Y_1 Y'_1}{Z_1}, \quad Z'_2 = - \frac{X_2 X'_2 + Y_2 Y'_2}{Z_2}$$

gegeben. Die sechs Bedingungen der Gleichwertigkeit

$$(P) = K_1 + K_2$$

lauten nach Abschnitt 11:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_1 + X_2, & Y &= Y_1 + Y_2, & Z &= Z_1 + Z_2 \\ X' &= X'_1 + X'_2, & Y' &= Y'_1 + Y'_2, & Z' &= Z'_1 + Z'_2. \end{aligned} \right\} (30)$$

Die Aufgabe: eine gegebene Streckengruppe (P) durch zwei Strecken zu ersetzen, ist daher *unbestimmt* und läßt unendlich viele Lösungen zu. Sie wird bestimmt, wenn *vier* der unbekannten Koordinaten oder wenn *vier* voneinander unabhängige Bedingungen gegeben sind, die durch Gleichungen zwischen den Koordinaten der Strecken K_1, K_2 ausgedrückt werden können. Die folgenden Abschnitte enthalten die wichtigsten Fälle.

25. Erstes Beispiel. Gegeben ist die Lage der Achse k_1 . Zu bestimmen sind dann außer dem Wert der Strecke K_1 die fünf Koordinaten der Strecke K_2 . Man ersieht hieraus, daß durch die gegebene Lage der Achse k_1 die Lage der zugehörigen Achse k_2 bestimmt wird. Daher nennt man in bezug auf die gegebene Streckengruppe (P) die beiden Achsen k_1, k_2 *konjugierte Achsen* und die beiden Strecken K_1, K_2 *konjugierte Strecken*.

Die gegebenen Koordinaten der Achse k_1 werden mit $x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1$ bezeichnet. Um zunächst den Wert der Strecke K_1 zu bestimmen, hat man zu beachten, daß aus der Gleichwertigkeit der Gruppen:

$$K_1 + K_2 \equiv (K) \equiv (P)$$

nach Gleichung 12) folgt:

$$[(K), (K)] = 2 [K_1, K_2] = [(P), (P)] = 2 \text{ cm } (XX' + YY' + ZZ').$$

Ferner ist:

$$[k_1, K_2] = [k_1(K)] - [k_1 K_1] = [k_1(K)] = [k_1(P)]$$

und also nach Gleichung 12):

$$[K_1, K_2] = K_1 [k_1, K_2] = K_1 (x_1 X' + y_1 Y' + z_1 Z' + x'_1 X + y'_1 Y + z'_1 Z) \text{ 1 cm.}$$

Folglich hat die Strecke K_1 den Wert:

$$K_1 = \frac{XX' + YY' + ZZ'}{x_1 X' + y_1 Y' + z_1 Z' + x'_1 X + y'_1 Y + z'_1 Z}. \quad (31)$$

Darauf ergeben sich die Koordinaten der Strecke K_2 aus den Gleichungen 30):

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= X - x_1 K_1, & Y_2 &= Y - y_1 K_1, & Z_2 &= Z - z_1 K_1, \\ X'_2 &= X' - x'_1 K_1, & Y'_2 &= Y' - y'_1 K_1, & Z'_2 &= Z' - z'_1 K_1. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

26. Die wichtigsten Eigenschaften der konjugierten Achsen und Strecken einer Gruppe (P).

1. Jede Achse q , die zwei konjugierte Achsen k_1, k_2 schneidet, ist eine *Nullachse* der Gruppen (P) und (K), weil die beiden Momente $[q, K_1]$ und $[q, K_2]$ gleich null sind.

2. Jede Ebene α , welche die Achse k_1 enthält, wird von der konjugierten Achse k_2 in ihrem Nullpunkt A geschnitten. Denn jede Achse q , die in der Ebene α liegt und durch den Punkt A geht, schneidet beide Achsen k_1 und k_2 .

3. Die Nullebene eines jeden Punktes A , der auf der Achse k_2 liegt, enthält die Achse k_1 .

4. Sind $(k_1, k_2), (k_3, k_4), (k_5, k_6) \dots$ konjugierte Achsenpaare, so liegen alle Achsen q , die durch einen Punkt A gehen und die Achsen je eines Paares schneiden, in einer Ebene, der Nullebene des Punktes A .

5. Alle Achsen $k_1, k_3, k_5 \dots$, die durch einen Punkt A gehen, haben konjugierte Achsen $k_2, k_4, k_6 \dots$, die in einer durch A gehenden Ebene, der Nullebene des Punktes A , liegen.

6. Wir bezeichnen mit G die *geometrische Summe* der Streckengruppe (P) und mit γ eine zu G senkrecht gestellte Ebene. Projiziert man zwei konjugierte Strecken der Gruppe (P), z. B. die Strecken K_1 und K_2 , rechtwinklig auf die Ebene γ , so sind die beiden Projektionen parallel, gleich groß und dem Sinne nach einander entgegengesetzt, weil

$$K_1 \pm K_2 \equiv G$$

ist.

7. Alle Achsen 1, 2, 3 . . . , die den Kanten (1), (2), (3) . . . eines gegebenen Polyeders I konjugiert sind, bilden die Kanten eines zweiten Polyeders II, das dem Polyeder I zugleich eingeschrieben und umschrieben ist. Denn einer jeden Ecke des einen Polyeders entspricht im anderen Polyeder ein Polygon, dessen Ebene durch jene Ecke geht. Solche *reziproke Polyeder* kommen in der Theorie des Fachwerks zur Anwendung (Abhandlung XII, Abschnitt 7).

8. Die Abb. 19 und 20 zeigen die Projektionen von zwei reziproken Polyedern auf die zur geometrischen Summe G senk-

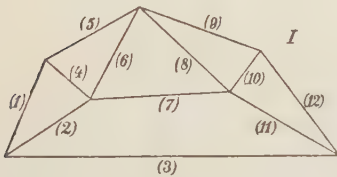


Abb. 19.

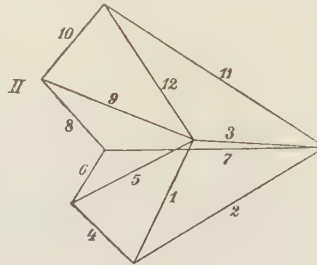


Abb. 20.

recht gestellte Ebene γ . Um die Zeichnung deutlicher zu machen und nur die Eigenschaften zu zeigen, die hier in Betracht kommen, sind die beiden Projektionen parallel auseinander gezogen. Das eine Polyeder ist also dem anderen *nicht* um- und eingeschrieben. Die gegenseitigen Beziehungen der beiden Projektionen bestehen in folgenden Eigenschaften:

Den Kanten (1), (2), (3), (4) . . . des Polyeders I entsprechen die gleichgerichteten Kanten 1, 2, 3, 4 . . . des Polyeders II. Den Ecken ((1), (2), (3)), ((1), (4), (5)), ((2), (4), (6), (7)), ((5), (6), (8), (9)) . . . des Polyeders I entsprechen die Seitenpolygone (1, 2, 3), (1, 4, 5), (2, 4, 6, 7), (5, 6, 8, 9) . . . des Polyeders II. Ebenso entsprechen den Ecken (1, 2, 4), (2, 3, 11, 7), (1, 5, 9, 12, 3) . . . des Polyeders II die Polygone ((1), (2), (4)), ((2), (3), (11), (7)), ((1), (5), (9), (12), (3)) . . . des Polyeders I.

Die *Größen* der konjugierten Strecken kommen bei diesen Beziehungen nicht in Betracht.

9. Das Moment

$$[K_1, K_2] = K_1 K_2 [k_1, k_2]$$

hat für alle konjugierten Streckenpaare einer Gruppe (P) dieselbe Größe $\frac{1}{2} [(P), (P)]$. Diese Größe kann dargestellt werden durch

den sechsfachen Rauminhalt des Tetraeders $ABCD$, zu dessen Kanten die beiden Strecken K_1 und K_2 gehören.

In den Abb. 21 und 22 bezeichnen a und α die Größen, welche nach Abschnitt 6 das Moment der beiden Achsen k_1, k_2 bestimmen:

$$[k_1, k_2] = a \sin \alpha.$$

Die Aufrißebene β ist also parallel zu den beiden Achsen k_1, k_2 gestellt. Die Grundfläche des Tetraeders hat die Größe

$$ABC = \frac{1}{2} K_1 a,$$

während seine Höhe

$$D'F = K_2 \sin \alpha$$

ist. Der Rauminhalt ist folglich:

$$ABCD = \frac{1}{6} K_1 K_2 a \sin \alpha = \frac{1}{6} [K_1, K_2].$$

Diese Größe ändert sich nicht, wenn die Strecken K_1, K_2 auf ihren Achsen nach Belieben verschoben werden.

27. Zweites Beispiel. Gegeben sind eine Ebene α und ein nicht in ihr liegender Punkt A . Die Achse k_1 soll durch den Punkt A gehen, und die Achse k_2 in der Ebene α liegen. Man wählt ein Koordinatentetraeder, dessen Achsen x, y, z im Punkte A sich schneiden, und dessen Achsen x', y', z' in der Ebene α liegen. Dann sind gegeben: drei Koordinaten der Strecke K_1 :

$$X'_1 = Y'_1 = Z'_1 = 0$$

und drei Koordinaten der Strecke K_2 :

$$X_2 = Y_2 = Z_2 = 0.$$

Die übrigen sechs Koordinaten ergeben sich aus den Gleichungen 30):

$$\begin{array}{lll} X_1 = X, & Y_1 = Y, & Z_1 = Z, \\ X'_2 = X', & Y'_2 = Y', & Z'_2 = Z'. \end{array}$$

Demnach ist:

$$\begin{array}{l} K_1 \equiv X \mp Y \mp Z \\ K_2 \equiv X' \mp Y' \mp Z'. \end{array}$$

Abb. 21.

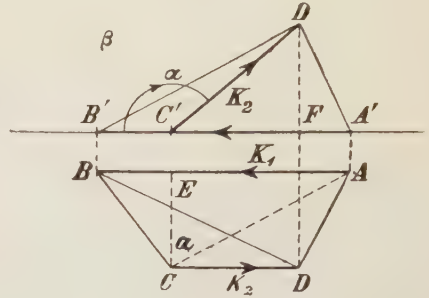


Abb. 22.

28. Drittes Beispiel. Die Achse k_1 geht durch einen gegebenen Punkt A und die Achse k_2 liegt unendlich fern. Wir wählen das in Abb. 6 dargestellte Koordinatentetraeder und legen die Ecke A auf den gegebenen Punkt. Gegeben sind dann drei Koordinaten der Strecke K_1 :

$$X'_1 = Y'_1 = Z'_1 = 0$$

und nach den Gleichungen 14) die drei Projektionen der Strecke K_1 auf die Achsen x, y, z :

$$\begin{aligned} X_1 &= X + (Y' - Z') \sqrt{\frac{1}{2}} \\ Y_1 &= Y + (Z' - X') \sqrt{\frac{1}{2}} \\ Z_1 &= Z + (X' - Y') \sqrt{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Die sechs Koordinaten der unendlich kleinen und unendlich fernen Strecke K_2 werden darauf durch die Bedingungen der Gleichwertigkeit:

$$(P) = K_1 \neq K_2$$

bestimmt:

$$\begin{aligned} X_2 &= X - X_1 = (Z' - Y') \sqrt{\frac{1}{2}} \\ Y_2 &= Y - Y_1 = (X' - Z') \sqrt{\frac{1}{2}} \\ Z_2 &= Z - Z_1 = (Y' - X') \sqrt{\frac{1}{2}} \\ X'_2 &= X', \quad Y'_2 = Y', \quad Z'_2 = Z'. \end{aligned}$$

29. Viertes Beispiel. Die Ebene der unendlich kleinen und unendlich fernen Strecke K_2 soll rechtwinklig zur Achse k_1 gestellt sein. Die Aufgabe ist *bestimmt*, weil außer den fünf voneinander unabhängigen Koordinaten der Strecke K_1 nur noch das *Hauptmoment* $[k_1, K_2]$ der unendlich fernen Strecke K_2 unbekannt ist. Eine jede unendlich kleine Bewegung (P) eines starren Körpers besteht demnach aus einer Drehung um eine Achse k_1 mit der Drehgeschwindigkeit K_1 verbunden mit einer Parallelverschiebung in der Richtung der Drehachse k_1 mit der Geschwindigkeit $[k_1, K_2]$. Sie ist also eine unendlich kleine *Schraubenbewegung*, die bestimmt wird durch die Lage der Schraubenachse k_1 , die Drehgeschwindigkeit K_1 und die Schubgeschwindigkeit $[k_1, K_2]$ der Schraubenachse. Die Bewegung kann dargestellt werden durch *zwei*

Strecken auf der Schraubenachse k_1 : durch die Drehgeschwindigkeit K_1 und die Schubgeschwindigkeit:

$$S = [k_1, K_2]$$

der Schraubenachse. Die Bewegung ist die einer rechtsgängigen oder einer linksgängigen Schraube, je nachdem die beiden Strecken K_1 und S dem Sinne nach gleich oder einander entgegengesetzt sind. Wir geben der Achse k_1 den Sinn der Strecke K_1 . Das positive Vorzeichen der Schubgeschwindigkeit S bestimmt also eine *rechtsgängige* Schraubenbewegung.

Da die Strecke K_2 gleich null ist, so wird, wie im dritten Beispiel, K_1 nach Größe, Richtung und Sinn durch die geometrische Summe G der Streckengruppe (P) bestimmt. Daher haben die Projektionen K_x, K_y, K_z der Strecke K_1 nach den Gleichungen 14) die Werte:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= G_x = X + (Y' - Z') \sqrt{\frac{1}{2}} \\ K_y &= G_y = Y + (Z' - X') \sqrt{\frac{1}{2}} \\ K_z &= G_z = Z + (X' - Y') \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

woraus folgt:

$$K_1 = + \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}. \quad (34)$$

Das Vorzeichen von K_1 ist positiv, weil diese Strecke den Sinn der Achse k_1 hat. Wir bestimmen ferner die Schubgeschwindigkeit S der Schraubenachse aus Gleichung 12):

$$[(P), (P)] = 2 K_1 [k_1, K_2] = 2 \text{ cm } [X X' + Y Y' + Z Z']$$

$$S = [k_1, K_2] = 1 \text{ cm } \frac{X X' + Y Y' + Z Z'}{K_1}. \quad (35)$$

Da die beiden Strecken K_1 und S auf *einer* Achse liegen, so werden die Projektionen S_x, S_y, S_z der Schubgeschwindigkeit S bestimmt durch die Proportionen:

$$S_x : S_y : S_z : S = K_x : K_y : K_z : K_1. \quad (36)$$

S_x, S_y, S_z bezeichnen nach Abschnitt 15 die Schubgeschwindigkeiten $X'_2 \cdot 1 \text{ cm}$, $Y'_2 \cdot 1 \text{ cm}$, $Z'_2 \cdot 1 \text{ cm}$, die den Achsen x, y, z durch die Parallelverschiebung erteilt werden. Daher ist

$$X'_2 = \frac{S_x}{1 \text{ cm}}, \quad Y'_2 = \frac{S_y}{1 \text{ cm}}, \quad Z'_2 = \frac{S_z}{1 \text{ cm}}, \quad (37)$$

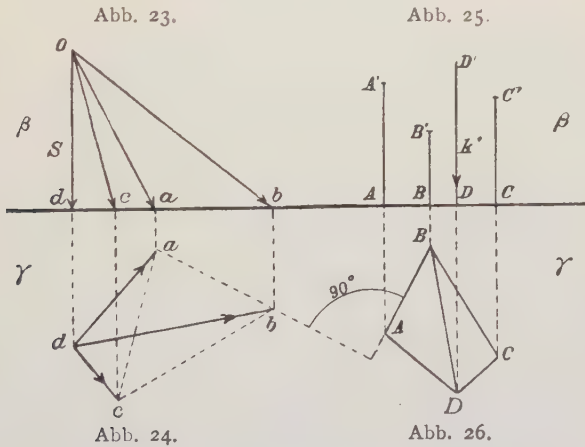
während die drei anderen Koordinaten der unendlich kleinen Strecke K_2 nach den Gleichungen 21) bestimmt werden:

$$\begin{aligned} X_2 &= (Z'_2 - Y'_2) \sqrt{\frac{1}{2}}, & Y_2 &= (X'_2 - Z'_2) \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ Z_2 &= (Y'_2 - X'_2) \sqrt{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Endlich ergeben sich die Koordinaten der Strecke K_1 aus den Gleichungen 30).

Wenn die Strecken P und K *Kräfte* bezeichnen, die auf einen starren Körper wirken, so ändert sich an den vorstehenden Beziehungen nichts. Auch die Bezeichnung von k_1 als *Schraubenachse* der Kräftegruppe (P) kann beibehalten werden, obgleich die Bezeichnung *Zentralachse* gebräuchlicher ist. An die Stelle der Drehgeschwindigkeiten, der Schubgeschwindigkeiten und der Punkteschwindigkeiten treten die Kräfte, die Momente und die Hauptmomente der Kräftegruppe.

30. Eigenschaften der gleichzeitigen Geschwindigkeiten der Punkte eines starren Körpers. Zieht man (Abb. 23 und 24) von irgend einem Punkte o aus die Strecken $oa, ob, oc, od \dots$,



welche die gleichzeitigen Geschwindigkeiten der Körperpunkte $A', B', C', D' \dots$ nach Größe, Richtung und Sinn darstellen, so liegen die Endpunkte $a, b, c, d \dots$ aller dieser Geschwindigkeitsstrecken in einer zur Schraubenachse der unendlich kleinen Bewegung normal gestellten Ebene γ . Denn die Geschwindigkeit oa eines jeden Körperpunktes A' läßt sich zerlegen in die Schubgeschwindigkeit od

der Schraubenachse und in eine zweite zur Schraubenachse senkrecht gerichtete Komponente da . Durch die Ebene abc ist sonach die Richtung od der Schraubenachse und Größe und Sinn ihrer Schubgeschwindigkeit od bestimmt. In den Abb. 25 und 26 sind die Körperpunkte A', B', C' im Grundriß und Aufriß dargestellt, und $D'D$ bezeichnet die zur Ebene γ normal gerichtete Schraubenachse. Die Strecken da, db, dc (Abb. 24) bestimmen die Geschwindigkeitskomponenten der Körperpunkte A', B', C' parallel zur Ebene γ . Diese Geschwindigkeitsstrecken sind zu den Strecken DA, DB, DC senkrecht gerichtet und den genannten Strecken proportional. Demnach sind die Vierecke $dabc$ und $DABC$ in den Abb. 24 und 26 geometrisch ähnlich und gegeneinander um 90° gedreht.

Aus den gleichzeitigen Geschwindigkeiten oa, ob, oc dreier Körperpunkte bestimmt man demnach die augenblickliche Schraubenbewegung des Körpers auf folgendem Wege. Nachdem in den Abb. 23 und 24 Größe, Richtung und Sinn der Schubgeschwindigkeit S der Schraubenachse durch die Strecke od ermittelt worden sind, werden die drei Körperpunkte A', B', C' (Abb. 25) rechtwinklig auf die Ebene γ projiziert. Die Bedingung

$$DABC \sim dabc$$

bestimmt dann den Schnittpunkt D der Schraubenachse k_1 mit der Ebene γ . Die Drehgeschwindigkeit K_1 des Körpers um die Schraubenachse ergibt sich schließlich durch einen der Werte

$$K_1 = \frac{da}{DA} = \frac{db}{DB} = \frac{dc}{DC}.$$

Der Sinn der Geschwindigkeiten bestimmt den Sinn der Drehung.

31. Einige Eigenschaften der Schraubenbewegung. Die Längsstrecke p auf der Schraubenachse, die durch den Quotienten

$$p = \frac{S}{K_1} \quad (39)$$

aus der Schubgeschwindigkeit S und der Drehgeschwindigkeit K_1 der Schraubenbewegung bestimmt wird, heißt der *Parameter* der Bewegung (P). Wäre diese Bewegung nicht unendlich klein, sondern von endlicher Größe, so würde die Dauer einer vollen Umdrehung der Schraube $\frac{2\pi}{K_1}$ Sekunden betragen. Der Schubweg der Schraubenachse während einer Umdrehung oder die *Steigung der Schraube* hat demnach die Größe

$$S \frac{2\pi}{K_1} = 2p\pi. \quad (40)$$

Die *Schubgeschwindigkeit irgend einer Achse* q , deren Lage gegen die Schraubenachse k_1 nach Abschnitt 6 durch die Größen a und α bestimmt wird, hat den Wert

$$[q, (P)] = K_1 (a \sin \alpha + p \cos \alpha); \quad (41)$$

denn

$$[q, K_1] = K_1 a \sin \alpha$$

ist die Schubgeschwindigkeit der Achse q infolge der Drehung K_1 , während die Parallelverschiebung S der Achse q die Schubgeschwindigkeit

$$S \cos \alpha = K_1 p \cos \alpha$$

erteilt. In Gleichung 41) sind die Vorzeichen von p , $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ zu beachten. Die Größen a und K_1 haben stets das positive Vorzeichen.

Alle Nullachsen der Streckengruppe (P) sind durch die Gleichung

$$a \sin \alpha + p \cos \alpha = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{p}{a} \quad (42)$$

bestimmt.

Jede Achse, welche die Schraubenachse rechtwinklig schneidet, ist eine Nullachse der Streckengruppe; denn Gleichung 42) fordert

$$\operatorname{tg} \alpha = \infty,$$

wenn

$$a = 0$$

ist.

Jede Achse q_1 , die mit dem kürzesten Abstände b zwischen zwei konjugierten Achsen k_3 , k_4 zusammenfällt, schneidet die Schraubenachse k_1 rechtwinklig. Denn diese Achse q_1 ist rechtwinklig gerichtet zu den Strecken K_3 , K_4 , folglich auch zur geometrischen Summe K_1 jener beiden Strecken, und da q_1 eine Nullachse ist, so muß sie die Schraubenachse k_1 schneiden.

Bezeichnet q_2 eine zweite Achse, die mit dem kürzesten Abstände c zwischen zwei anderen konjugierten Achsen k_5 , k_6 zusammenfällt, so fällt die Schraubenachse k_1 mit dem kürzesten Abstände zwischen q_1 und q_2 zusammen. Denn die Schraubenachse k_1 wird von den beiden Achsen q_1 und q_2 rechtwinklig geschnitten.

32. Die Bedingungen des Gleichgewichtes eines starren Körpers bei beschränkter Bewegungsfreiheit. Wenn ein

starrer Körper A volle Bewegungsfreiheit hat, so kann jede seiner unendlich kleinen Bewegungen (R) zusammengesetzt werden aus Drehungen um *sechs* voneinander unabhängige Achsen oder aus sechs voneinander unabhängigen Schraubenbewegungen $(R_1), (R_2) \dots (R_6)$, d. h. man kann die sechs Zahlen $\varrho_1, \varrho_2 \dots \varrho_6$ so wählen, daß die Bedingung

$$(R) \equiv \varrho_1 (R_1) \mp \varrho_2 (R_2) \mp \dots \mp \varrho_6 (R_6)$$

erfüllt wird; denn die sechs Bedingungen der Gleichwertigkeit bestimmen die sechs unbekannten Zahlen ϱ . Die sechs Bewegungen $(R_1), (R_2) \dots (R_6)$ sind *unabhängig* voneinander, wenn es unmöglich ist, die Ruhebedingung

$$0 \equiv \varrho_1 (R_1) \mp \varrho_2 (R_2) \mp \dots \mp \varrho_6 (R_6)$$

zu erfüllen. Von einem Körper mit *voller* Bewegungsfreiheit sagt man daher, seine Bewegung hat *sechs* Freiheitsgrade, d. h. er kann sechs voneinander unabhängige und folglich *alle* möglichen Bewegungen ausführen. In einem solchen Falle sind *sechs* Gleichungen nötig, um die Bedingungen des Gleichgewichts der auf den Körper wirkenden Kräfte (P) auszudrücken. Man kann diesen sechs Bedingungen die Form geben:

$$0 = [(P), (R_1)] = [(P), (R_2)] = \dots = [(P), (R_6)],$$

d. h. die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräftegruppe (P) muß bei jeder der sechs unendlich kleinen und voneinander unabhängigen Bewegungen gleich null sein.

Die Bewegung des Körpers A kann *beschränkt* werden durch Berührung mit anderen starren und festliegenden Körpern. Wir nehmen z. B. an, der Körper A sei genötigt, mit *vier* anderen Körpern A_1, A_2, A_3, A_4 in Berührung zu bleiben, die Berührung sei *reibungslos* und die vier Achsen s_1, s_2, s_3, s_4 , welche durch die Berührungspunkte senkrecht zu den unendlich kleinen Berührungsflächen gelegt werden, seien *unabhängig* voneinander. Bei jeder dann noch möglichen Bewegung des Körpers A haben die starr mit ihm verbundenen Achsen s keine Schubgeschwindigkeit, sie sind also *Nullachsen* jeder möglichen Bewegung. Es bleiben in diesem Falle, wie im Abschnitt 21 sich ergab, nur

$$6 - 4 = 2$$

voneinander unabhängige Bewegungen (Q) und (Q_1) übrig, welche durch die vier Nullachsen s_1, s_2, s_3, s_4 bestimmt sind. Der Körper A hat also nur *zwei* Freiheitsgrade. Zu den Kräften (P) , die auf den Körper A einwirken, kommen dann noch die vier Stützkkräfte $S_1, S_2,$

S_3, S_4 , welche von den Körpern A_1, A_2, A_3, A_4 auf den Körper A in den Achsen s_1, s_2, s_3, s_4 übertragen werden. Zwischen den sämtlichen auf den Körper A einwirkenden Kräften (P) und (S) bleiben selbstverständlich die *sechs* Gleichgewichtsbedingungen bestehen. Aber unter diesen sechs Bedingungen lassen sich nur *zwei*, nämlich *ebensoviele* wie *Freiheitsgrade vorhanden sind*, bilden, die nur die Kräfte (P) und *nicht* die Stützkkräfte (S) enthalten. Es sind dies die Gleichungen:

$$[(P), (Q)] = 0, \quad [(P), (Q_1)] = 0,$$

aus welchen die Kräfte (S) herausfallen, weil die Schubgeschwindigkeiten der Achsen s in den Bewegungen (Q) und (Q_1) gleich null sind.

33. Literarische Notizen.

Der wesentliche Inhalt der vorstehenden Abhandlung findet sich in meinem Aufsatz: *Theorie der Streckensysteme*, Zivilingenieur 1888, S. 691.

Zu weiteren Studien sind besonders zu empfehlen:

Fiedler, Geometrie und Geomechanik. Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 1876, S. 186; diese Abhandlung enthält eine ausführliche Würdigung der einschlägigen umfangreichen Literatur.

Poinsot, Eléments de Statique, achte Auflage, Paris 1842; enthält als Anhang die beiden wichtigen Abhandlungen: *Sur la composition des moments et des aires*, und *Théorie nouvelles de la rotation des corps*, die auch im *Journal de l'école polytechnique* 1806 und 1834 veröffentlicht wurden.

Möbius, Lehrbuch der Statik, 1837; Gesammelte Werke, Bd. 3; besonders wichtig ist Kapitel VI, die *Theorie der Momente*.

Chasles, Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide dans l'espace. Comptes rendus 1843 p. 1420.

Die hier ohne Beweis mitgeteilten Eigenschaften werden bewiesen von:

E. de Jonquières, Mélanges de géométrie pure, Paris 1856.

Plücker, Neue Geometrie des Raumes, 1868; insbesondere die Linienkomplexe des ersten Grades, S. 1—148.

Ball, The Theorie of Screws, Dublin 1876.

Schell, Theoretische Mechanik, 1879; insbesondere erster Teil: Geometrie der Streckensysteme.

E. Timerding, Geometrische Elemente der Statik und Kinematik des starren Körpers, Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, 2.

In den Werken von Schell und Timerding finden sich ausführliche Literaturangaben.

Auf einzelne Abschnitte der vorstehenden Abhandlung beziehen sich folgende Notizen:

Möbius verdanken wir:

die Begriffe *Achse* und *Strecke*, Gesammelte Werke, Bd. I, S. 25, die Darstellung der Drehgeschwindigkeit eines Körpers durch eine Strecke, Bd. I, S. 552,

den Begriff der *Schubgeschwindigkeit* einer Achse und ihre Bestimmung durch die Projektion der Geschwindigkeit eines ihrer Punkte, Bd. I, S. 558 und Bd. III, S. 265,

die Eigenschaften der Geschwindigkeitskugeln, der Nullachsen und der Nullebenen der Körperpunkte, Bd. III, S. 106 und 118,

endlich die Darstellung der Schubgeschwindigkeit einer Achse als das Moment der Drehgeschwindigkeitsstrecke; Bd. I, S. 558 und Bd. III, S. 265.

Der Satz, daß unendlich kleine Drehungen eines starren Körpers sich zusammensetzen wie Kräfte, wurde in die deutsche Literatur eingeführt durch *Möbius*, Bd. I, S. 545 und Bd. III, S. 263. Nach einer Notiz von ihm, entnommen aus *Ide, System der reinen und angewandten Mechanik fester Körper*, ist dieser Satz sehr alt und stammt aus Italien.

Die tetraedrischen Koordinaten in der von uns benutzten Form wurden eingeführt durch *Zeuthen*, Notes sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace, Mathematische Annalen 1869, S. 432; in einer anderen Form von *Cayley*, On the six coordinates of a line, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, T. XI, p. 290.

Die Poinsoische Darstellung einer Kräftegruppe durch sechs Koordinaten, nämlich durch *drei* endliche Kräfte in den Achsen eines Koordinatensystems und drei unendlich kleine Kräfte in den unendlich fernen Geraden der Koordinatenebenen, unterscheidet sich von der Cayley-Zeuthenschen übrigens nur durch die Größe des Koordinatentetraeders. Sowohl Zeuthen als auch Cayley bestimmen die Momente der Streckengruppen durch ihre Koordinaten.

Die Bedeutung des Momentes zweier Streckengruppen als Arbeitsgeschwindigkeit erkannte *Klein*, Notiz, betreffend den Zu-

sammenhang der *Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper*, Mathematische Annalen, 1871, S. 413.

Die Abhängigkeit der Achsen voneinander behandelte zuerst *Möbius*, Bd. III, S. 137.

Eine graphische Lösung der im Abschnitt 22 behandelten Aufgabe findet sich in meinem Aufsatz: *Eine Aufgabe der graphischen Statik*, Zivilingenieur 1889, S. 237.

Die Eigenschaften der konjugierten Achsen und Strecken, die zum Teil bereits von *Möbius* abgeleitet waren, Bd. III, S. 118, bilden die Grundlage der obengenannten Abhandlung von *Chasles*.

Die Bedingung, unter der eine Kräftegruppe durch eine gleichwertige Einzelkraft ersetzt werden kann, ist schon von *Poinsot* angegeben worden. Von *Poinsot* wurden auch die Ersetzung einer Kräftegruppe durch eine Einzelkraft in Verbindung mit einem zur Einzelkraft normal gestellten Kräftepaar und die wichtigsten Eigenschaften der Zentralachse entdeckt; *Eléments de statique*, p. 76 und 136.

Nachdem fast gleichzeitig von *d'Alembert*, *Traité de la précession des équinoxes*, 1749, und von *Euler*, *Découverte d'un nouveau principe de Mécanique*, *Mémoires de l'Académie de Berlin* 1750, gefunden war, daß jede unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt eine *Drehung* um eine durch diesen Punkt gehende Achse bildet, wurde die Darstellung einer jeden unendlich kleinen Bewegung eines Körpers als Schraubenbewegung zuerst von dem Italiener *Guilio Mozzi*, *Discorso matematico sopra il rotamento dei corpi*, Napoli 1763, nachgewiesen. Diese Entdeckung blieb unbeachtet und wurde viel später von *Cauchy*, *Exercices de Mathématiques* 1827, T. II p. 87, noch einmal gemacht.

Abhandlung II.

Die Grundzüge der graphischen Statik.

1. Einleitende Bemerkungen. Die graphische Statik im weiteren Sinne löst statische Aufgaben auf zeichnerischem Wege. Die Methoden, die hierbei regelmäßig oder doch häufig zur Anwendung kommen, bilden den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung. In erster Linie gehören hierher die Regeln für die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräftegruppen und für die Bildung von Gleichgewichtsgruppen. Diese Aufgaben stehen in engem Zusammenhange miteinander. In (I, 16), d. h. im Abschnitt 16 der Abhandlung I, wurde für die Darstellung der Tatsache, daß ein starrer Körper unter Einwirkung einer Kräftegruppe im Gleichgewicht sich befindet, der Ausdruck

$$P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4 \mp P_5 \equiv 0$$

eingeführt. Da die Bedeutung desselben darin besteht, daß bei jeder unendlich kleinen Bewegung des starren Körpers die *algebraische Summe* der Arbeitsgeschwindigkeiten aller Kräfte der Gruppe gleich null ist, so darf ein solcher Ausdruck nach den Regeln der algebraischen Summierung umgeformt werden. Es folgt z. B. daraus:

$$++ P_5 \equiv P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4$$

und

$$P_1 \mp P_3 \mp P_5 \equiv ++ P_2 ++ P_4.$$

Die *gewendete* Kraft P_5 ist also die Resultante der vier Kräfte P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , und die beiden Kräftegruppen, die von P_1 , P_3 , P_5 und von den *gewendeten* Kräften P_2 , P_4 gebildet werden, sind *gleichwertig*. Es folgt ferner, daß die Reihenfolge der Zusammensetzung gleichgültig ist.

Bei der Zusammensetzung von Kräftegruppen und bei der Bildung von Gleichgewichtsgruppen kommen nur Lage, Größe und Sinn der Kräfte, dagegen *nicht* die Lage der Angriffspunkte auf

den Kraftachsen in Betracht; denn je zwei Kräfte auf einer Geraden, die nach Größe und Sinn übereinstimmen, sind gleichwertig (I, 2, 3, 10).

Mit Rücksicht auf die Einfachheit und Deutlichkeit der Zeichnungen empfiehlt es sich, bei allen graphostatischen Darstellungen den *Lageplan* von dem *Kräfteplan* zu trennen, also die Lage der Kraftachsen in *einer* Zeichnung, dem Lageplan, und Größe, Richtung und Sinn der Kräfte in einer *zweiten* Zeichnung, dem Kräfteplan, zur Anschauung zu bringen. In den Abbildungen tragen die Lagepläne und die Kräftepläne die abgekürzten Bezeichnungen *L* und *K*.

Aus dem Inhalt der Abhandlung I werden ferner die folgenden Sätze entnommen.

Die rechtwinkligen Projektionen von zwei gleichwertigen Kräftegruppen auf irgend eine Ebene bilden wieder zwei gleichwertige Gruppen (I, 13).

Gleichwertige Kräftegruppen haben gleiche geometrische Summen (I, 13).

Die rechtwinklige Projektion einer Gleichgewichtsgruppe auf irgend eine Ebene bildet wieder eine Gleichgewichtsgruppe (I, 16).

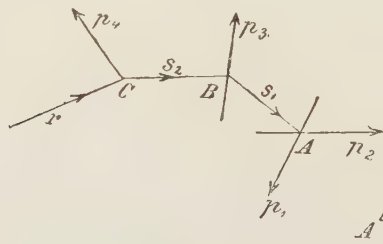
Die geometrische Summe einer Gleichgewichtsgruppe hat die Größe null (I, 16).

A. Ebene Kräftegruppen.

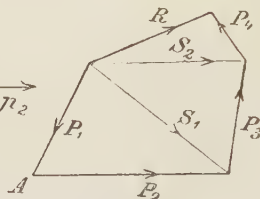
2. Die Zusammensetzung einer gegebenen Kräftegruppe zu ihrer Resultanten. Die Achsen p_1, p_2, p_3, p_4 der gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 sind im *Lageplan* (Abb. 1) dargestellt. Es ist nicht nötig, den *Sinn* der Achsen in Uebereinstimmung mit dem gegebenen Sinn der Kräfte im Lageplan anzugeben; es geschieht aber gewöhnlich, weil die Zeichnung dadurch an Uebersichtlichkeit gewinnt. Die Reihenfolge der Zusammensetzung wird durch die Numerierung der Kräfte angegeben. Zuweilen ist diese Reihenfolge durch den Zweck der Aufgabe gegeben. Ist dies nicht der Fall, so wird die Reihenfolge so gewählt, daß die in Betracht kommenden Schnittpunkte der Kraftachsen möglichst bequem und sicher festzulegen sind. Um die Resultante R der gegebenen Kräftegruppe zu bestimmen, bildet man nacheinander die Gruppen

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv P_1 \mp P_2 \\ S_2 &\equiv S_1 \mp P_3 \equiv P_1 \mp P_2 \mp P_3 \\ R &\equiv S_2 \mp P_4 \equiv P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4. \end{aligned}$$

Die Kraft S_1 wird nach Größe, Richtung und Sinn durch die im Kräfteplan (Abb. 2) gebildete geometrische Summe von P_1 und P_2 und darauf ihrer Lage nach durch den Schnittpunkt A der



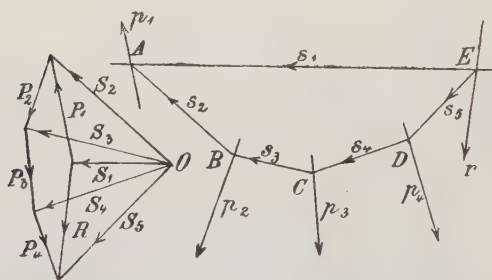
L. Abb. 1.



K. Abb. 2.

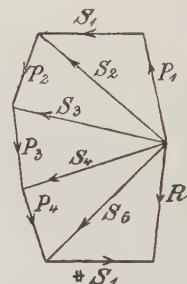
beiden Kraftachsen p_1, p_2 (Abb. 1) bestimmt. (I, 19). In gleicher Weise ergibt sich Größe, Richtung und Sinn der Kraft S_2 durch die geometrische Summe von P_1, P_2, P_3 im Kräfteplan, und darauf ihre Lage s_2 durch den Schnittpunkt B der Achsen s_1 und p_3 im Lageplan. Endlich wird die Resultante R bestimmt durch die geometrische Summe der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 und durch den Schnittpunkt C der Achsen s_2 und p_4 .

3. Das Seilpolygon. Wenn die Schnittpunkte A, B, C der Kraftachsen im Lageplan (Abb. 1) nicht auf das Zeichnungsblatt



K. Abb. 4.

L. Abb. 3.



K. Abb. 5.

fallen oder wegen Kleinheit der Schnittwinkel nur unsicher zu ermitteln sind, so fügt man zu der gegebenen Kräftegruppe P_1, P_2, P_3, P_4 (Abb. 3, 4, 5) eine Gleichgewichtsgruppe:

$$S_1 + S_1 \equiv 0$$

von geeigneter Lage hinzu, wodurch die Resultante der Gruppe

nicht geändert wird (II, 1). Man bildet also, wie im vorigen Abschnitt beschrieben worden ist, die Gruppen:

$$S_2 \equiv S_1 \mp P_1$$

$$S_3 \equiv S_2 \mp P_2 \equiv S_1 \mp P_1 \mp P_2$$

$$S_4 \equiv S_3 \mp P_3 \equiv S_1 \mp P_1 \mp P_2 \mp P_3$$

$$S_5 \equiv S_4 \mp P_4 \equiv S_1 \mp P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4$$

$$R \equiv S_5 \mp S_1 \equiv S_1 \mp P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4 \mp S_1,$$

wodurch zugleich die Resultante:

$$R \equiv P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4$$

bestimmt wird. Die Größe der Kraft S_1 und die Lage ihrer Achse s_1 sind so zu wählen, daß die Schnittpunkte A, B, C, D, E im Lageplan bequem und sicher festzulegen sind; im übrigen ist die Wahl willkürlich.

Die Abbildungen 4 u. 5 zeigen zwei verschiedene Anordnungen des Kräfteplans. In Abb. 4 sind die Summierungsdreiecke der Gruppen:

$$S_1 \mp P_1 \equiv S_2, \quad S_2 \mp P_2 \equiv S_3, \quad S_3 \mp P_3 \equiv S_4,$$

$$S_4 \mp P_4 \equiv S_5, \quad \mp S_1 \mp S_5 \equiv R$$

so angeordnet und aneinander gesetzt, daß das Summierungspolygon

$$P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4 \equiv R$$

durch die Kräfte S_1 und $\mp S_1$ nicht unterbrochen wird. Die Kräfte S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 gehen also von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte O , dem Pol des Kräfteplans, aus. In der zweiten Anordnung (Abb. 5) sind die Kräfterdreiecke so angeordnet und aneinander gesetzt, daß sie einander nicht decken. Die Aufeinanderfolge der Kräfte bei der geometrischen Summierung ist also folgende:

$$P_1 \mp S_1 \equiv S_2, \quad S_2 \mp P_2 \equiv S_3, \quad S_3 \mp P_3 \equiv S_4,$$

$$S_4 \mp P_4 \equiv S_5, \quad S_5 \mp S_1 \equiv R.$$

Diese Anordnung gewährt den Vorteil der größeren Uebersichtlichkeit, wodurch Flüchtigkeitsfehler vermieden werden. Dagegen ist der ersten Anordnung der Vorzug zu geben, wenn es die Absicht ist, nicht nur die Resultante der ganzen Kräftegruppe zu bestimmen, sondern außerdem die Resultante einer jeden Teilgruppe von Kräften, die bei der Zusammensetzung aufeinander folgen. Um beispielsweise die Resultante R_1 der Kräftegruppe P_1, P_2, P_3 zu ermitteln, hat man zu beachten, daß:

$$S_4 \equiv S_1 \mp P_1 \mp P_2 \mp P_3$$

oder:

$$S_4 \mp S_1 \equiv P_1 \mp P_2 \mp P_3 \equiv R_1$$

ist. Die Achse r_1 der Resultante R_1 geht also im Lageplan durch den Schnittpunkt der beiden Achsen s_4 und s_1 . Im Kräfteplan der Abb. 4 kann Größe, Richtung und Sinn von R_1 ohne weiteres durch die geometrische Summe

$$R_1 \equiv P_1 \pm P_2 \pm P_3$$

bestimmt werden, während bei der Anordnung der Abb. 5 es nötig wird, zu der geometrischen Summe der Kräfte P_1, S_1, P_2, P_3 noch die Kraft $\pm S_1$ hinzuzufügen.

Dem Polygon der Achsen $s_1, s_2, s_3 \dots$ im Lageplan hat man den Namen *Seilpolygon* gegeben, weil ein Seil von dieser Form unter Einwirkung der Kräfte P im Gleichgewicht sich befinden würde, wenn es imstande wäre, nicht nur *Zugkräfte*, sondern auch *Druckkräfte* zu übertragen. Die Kräfte $S_1, S_2, S_3 \dots$ werden *Seilkräfte* genannt. Da die *erste* Seilkraft S_1 nach Belieben gewählt wird, so lassen sich für eine Kräftegruppe (P) unendlich viele verschiedene Seilpolygone bilden.

4. Ebene Gleichgewichtsgruppen. Jede ebene Kräftegruppe läßt sich zu einer Resultanten zusammensetzen (I, 24). Die Bedingung, daß ein starrer Körper unter Einwirkung einer ebenen Kräftegruppe im Gleichgewicht sich befinde, oder daß diese Gruppe nullwertig sei, wird also erfüllt, wenn die Resultante die Größe null hat und nicht unendlich fern liegt, d. h. wenn sie nicht einem Kräftepaare gleichwertig ist. Die erste Bedingung kann durch *zwei* Gleichungen dargestellt werden, welche ausdrücken, daß die algebraischen Summen der Projektionen aller Kräfte der Gruppe in bezug auf zwei Achsen der Ebene gleich null sind. Die zweite Bedingung erfordert eine Momentengleichung.

In besonderen Fällen nimmt *eine* oder es nehmen *zwei* dieser Gleichungen die Form

$$0 = 0$$

an, und die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen ermäßigt sich dann auf zwei oder eins.

Gehen alle Achsen der Kräfte durch einen nicht unendlich fernen Punkt, so kann die Resultante kein Kräftepaar sein, und es fällt dann also die Momentengleichung fort. Sind alle Achsen parallel, so kann durch *eine* Gleichung ausgedrückt werden, daß die geometrische Summe der Gruppe gleich null ist. In diesen beiden Fällen bestehen demnach *zwei* Gleichgewichtsbedingungen.

Fallen die Achsen aller Kräfte mit *einer* Achse zusammen, so bleibt die *einzig*e Bedingung, daß die *algebraische* Summe der Kräfte gleich null sein muß.

In jedem anderen Falle ist die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen *drei*. Eine statische Aufgabe, die sich auf das Gleichgewicht einer *ebenen* Kräftegruppe bezieht, ist also im allgemeinen nur dann bestimmt, wenn sie nicht mehr und nicht weniger als *drei* unbekannte Größen enthält. Hierbei ist zu beachten, daß eine unbekannte Kraft, von der man nur weiß, daß sie in einer gegebenen Ebene liegt, *drei* unbekannte Größen enthält. Die Zahl der Unbekannten ist *zwei*, wenn die Kraft durch einen gegebenen Punkt der Ebene gehen soll, und *eins*, wenn sie mit einer gegebenen Achse zusammenfallen muß.

Die graphische Lösung einer Gleichgewichtsaufgabe wird damit eingeleitet, daß alle *gegebenen* Kräfte der Gleichgewichtsgruppe zu ihrer Resultanten R zusammengesetzt werden. Diese Gruppe enthält dann außer der bekannten Kraft R höchstens *drei* Kräfte P_1, P_2, P_3 , auf die sich die drei unbekannten Größen der Aufgabe verteilen. Die wichtigsten Formen der Gleichgewichtsaufgabe:

$$R \mp P_1 \mp P_2 \mp P_3 \equiv 0$$

sind demnach folgende drei:

Erstens: $R \mp P_1 \equiv 0.$

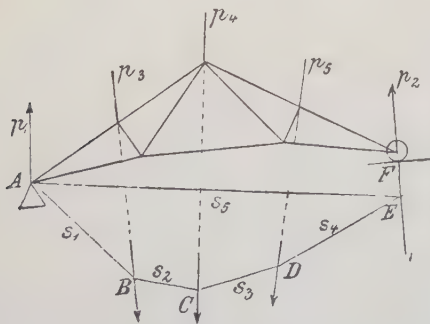
Die Gleichgewichtsgruppe enthält nur *eine* unbekannte Kraft P_1 , von der Lage, Größe und Sinn zu bestimmen sind. Die Lösung dieser Aufgabe:

$$P_1 \mp R$$

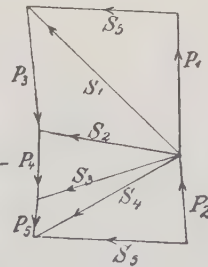
ist bereits in den vorhergehenden beiden Abschnitten enthalten: Man bestimmt die Resultante R der gegebenen Kräfte und wendet den Sinn derselben.

Zweitens: $R \mp P_1 \mp P_2 \equiv 0.$

Die unbekannte Kraft P_1 geht durch einen gegebenen Punkt A , und die unbekannte Kraft P_2 fällt mit einer gegebenen Achse p_2 zusammen.



L. Abb. 6.



K. Abb. 7.

Erstere enthält demnach *zwei* unbekannte Größen, letztere nur *eine*. Abb. 6 zeigt ein Beispiel. Der Dachbinder AF trägt die gegebenen Lasten P_3, P_4, P_5 . Er ruht auf einer festen Stütze A und einer reibungslosen Gleitstütze F . Die Stützkraft P_1 hat also eine *unbekannte*, die Stützkraft P_2 dagegen eine *gegebene* Richtung. Um diese beiden Stützkräfte zu bestimmen, verbindet man die gegebenen Lasten P_3, P_4, P_5 durch ein Seilpolygon s_1, s_2, s_3, s_4 und legt die erste Seite s_1 durch den gegebenen Punkt A . Demnach ist:

$$S_4 = S_1 + P_3 + P_4 + P_5,$$

und aus der Gleichgewichtsbedingung:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 0$$

folgt:

$$P_1 + P_2 + S_4 + S_1 = 0$$

oder:

$$S_1 + P_1 = P_2 + S_4 = S_5,$$

d. h. die Resultante S_5 der beiden Kräfte S_4 und P_2 ist gleichwertig oder muß zusammenfallen mit der Resultanten aus der Kraft S_1 und der gewendeten Kraft P_1 . Die Achse s_5 wird bestimmt durch die beiden Schnittpunkte A und E der Achsen s_1, p_1 und s_4, p_2 . Darauf können im Kräfteplan (Abb. 7) die beiden Kräftedreiecke:

$$S_5 = S_1 + P_1 \text{ und } S_5 = P_2 + S_4$$

gebildet und die beiden unbekannten Kräfte P_1, P_2 bestimmt werden.

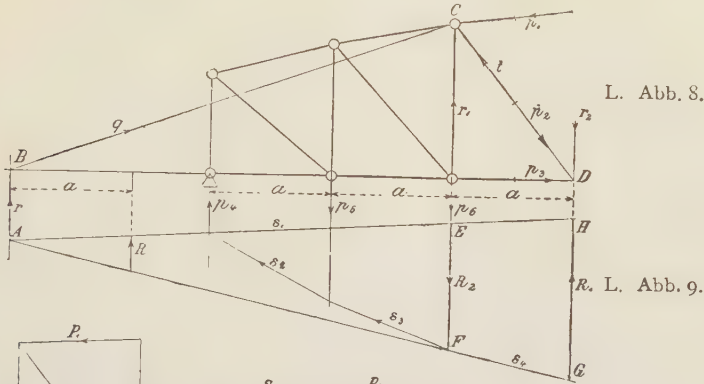
Die geometrische Gleichgewichtsbedingung, die hier zur Anwendung gebracht wurde, kann ausgesprochen werden durch den Satz: *Das Seilpolygon einer Gleichgewichtsgruppe muß ein geschlossenes Polygon bilden*, und dieser Satz ergibt sich unmittelbar aus der Ueberlegung, daß irgend eine Kraft S_5 zusammengesetzt mit einer *nullwertigen* Kräftegruppe als Resultante wieder die Kraft S_5 ergeben muß. Demgemäß nennt man die letzte Seite s_5 eines solchen Seilpolygons die *Schlußlinie* desselben.

Sind in der vorstehenden Aufgabe alle fünf Kräfte parallel, z. B. lotrecht, so bleibt die Lösung unverändert. In diesem Falle ist es jedoch unnötig, die erste Seilpolygonseite s_1 durch den Punkt A zu legen, weil die Richtung der Achse p_1 gegeben und also ihr Schnittpunkt mit s_1 auch bei jeder anderen Lage des Seilpolygons bestimmt ist.

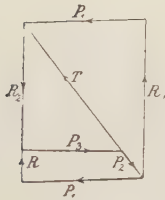
$$\text{Drittens:} \quad R + P_1 + P_2 + P_3 = 0.$$

Die drei unbekannten Kräfte P_1, P_2, P_3 fallen mit gegebenen Achsen p_1, p_2, p_3 zusammen, enthalten also je eine unbekannte Größe.

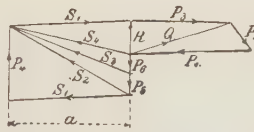
Abb. 8 zeigt ein Beispiel. Die Gleichgewichtsgruppe besteht aus der gegebenen Stützkraft P_4 , den beiden gegebenen Lasten P_5, P_6 und den drei unbekannten Stabkräften P_1, P_2, P_3 . Durch das Seil-



L. Abb. 8.



K. Abb. 11.



K. Abb. 10.

polygon s_1, s_2, s_3, s_4 (Abb. 9) mit dem zugehörigen Kräfteplan (Abb. 10) wird die Resultante

$$R \equiv P_4 \pm P_5 \pm P_6$$

der *gegebenen* Kräfte bestimmt. Aus der Gleichgewichtsbedingung:

$$R \pm P_1 \pm P_2 \pm P_3 \equiv 0$$

folgt:

$$R \pm P_3 \equiv \mp P_1 \mp P_2 \equiv Q,$$

d. h. die Resultante Q der beiden Kräfte R und P_3 fällt zusammen mit der Resultanten der beiden *gewendeten* Kräfte P_1 und P_2 . Nachdem die Achse q (Abb. 8) durch die beiden Schnittpunkte B und C der Kräfte R, P_3 und P_1, P_2 bestimmt worden ist, können durch die beiden Kräftereiecke der Gruppen:

$$R \pm P_3 \equiv Q \text{ und } P_1 \pm P_2 \equiv \mp Q$$

(Abb. 10) die unbekannten Kräfte P_1, P_2, P_3 bestimmt werden.

Der Lösung können noch zwei andere Formen gegeben werden, indem man in gleicher Weise die Kräftereiecke der Gruppen:

$$R \pm P_1 \equiv \mp P_2 \mp P_3 \equiv Q_1$$

und

$$R \pm P_2 \equiv \mp P_1 \mp P_3 \equiv Q_2$$

bildet. Für die zuletzt genannten Gruppen ist dies jedoch nicht oder wenigstens nicht bequem ausführbar, weil der Schnittpunkt der Achsen r , p_2 nicht auf das Zeichnungsblatt fällt, so daß die Achse q_2 nicht ohne weiteres festgelegt werden kann.

Es kommt insbesondere bei Untersuchung von Fachwerken nicht selten der Fall vor, daß *keine* der drei Achsen q , q_1 , q_2 bequem festgelegt werden kann, weil auf der Zeichnung der Platz dazu fehlt. In solchen Fällen ersetzt man die Resultante R durch zwei Kräfte

$$R \equiv R_1 \mp R_2,$$

welche durch zwei Schnittpunkte C , D der drei unbekannten Kräfte P_1 , P_2 , P_3 gehen. Die hierdurch gebildete Gleichgewichtsgruppe

$$R_1 \mp R_2 \mp P_1 \mp P_2 \mp P_3 \equiv 0$$

ergibt zwei gleichwertige Gruppen

$$R_1 \mp P_1 \mp R_2 \mp P_3 \mp P_2 = T,$$

deren Resultante T mit der Geraden CD zusammenfällt. Nachdem die beiden Kräfte R_1 , R_2 bestimmt worden sind, kann im Kräfteplan (Abb. 11) zunächst das Kräftedreieck der Gruppe

$$R_1 \mp P_1 \equiv T$$

und darauf das Kräfteviereck der Gruppe

$$\mp R_2 \mp P_3 \mp P_2 \equiv T$$

gebildet werden.

In den Fällen, welche hier in Frage kommen, sind die Kräfte P_4 , P_5 , P_6 und ihre Resultante R in der Regel lotrecht, und es empfiehlt sich dann, auch den Kräften R_1 und R_2 diese Richtung zu geben. Man wählt den Kräftemaßstab so, daß die gemeinschaftliche Horizontalprojektion der Seilkräfte S_1 , S_2 , S_3 . . durch die Fachlänge a (Abb. 8) dargestellt wird.

Dann folgt aus der Gleichwertigkeit:

$$R_1 \mp R_2 \equiv R,$$

daß R_1 den Sinn von R und die Größe der Strecke

$$R_1 = GH$$

hat, während R_2 den entgegengesetzten Sinn und die Größe der Strecke

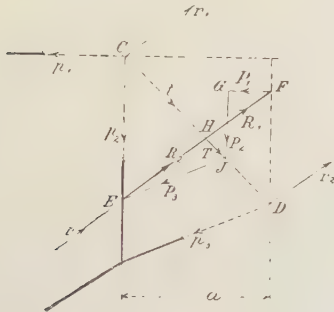
$$R_2 = EF$$

(Abb. 9) erhält (I, 19). Es ist zu beachten, daß die Strecke R_1 auf der Achse r_2 , ferner die Strecke R_2 auf der Achse r_1 dargestellt wird, und daß bei der Bestimmung dieser beiden Strecken die *Lage der Kraft R nicht in Betracht kommt*.

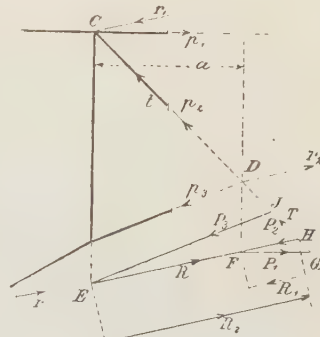
Zwei Beispiele von ähnlicher Form werden durch die Abb. 12 und 13 vorgeführt. In diesen beiden Fällen wurde der Kräfteplan in den Lageplan gelegt, was nur ausnahmsweise zu empfehlen ist. Die Kraft R der Gleichgewichtsgruppe

$$R \mp P_1 \mp P_2 \mp P_3 = 0$$

wird in beiden Fällen nach *Lage*, Größe und Sinn durch die Strecke EF dargestellt, deren Horizontalprojektion mit der Fach-



L, K. Abb. 12.



L, K. Abb. 13.

länge a übereinstimmt. Wie im ersten Beispiele wird die Kraft R ersetzt durch zwei zu ihr parallel gerichtete Kräfte R_1 , R_2 , die durch die Punkte C , D gehen. Aus der Gleichwertigkeit

$$R_1 \mp R_2 \equiv R$$

folgt dann wieder eine sehr einfache Bestimmung der beiden Kräfte: R_1 wird nach Größe, Richtung und Sinn durch die Strecke HF und R_2 durch die Strecke EH dargestellt. Die Gleichgewichtsgruppe

$$R_1 \mp R_2 \mp P_1 \mp P_2 \mp P_3 \equiv 0$$

ergibt die beiden gleichwertigen Gruppen:

$$R_1 \mp P_1 \mp P_2 \equiv R_2 \mp P_3 \equiv T,$$

deren Resultantenachse t bestimmt wird durch die beiden Punkte C , D , in denen die Kräfte der beiden Gruppen sich schneiden. Demnach kann zunächst das Kräftedreieck der Gruppe

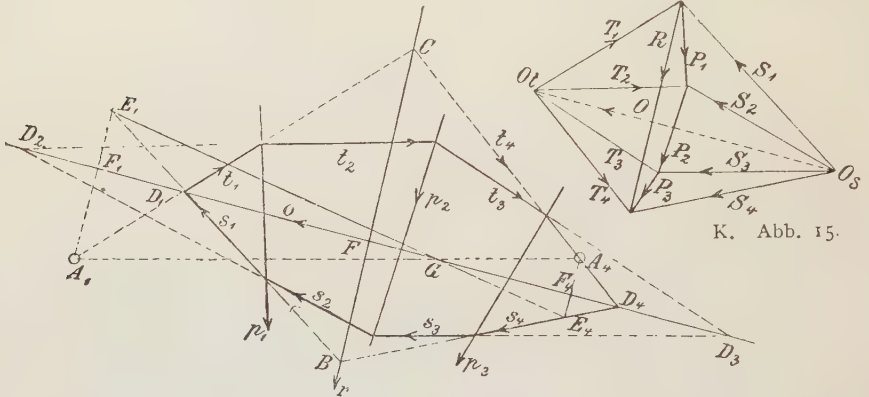
$$\mp R_2 \mp P_3 \equiv T$$

und darauf das Kräfteviereck der Gruppe

$$R_1 \mp P_1 \mp P_2 \equiv T$$

gebildet werden. Die Resultante T wird in beiden Fällen durch die Strecke HJ dargestellt.

5. Aufgabe. Für eine gegebene Kräftegruppe P_1, P_2, P_3 ein Seilpolygon t_1, t_2, t_3, t_4 zu bilden, von dem zwei bestimmte Seiten t_1, t_4 durch zwei gegebene Punkte A_1, A_4 gehen (Abb. 14 u. 15). Man bestimmt durch irgend ein Seilpolygon s_1, s_2, s_3, s_4 die Resultante R der Kräfte P_1, P_2, P_3 , die zwischen den Seilpolygonseiten t_1 und t_4 liegen. Die beiden Seiten t_1 und t_4 haben außer der Forderung, daß t_1 durch den Punkt A_1



L. Abb. 14.

K. Abb. 15.

und t_4 durch A_4 gehen soll, nur die eine Bedingung zu erfüllen, daß sie die Achse r der Resultanten R in *einem* Punkte schneiden. Die Wahl des Schnittpunktes C ist willkürlich. Die vorliegende Aufgabe ist also unbestimmt und läßt unendlich viele Lösungen zu. Nachdem der Schnittpunkt C gewählt worden ist, wodurch die Richtungen A_1C, A_4C der Seilpolygonseiten t_1, t_4 bestimmt werden, läßt sich im Kräfteplan (Abb. 15) das Kräftedreieck der Gruppe

$$T_4 - T_1 \mp R$$

bilden, wodurch der Pol O_t und die Seilkräfte T_2, T_3 bestimmt werden.

In manchen Fällen kann das Seilpolygon (t) ohne Benutzung des zugehörigen Poles O_t gebildet werden, indem man die folgende Eigenschaft der beiden Seilpolygone (s) und (t) zur Anwendung bringt. Beachtet man nämlich, daß

$$\begin{aligned} S_2 &\equiv S_1 \mp P_1, & T_2 &\equiv T_1 \mp P_1 \\ S_3 &\equiv S_2 \mp P_2, & T_3 &\equiv T_2 \mp P_2 \\ S_4 &\equiv S_3 \mp P_3, & T_4 &\equiv T_3 \mp P_3 \end{aligned}$$

ist, so folgt:

$$S_1 \mp T_1 \equiv S_2 \mp T_2 \equiv S_3 \mp T_3 \equiv S_4 \mp T_4 \equiv O.$$

Die Schnittpunkte D_1, D_2, D_3, D_4 der in beiden Seilpolygonen einander entsprechenden Seiten $(s_1, t_1), (s_2, t_2), (s_3, t_3), (s_4, t_4)$ liegen also auf einer Achse o , der *Schnittachse* der beiden Seilpolygone $(s), (t)$. Die zur Achse o parallel gerichtete Kraft O wird im Kräfteplan (Abb. 15) durch die Strecke $O_s O_t$ dargestellt, welche die beiden Pole O_s, O_t verbindet und die geometrischen Summen

$$S_1 + T_1 \equiv S_2 + T_2 \equiv S_3 + T_3 \equiv S_4 + T_4 \equiv O$$

bestimmt.

Die Schnittachse o wird, wenn die beiden Seiten t_1 und t_4 gewählt worden sind, durch die beiden Schnittpunkte D_1, D_4 der Seitenpaare (s_1, t_1) und (s_4, t_4) bestimmt. Die übrigen Seiten t_2, t_3 des zu bildenden Seilpolygons werden dann durch die Schnittpunkte D_2, D_3 der Achsenpaare $(s_2, o), (s_3, o)$ festgelegt, vorausgesetzt, daß diese Punkte auf das Zeichnungsblatt fallen.

Noch eine andere Eigenschaft der beiden Seilpolygone $(s), (t)$ ist hier zu erwähnen. Die Achse r , welche die Schnittpunkte B, C der Achsenpaare $(s_1, s_4), (t_1, t_4)$ verbindet, schneidet die Achse o im Punkte F . Eine durch den Punkt A_1 parallel zu r gelegte Gerade $A_1 E_1$ schneidet o im Punkte F_1 und s_1 im Punkte E_1 . Eine zweite durch den Punkt A_4 zu r parallel gelegte Gerade $A_4 E_4$ schneidet o im Punkte F_4 und s_4 im Punkte E_4 . Durch diese Geraden entstehen die ähnlichen Figuren:

$$D_1 A_1 F_1 E_1 \sim D_1 C F B$$

und

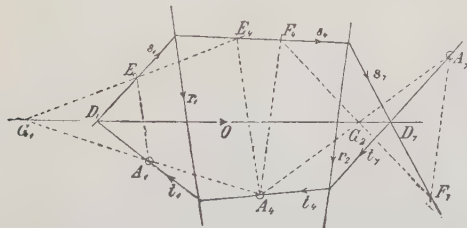
$$D_4 A_4 F_4 E_4 \sim D_4 C F B,$$

d. h. es ist:

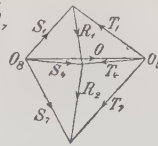
$$A_1 F_1 : F_1 E_1 = C F : F B = A_4 F_4 : F_4 E_4.$$

Hieraus folgt, daß die beiden Geraden $A_1 A_4$ und $E_1 E_4$ in einem Punkte G der Achse o sich schneiden. Diese Eigenschaft kommt in der folgenden Aufgabe zur Anwendung.

6. Aufgabe. Für eine gegebene Kräftegruppe $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ in den Abb. 16 und 17 ein Seilpolygon $t_1, t_2 \dots$



L. Abb. 16.



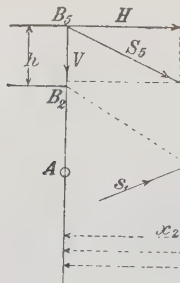
K. Abb. 17.

t_7 zu bilden, von dem drei bestimmte Seiten t_1, t_4, t_7 durch drei gegebene Punkte A_1, A_4, A_7 gehen. In der Zeichnung sind nur die hier in Betracht kommenden Kräfte und deren Achsen dargestellt, nämlich außer S_1 und T_1 die Kräfte

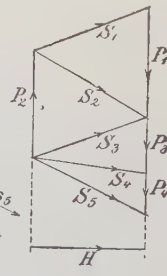
$$\begin{aligned} R_1 &\equiv P_1 \mp P_2 \mp P_3, & R_2 &\equiv P_4 \mp P_5 \mp P_6 \\ S_4 &\equiv S_1 \mp R_1, & T_4 &\equiv T_1 \mp R_1 \\ S_7 &\equiv S_4 \mp R_2, & T_7 &\equiv T_4 \mp R_2 \\ O &\equiv S_1 \mp T_1 \equiv S_4 \mp T_4 \equiv S_7 \mp T_7. \end{aligned}$$

Durch die zwei Bedingungen, daß die Seilpolygonseite t_1 durch den Punkt A_1 und t_4 durch A_4 gehen soll, ist nach Anleitung des vorigen Abschnittes ein Punkt G_1 der Schnittachse o der beiden Seilpolygone (s) und (t) bestimmt. Ebenso ergibt sich ein zweiter Punkt G_2 der Achse o aus den beiden Bedingungen, daß t_4 durch A_4 und t_7 durch A_7 gehen soll. Man zieht, um diese beiden Punkte und dadurch die Schnittachse o festzulegen, die Geraden A_1E_1, A_4E_4 parallel zur Achse r_1 , ferner A_4F_4 und A_7F_7 parallel zur Achse r_2 und erhält die Punkte G_1, G_2 durch die Geraden $A_4A_1G_1, E_4E_1G_1, A_4G_2A_7, F_4G_2F_7$. Die Achse o schneidet die Seilpolygonseiten s_1, s_4, s_7 in den Punkten D_1, D_4, D_7 , welche zunächst die Lage der Seilpolygonseiten t_1, t_4, t_7 und dadurch auch die Lage der übrigen Seiten $t_2, t_3 \dots$ bestimmen. Erforderlichen Falls, wenn nämlich die Schnittpunkte D nicht bequem liegen, wird der Kräfteplan zu Hilfe genommen, in dem der Pol O_t durch die Richtungen zweier Seilkräfte, z. B. T_1 und T_7 , bestimmt wird.

7. Die Bestimmung der statischen Momente paralleler Kräfte mittels des Seilpolygons (Abb. 18 und 19). Bei



L. Abb. 18.



K. Abb. 19.

statischen Untersuchungen, die auf *ebene* Kräftegruppen sich beziehen, kommen nur die *Hauptmomente* für die Punkte der Kräfteebene in Betracht (I, 9.). Unter dem Moment einer ebenen Kräftegruppe (P)

in bezug auf einen Punkt A der Ebene, den *Momentenpunkt*, versteht man also die algebraische Summe der statischen Momente der Kräfte in bezug auf die Achse, welche die Ebene im Punkte A *rechtwinklig* schneidet und den Sinn des Sehstrahles hat. Das Moment einer Kraft P ist demnach positiv oder negativ, je nachdem der Momentenpunkt A rechts oder links von der Kraft liegt.

Sind die Kräfte P parallel, wir nehmen an lotrecht, so sind die Horizontalprojektionen aller Seilkräfte $S_1, S_2, S_3 \dots$ nach Größe und Sinn einander gleich. Wir nennen diese Kraft H die *Horizontalkraft* des Seilpolygons, oder wenn die Kräfte P nicht lotrecht sind, die *Normalkraft*. Ein solches Polygon kann in besonders bequemer Weise benutzt werden zur Bestimmung des Momentes M einer jeden Gruppe von aufeinander folgenden Kräften, z. B. P_2, P_3, P_4 , in bezug auf irgend einen Punkt A der Ebene. Die durch A parallel zu den Kräften P gezogene Gerade AB_2B_5 schneidet die beiden Seilpolygonseiten s_2, s_5 , zwischen welchen die Kräfte in der Reihenfolge: P_2, P_3, P_4 zusammengesetzt worden sind, in den Punkten B_2, B_5 . Da demnach

$$S_5 \equiv S_2 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4$$

ist, so hat in bezug auf den Punkt B_2 die Kraft S_5 ein ebenso großes Moment wie die Kräftegruppe P_2, P_3, P_4 , und in bezug auf diesen Punkt B_2 sind die Momente der Kräfte P_2, P_3, P_4 ebenso groß wie in bezug auf den Punkt A . Um das Moment M von S_5 zu bilden, kann man diese Kraft im Punkte B_5 zerlegen in die Horizontalkraft H und die durch den Momentenpunkt B_2 gehende Kraft V . Wir bezeichnen die Strecke B_2B_5 mit h und geben ihr das positive oder das negative Vorzeichen, je nachdem B_2 rechts oder links von S_5 liegt; im vorliegenden Beispiel ist demnach h positiv. Die Momentengleichung für den Momentenpunkt B_2 ergibt also:

$$Hh = x_2 P_2 + x_3 P_3 + x_4 P_4 = M,$$

wenn mit x_2, x_3, x_4 die Abstände des Momentenpunktes A von den Achsen p_2, p_3, p_4 bezeichnet werden. Es ist zu beachten, daß die Strecke x_2 *negativ* ist, die Strecken x_3, x_4 dagegen *positive* Werte haben, weil A links von p_2 und rechts von p_3 und p_4 liegt. Ist aus einer Zeichnung eine größere Zahl von Momenten zu entnehmen, so gibt man der Normalkraft H zweckmäßig einen *runden* Wert, damit die Produkte Hh bequem gebildet werden können.

Bildet man zwei Seilpolygone $s_1, s_2, s_3 \dots$ und $t_1, t_2, t_3 \dots$ (Abb. 20) für dieselbe Gruppe von Parallelkräften $P_1, P_2 \dots$ mit

verschiedenen Normalkräften H_1, H_2 , so verhalten sich die einander entsprechenden Ordinaten h_1, h_2 beider Polygone von der Richtung der Kräfte P zueinander umgekehrt wie die beiden Normalkräfte, d. h. es ist:

$$\frac{B_1 C_1}{B_2 C_2} = \frac{D_1 E_1}{D_2 E_2} = \frac{F_1 G_1}{F_2 G_2} = \frac{H_2}{H_1} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Die im vorigen Abschnitt gelöste Aufgabe nimmt demnach für Parallelkräfte die folgende einfachere Form an: $s_1, s_2, s_3 \dots$ sei irgend ein Seilpolygon der Kräftegruppe $P_1, P_2 \dots$; zu bilden ist ein zweites Seilpolygon $t_1, t_2, t_3 \dots$ unter der Bedingung, daß t_1 durch den gegebenen Punkt A_2 , t_2 durch E_2 und t_3 durch J_2 gehen soll. Durch die Gerade $A_2 J_2$ und die entsprechende Gerade $A_1 J_1$ im Seilpolygon (s) werden die beiden Strecken $E_2 D_2$ und $E_1 D_1$ bestimmt. Das Seilpolygon (t) ergibt sich dann aus der Bedingung:

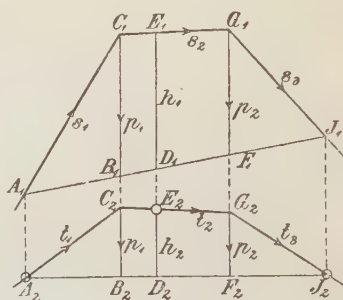
$$\frac{B_2 C_2}{B_1 C_1} = \frac{F_2 G_2}{F_1 G_1} = \frac{D_2 E_2}{D_1 E_1}.$$

Wenn die Kräfte P nicht parallel gerichtet sind, so ist die Bestimmung der Momente weniger einfach. Man muß dann vermittle des Seilpolygons unter *Zuhilfenahme des Kräfteplans* die Resultante der Kräftegruppe nach Lage, Größe und Sinn bestimmen, um darauf das Produkt aus der Resultanten und ihrem Abstand vom Momentenpunkte bilden zu können.

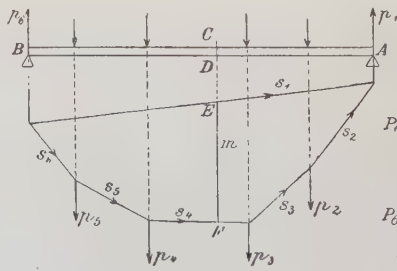
8. Bestimmung der Biegemomente vermittle des Seilpolygons. In den Abb. 21, 22 ist das Seilpolygon einer Gleichgewichtsgruppe von lotrechten Kräften

$$P_1 \pm P_2 \pm \dots \pm P_6 \equiv 0,$$

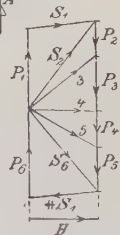
die auf einen geraden Balken AB einwirken, dargestellt und nach Anleitung des Abschnittes 4 zur Bestimmung der Stützkkräfte P_1 und P_6 benutzt worden. Unter dem



L. Abb. 20.



L. Abb. 21.

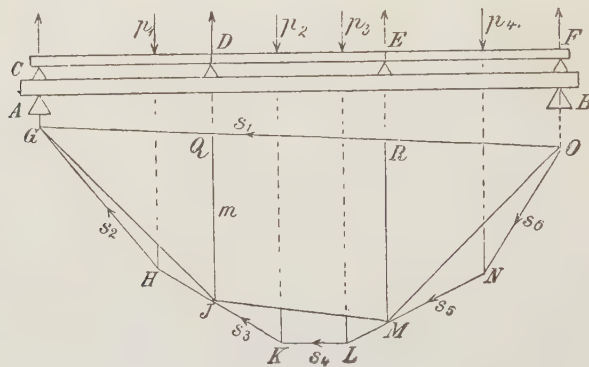


K. Abb. 22.

den drei Stützkraften P_1, P_4, P_7 nur *zwei* bestimmt werden. Wir nehmen an, *eine* derselben, z. B. P_4 , sei gegeben. Dann kann das Seilpolygon $s_2, s_3 \dots s_7$ mit Hilfe des Kräfteplans (Abb. 24) gebildet werden, und die Schlußlinie s_1 ergibt die beiden Stützkraften P_1, P_7 . Da s_1 zufällig wagerecht ist, so fällt S_1 mit der Horizontalkraft H zusammen. Die Biegemomente sind für die Balkenteile AD und EC positiv, für den Balkenteil DE negativ; in D und E wechselt also der Sinn der Krümmung.

Drittes Beispiel. Der Hauptbalken AB (Abb. 25) trägt die Stützen C, D, E, F von drei sogenannten Zwischenbalken, welche nicht zusammenhängen, also keinen kontinuierlichen Balken bilden,

L. Abb. 25.



L. Abb. 26.

sondern über den Stützen voneinander getrennt sind. Die Zwischenbalken nehmen die Lasten $P_1, P_2 \dots$ auf und übertragen sie durch ihre Stützen auf den Hauptbalken. Um die Biegemomente der vier Balken zu bestimmen, ist mittels des Kräfteplans nur das Seilpolygon der Lasten P_1, P_2, P_3, P_4 zu bilden. Dasselbe ergibt, wie in den vorhergehenden Beispielen, die Momentenflächen $GHHJ$, $JKLM$, MNO der drei Zwischenbalken. Das hierdurch entstehende Polygon $GJMO$, das dem Seilpolygon der Lasten eingeschrieben ist, bildet die Momentenfläche des Hauptbalkens, wie aus folgender Ueberlegung sich ergibt. Wir bezeichnen die Stützkraften des Hauptbalkens mit A, B und die der Zwischenbalken mit $(C_1, D_1), (D_2, E_2), (E_3, F_3)$. Die Gleichgewichtsgruppen der vier Balken bestehen demnach aus den Kräften:

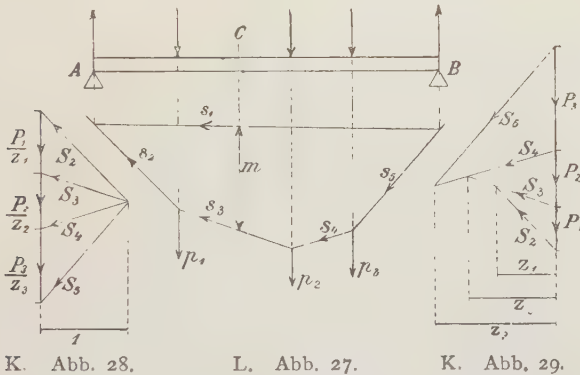
$$C_1 + P_1 + D_1 \equiv 0, \quad D_2 + P_2 + P_3 + E_2 \equiv 0, \quad E_3 + P_4 + F_3 \equiv 0$$

$$A + C_1 + D_1 + D_2 + E_2 + E_3 + F_3 + B \equiv 0.$$

In bezug auf den Punkt D ist die Summe der Momente von C_1 und P_1 gleich null, das Moment von P_1 ist also gleich dem von $+C_1$. Wenn die Lasten unmittelbar auf den Hauptbalken einwirken, so würde das Biegemoment des Balkenquerschnittes D durch die Strecke

$$QJ = m$$

dargestellt werden und aus der Momentensumme der beiden Kräfte A und P_1 in bezug auf den Punkt D bestehen. Ebenso groß ist das Biegemoment dieses Balkenquerschnittes bei mittelbarer Belastung durch die Zwischenträger; denn es besteht aus der Momentensumme der beiden Kräfte A und $+C_1$. In gleicher Weise wird bewiesen, daß das Biegemoment des Balkenquerschnittes E wie bei unmittelbarer so auch bei mittelbarer Belastung durch die Strecke RM dargestellt wird.



K. Abb. 28.

L. Abb. 27.

K. Abb. 29.

Viertes Beispiel. Die Belastungen des Balkens AB in Abb. 27 sind in der Form $\frac{P_1}{z_1}, \frac{P_2}{z_2}, \frac{P_3}{z_3} \dots$ gegeben; P_1, P_2, P_3 bezeichnen Kräfte und z_1, z_2, z_3 Zahlen. Um die Biegemomente in einem solchen Falle zu bestimmen, kann man die Belastungswerte $\frac{P_1}{z_1}, \frac{P_2}{z_2}, \frac{P_3}{z_3}$ berechnen und den Kräfteplan des Seilpolygons (Abb. 28) in bekannter Weise bilden, z. B. mit einer Normalkraft

$$H = 1 \text{ Tonne.}$$

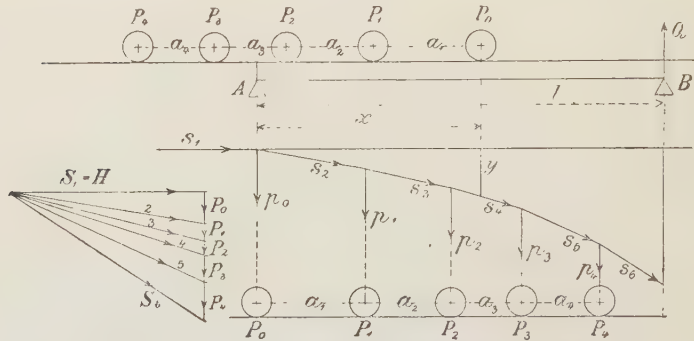
Man kann aber die Rechnung vermeiden, indem man, wie in Abb. 29 geschehen ist, als Lasten die Kräfte P_1, P_2, P_3 aufträgt und das Kräfdreieck der ersten, zweiten, dritten Seilecke mit der Horizontalkraft z_1, z_2, z_3 Tonnen bildet. Gibt man in Abb. 29 der ersten Seilkraft S_2 dieselbe Richtung wie in Abb. 28, so entstehen

Kräftedreiecke, die den entsprechenden Kräftedreiecken in Abb. 28 geometrisch ähnlich sind und daher dieselbe Form des Seilpolygons $s_1, s_2 \dots s_5$ ergeben. In beiden Fällen ist also das Biegemoment des Balkenquerschnitts C :

$$M = mH = m \cdot 1 \text{ Tonne.}$$

9. Anwendung des Seilpolygons auf die Bestimmung der Wirkungen eines beweglichen Lastenzuges.

I.. Abb. 30.



K. Abb. 32.

L. Abb. 31.

Erstes Beispiel. Ein Lastenzug von gegebener Zusammensetzung (Abb. 30):

$$P_0 = 6,3 \text{ t}, \quad P_1 = 3,9 \text{ t}, \quad P_2 = 2,8 \text{ t}, \quad P_3 = 5 \text{ t}, \quad P_4 = 8 \text{ t.}$$

$$a_1 = 2,2 \text{ m}, \quad a_2 = 1,7 \text{ m}, \quad a_3 = 1,4 \text{ m}, \quad a_4 = 1,5 \text{ m}$$

bewegt sich von links nach rechts über einen Brückenbalken von

$$AB = l = 8 \text{ m}$$

Stützweite. Für *jede* Lage des Zuges soll die vom Auflager B gegen den Balken wirkende Stützkraft Q bestimmt werden. Bei der in Abb. 30 angegebenen Lage hat das Vorderrad P_0 vom linken Auflager A den Abstand x , und folglich hat die Stützkraft Q die Größe

$$Q = \frac{1}{l} (P_0 x + P_1 (x - a_1) + P_2 (x - a_1 - a_2)).$$

Um diese Größe auf graphischem Wege darzustellen, wendet man den Lastenzug um und bringt ihn in die Ruhelage der Abb. 31, bei der die Abszisse des Vorderrades P_0 gleich null ist. Man bildet dann mit einer willkürlich gewählten Horizontalkraft

$$H = S_1 = 40 \text{ Tonnen}$$

vermittels des Kräfteplans (Abb. 32) das Seilpolygon $s_1, s_2 \dots s_6$.

Dieses Seilpolygon schneidet auf dem Lote des Vorderrades von Abb. 30 eine Länge y ab, die nach Abschnitt 7 aus der Gleichung

$$Hy = P_0 x + P_1 (x_1 - a_1) + P_2 (x - a_1 - a_2) = Ql$$

sich ergibt. Die Ordinate

$$y = \frac{l}{H} Q$$

des Seilpolygons bestimmt also für jede Lage dieses Zuges die Größe der Stützkraft

$$Q = y \frac{H}{l}.$$

Der Längenmaßstab für $x, y, l \dots$ ist

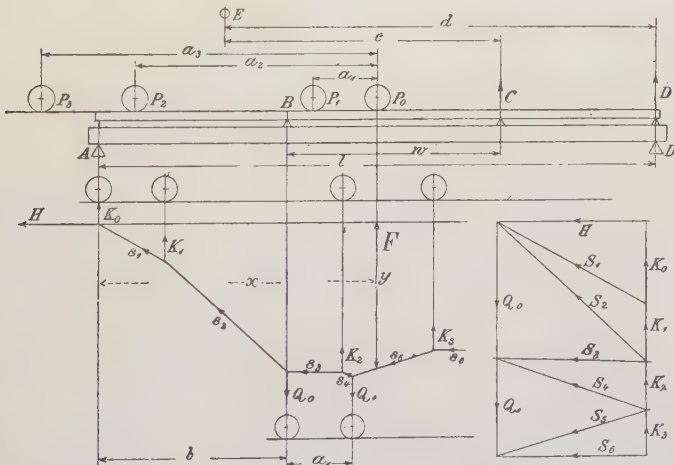
$$1 \text{ mm} = 0,15 \text{ m.}$$

Daher ist der Kräftemaßstab der Strecken y als Darstellung von Q

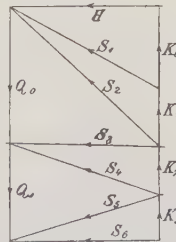
$$1 \text{ mm} = 0,15 \text{ m} \cdot \frac{H}{l} = 0,15 \text{ m} \frac{40 \text{ t}}{8 \text{ m}} = 0,75 \text{ t.}$$

Die Vervollständigung der graphischen Darstellung für solche Lagen des Zuges, bei denen das Vorderrad P_0 die Stütze B bereits überschritten hat, bietet keine Schwierigkeit, für den vorliegenden Zweck aber auch kein Interesse.

L. Abb. 33.



L. Abb. 34.



K. Abb. 35.

Zweites Beispiel. Ein Lastenzug P_0, P_3 (Abb. 33) bewegt sich von links nach rechts über den Balken AD , der seine Belastungen durch Vermittelung der Zwischenträger AB, BC, CD aufnimmt.

D bezeichnet den Druck der Stütze D gegen den Hauptbalken und C den Druck der Stütze C des Zwischenbalkens BC ebenfalls gegen den Hauptbalken. Das Moment

$$M = -dD + eC$$

der beiden Kräfte D und C in bezug auf den gegebenen Momentenpunkt E soll graphisch dargestellt werden für die Lagen des Lastenzuges, in welchen das Vorderrad P_0 zwischen A und C sich befindet.

Wir bezeichnen mit a_1, a_2, a_3 die Abstände der Lasten P_1, P_2, P_3 von P_0 , ferner mit x den Abstand der Last P_0 von der Stütze A , mit l die Stützweite AD des Hauptbalkens AD und mit w die Stützweite des Zwischenbalkens BC . Für die in Abb. 33 angegebene Lage des Lastenzuges ist also:

$$D = \frac{1}{l} (P_0 x + P_1 (x - a_1) + P_2 (x - a_2))$$

und

$$C = \frac{1}{w} (P_0 (x - b) + P_1 (x - a_1 - b)),$$

wenn mit b die Länge AB bezeichnet wird. Bezeichnet man ferner

$$\text{die Lasten } P_0 \frac{d}{l}, P_1 \frac{d}{l} \dots \text{ mit } K_0, K_1 \dots$$

$$\text{und die Lasten } P_0 \frac{e}{w}, P_1 \frac{e}{w} \dots \text{ mit } Q_0, Q_1 \dots,$$

so ergibt sich für das Moment M der Ausdruck:

$$M = -K_0 x - K_1 (x - a_1) + Q_0 (x - b) - K_2 (x - a_2) + Q_1 (x - a_1 - b).$$

Um diese Größe vermittle eines Seilpolygons (Abb. 34) zu bestimmen, wendet man den gegebenen Lastenzug um und bringt das Vorderrad P_0 einmal in das Lot der Stütze A und das zweite Mal in das Lot der Stütze B . Durch Multiplikation mit den Zahlen $-\frac{d}{l}$

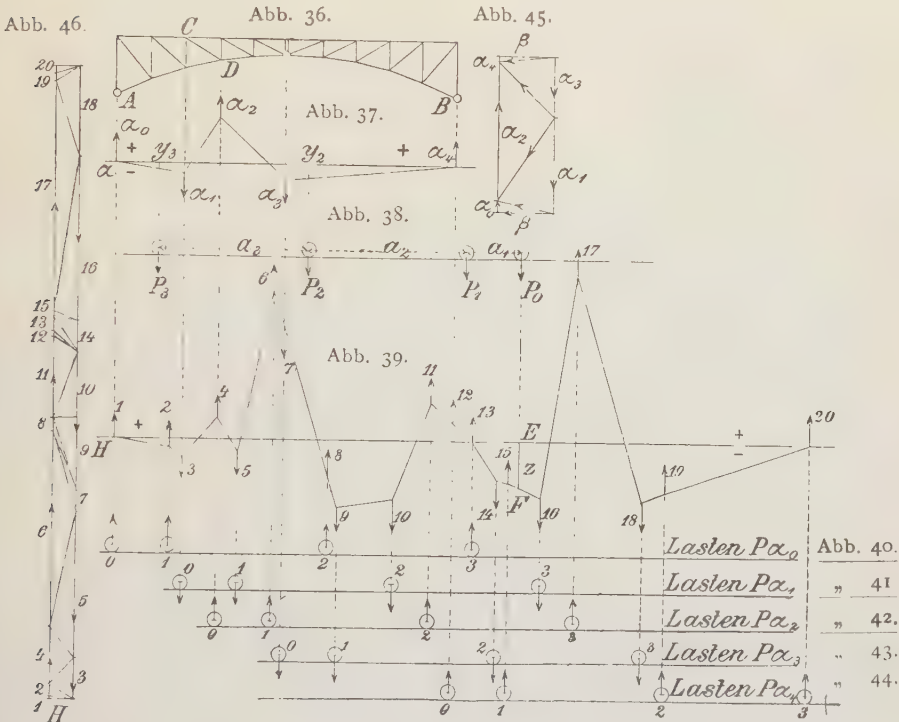
und $+\frac{e}{w}$ werden die Lasten des ersten Zuges in die nach oben zeigenden Kräfte $K_0, K_1 \dots$ und die Lasten des zweiten Zuges in die nach unten zeigenden Kräfte $Q_0, Q_1 \dots$ verwandelt. Mit Hilfe des Kräfteplanes (Abb. 35) und der willkürlich gewählten Horizontalkraft H bildet man darauf das Seilpolygon $s_1, s_2, s_3 \dots$ der Lasten K und Q . In bezug auf den Punkt F , in dem das Lot des Vorderrades P_0 von Abb. 33 die Seilpolygonseite H schneidet, lautet die Momentengleichung des Seilpolygons:

$$Hy = K_0 x + K_1 (x_1 - a_1) - Q_0 (x - b) + K_2 (x - a_2) - Q_1 (x - a_1 - b)$$

oder

$$M = -Hy.$$

Die Ordinate y des Seilpolygons bestimmt demnach für jede Lage des Vorderrades P_0 zwischen A und C die Größe des Momentes M .



Drittes Beispiel. Ein Lastenzug von gegebener Zusammensetzung (Abb. 38):

$$P_0 = 2 \text{ t}, P_1 = 7 \text{ t}, P_2 = 3 \text{ t}, P_3 = 8 \text{ t};$$

$$a_1 = 5 \text{ m}, a_2 = 14 \text{ m}, a_3 = 13 \text{ m}$$

bewegt sich von links nach rechts über die Fahrbahn des in Abb. 36 im Maßstabe $3 \text{ mm} = 2 \text{ m}$ dargestellten Bogenfachwerks. Es wird hier als gegeben vorausgesetzt, daß die von dem Lastenzuge in dem Fachwerkstabe CD hervorgerufene Stabkraft K durch die Gleichung:

$$K = \frac{1}{4 \text{ m}} (P_0 y_0 + P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3)$$

bestimmt wird, wenn mit y_0, y_1, y_2, y_3 in Metern die Ordinaten des in Abb. 37 dargestellten Einflußpolygons in den Loten der Lasten P_0, P_1, P_2, P_3 bezeichnet werden. In dem vorliegenden Beispiel ist in dem oben angegebenen Maßstabe:

$$y_0 = y_1 = 0, \quad y_2 = -1,13 \text{ m}, \quad y_3 = -0,62 \text{ m},$$

also

$$K = -\frac{1}{4} (3 \cdot 1,13 + 8 \cdot 0,62) = -2,09 \text{ t.}$$

Das negative Vorzeichen gibt an, daß K bei dieser Belastung eine *Druckkraft* ist. In dem Lot des Vorderrades P_0 ist diese Kraft K in Abb. 39 durch die Ordinate

$$z = EF$$

und zwar in dem Maßstabe

$$1 \text{ mm} = 0,33 \text{ t}$$

dargestellt worden. Die negativen Ordinaten z liegen *unter* der Abszissenachse. Wenn diese Ordinate

$$z \text{ mm} = \frac{K}{0,33} \text{ mm}$$

für *jede* Lage des Lastenzuges in dem Lot des Vorderrades P_0 aufgetragen wird, entsteht das in Abb. 39 dargestellte Polygon, welches in folgender Weise gebildet wird.

Wir betrachten das Einflußpolygon (Abb. 37) als Seilpolygon und bestimmen seine durch Zahlen dargestellten Lasten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, indem wir in Abb. 45 seinen Kräfteplan bilden und seine Horizontalkraft β willkürlich gleich 1000 setzen. Es ergibt sich:

$$\alpha_0 = -156, \quad \alpha_1 = +1808, \quad \alpha_2 = -2540, \quad \alpha_3 = +976, \quad \alpha_4 = -88.$$

Die positiven Lasten zeigen nach unten, die negativen nach oben. Die Abstände der Lasten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ vom linken Auflager A sind in dieser Reihenfolge 0, 6, 9, 15, 30 m. Bei der in Abb. 38 angegebenen Laststellung ist der Abstand des Vorderrades P_0 vom linken Auflager A gleich 36 m. Demnach ergeben sich die Ordinaten y_0, y_1, y_2, y_3 des Seilpolygons aus den Momentengleichungen (Abb. 37):

$$1000 y_0 = 36 \alpha_0 + 30 \alpha_1 + 27 \alpha_2 + 21 \alpha_3 + 6 \alpha_4 = 0$$

$$1000 y_1 = 31 \alpha_0 + 25 \alpha_1 + 22 \alpha_2 + 16 \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

$$1000 y_2 = 17 \alpha_0 + 11 \alpha_1 + 8 \alpha_2 + 2 \alpha_3 = -1132 \text{ m}$$

$$1000 y_3 = 4 \alpha_0 = -624 \text{ m.}$$

Indem man die Werte der Ordinaten y in die gegebene Gleichung für K einsetzt, entsteht die Gleichung:

$$K = \frac{1}{4000} (36 P_0 \alpha_0 + 31 P_1 \alpha_0 + 30 P_0 \alpha_1 + 27 P_0 \alpha_2 + 25 P_1 \alpha_1 \\ + 22 P_1 \alpha_2 + 21 P_0 \alpha_3 + 17 P_2 \alpha_0 + 16 P_1 \alpha_3 + 11 P_2 \alpha_1 + 8 P_2 \alpha_2 \\ + 6 P_0 \alpha_4 + 4 P_3 \alpha_0 + 2 P_2 \alpha_3 + P_1 \alpha_4).$$

Um diesen Wert und die ähnlich geformten Größen für alle anderen Lagen des Lastenzuges auf graphischem Wege zu ermitteln, wird der Zug *gewendet* und, wie die Abb. 40 bis 44 angeben, in fünf Lagen so gestellt, daß die Vorderräder der fünf Stellungen in den Loten der fünf Lasten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ stehen. Die Radlasten P_0, P_1, P_2, P_3 sind in der ersten Stellung (Abb. 40) mit der Zahl α_0 , in der zweiten (Abb. 41) mit α_1 , in der dritten (Abb. 42) mit α_2 usw. zu multiplizieren. Da die drei Zahlen $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4$ negative Werte haben, so sind die Lasten der drei Züge $P\alpha_0, P\alpha_2, P\alpha_4$ *nach oben* gerichtet. In dem Seilpolygon (Abb. 39) und dem zugehörigen Kräfteplan (Abb. 46) sind die zwanzig Lasten $P\alpha$, wie sie von links nach rechts aufeinander folgen, mit den Nummern 1 bis 20 bezeichnet worden. Für die Horizontalkraft des Seilpolygons wurde die Größe

$$H = 2000 \text{ t}$$

gewählt. Es ist zu beachten, daß die Ordinate z in dem Lot des Vorderrades (Abb. 38 u. 39) negativ ist. Demnach lautet die Momentengleichung für den Punkt F :

$$0 = -Hz + 36 P_0 \alpha_0 + 31 P_1 \alpha_0 + 30 P_0 \alpha_1 + 27 P_0 \alpha_2 + 25 P_1 \alpha_1 \\ + 22 P_1 \alpha_2 + 21 P_0 \alpha_3 + 17 P_2 \alpha_0 + 16 P_1 \alpha_3 + 11 P_2 \alpha_1 + 8 P_2 \alpha_2 \\ + 6 P_0 \alpha_4 + 4 P_3 \alpha_0 + 2 P_2 \alpha_3 + P_1 \alpha_4$$

oder

$$0 = -Hz + K 4000 \text{ m.}$$

Folglich ist

$$K = z \frac{2000 \text{ t}}{4000 \text{ m}} = \frac{z}{2 \text{ m}} 1 \text{ t.}$$

Dieselbe Gleichung ergibt sich für jede andere Stellung des Lastenzuges, da in dem vorliegenden Beispiele eine besondere Stellung nicht gewählt wurde. Die Stabkraft K im Stabe OD wird demnach bei *jeder* Stellung des Lastenzuges (Abb. 38) durch die Ordinate z des Seilpolygons (Abb. 39) in der Vertikalen des Vorderrades dargestellt. Da der Längenmaßstab für z , wie in den Abb. 36 bis 44:

$$3 \text{ mm} = 2 \text{ m} \text{ oder } 1 : 667$$

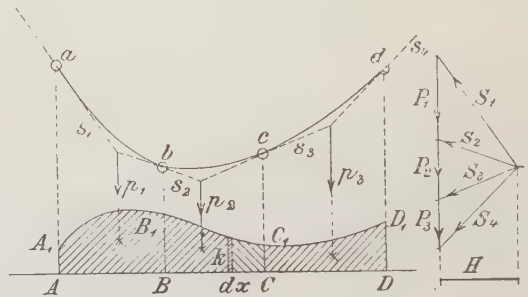
ist, so ist in dem vorliegenden Beispiel für die Strecken z als Darstellung der Kräfte K der Maßstab:

$$1 \text{ mm} = \frac{0,667 \text{ m}}{2 \text{ m}} 1 \text{ t} = 0,33 \text{ t}$$

anzuwenden.

Bei der Anwendung des im vorstehenden beschriebenen Verfahrens auf die Berechnung der Eisenbahnbrücken von großer Stützweite erreicht man eine wesentliche Vereinfachung, wenn man für die von den Lokomotiven und von den Bahnwagen bedeckten Strecken anstatt der Raddrücke gleichmäßig verteilte Belastungen einführt.

10. Die Seilkurven. Das Seilpolygon geht über in die Seilkurve, wenn die zu verbindenden unendlich kleinen Parallelkräfte in unendlich kleinen Abständen aufeinander folgen. Eine solche stetige Belastung kann dargestellt werden durch die *Belastungsfläche* (Abb. 47). Zerlegt man diese Fläche in unendlich schmale Streifen parallel zur Richtung der Kräfte, so bestimmt die Fläche $k dx$ eines solchen Streifens die Belastung der unendlich kleinen Strecke dx . Sind die Kräfte z. B. lotrecht,



L. Abb. 47.

K. Abb. 48.

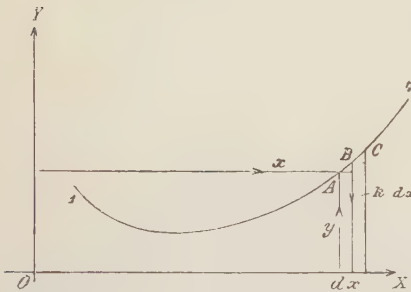
so bezeichnet die Ordinate k , oder die *Belastungshöhe*, die auf die Längeneinheit der Horizontalprojektion bezogene veränderliche Belastung des Seiles. Liegen einzelne Teile der Belastungsfläche *über*, andere *unter* der Abszissenachse, so werden dadurch die nach unten gerichteten *positiven* und die nach oben gerichteten *negativen* Belastungen voneinander unterschieden.

Um eine Seilkurve für eine gegebene Belastungsfläche zu bilden, zerlegt man die Fläche (Abb. 47) parallel zur Krafrichtung durch Ordinaten AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 in Teile, und zwar so, daß die Größen der Flächenteile P_1 , P_2 , P_3 möglichst einfach und ihre Schwerpunkte nach Augenmaß bestimmt werden können. Man bildet alsdann vermittels des Kräfteplans (Abb. 48) das in gestrichelten Linien dargestellte Seilpolygon s_1 , s_2 , s_3 , s_4 der Lasten P_1 , P_2 , P_3 und bestimmt die Schnittpunkte a , b , c , d der Teilordinaten AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 mit den Seilpolygonseiten s_1 , s_2 , s_3 , s_4 . Das Seil-

polygon wird von der Seilkurve der stetigen Belastung in den Punkten a, b, c, d berührt. Um sich hiervon zu überzeugen, beachte man, daß z. B.

$$S_3 \equiv S_1 \pm P_1 \pm P_2$$

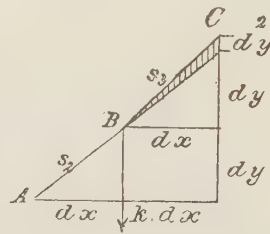
ist, und daß P_1 und P_2 die Resultanten der unendlich vielen und unendlich kleinen Lasten bilden, die von der Fläche AA_1C_1C dargestellt werden. Im Punkte c muß daher die Seilkraft der Kurve mit der Seilkraft S_3 des Polygons zusammenfallen, d. h. das Seilpolygon muß in diesem Punkte die Seilkurve berühren.



L. Abb. 49.



K. Abb. 50.



L. Abb. 51.

II. Die Differentialgleichung der Seilkurve lotrechter Kräfte. In Abb. 49 bezeichnen x, y die Koordinaten eines Punktes A der Seilkurve. Die wagerechte Abszisse x zeigt von links nach rechts, die lotrechte Ordinate y zeigt nach oben. Mit 1 und 4 sind Anfangspunkt und Endpunkt der Seilkurve, mit 2 und 3 die auf A folgenden unendlich kleinen Seilstrecken AB, BC bezeichnet, deren Horizontalprojektionen gleich dx sind. In Abb. 51 sind diese beiden Strecken in unendlich starker Vergrößerung dargestellt. Die Vertikalprojektionen von AB und BC haben die Größen dy und $dy + d^2y$. Die unendlich kleine Belastung des Punktes B ist von der Größe $k dx$. Der Kräfteplan (Abb. 50) zeigt die Seilkräfte S_1, S_2, S_3, S_4 und die zwischen S_2 und S_3 liegende Belastung $k dx$ des Punktes B . Die in den Abb. 50 und 51 schraffierten beiden Dreiecke sind geometrisch ähnlich, weil ihre Seiten paarweise parallel gerichtet sind. Daher besteht die Beziehung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{k dx}{H},$$

woraus die Differentialgleichung der Seilkurven mit lotrechter Belastung sich ergibt:

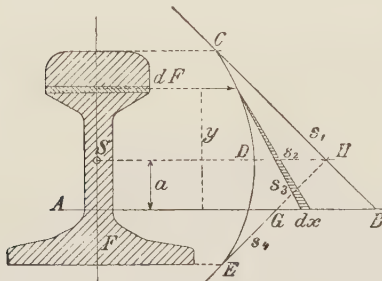
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{k}{H}.$$

Ist beispielsweise die Belastungshöhe k von konstanter Größe, so folgt aus der vorstehenden Gleichung durch Integration:

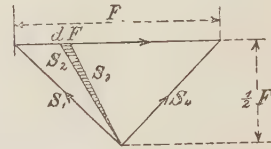
$$y = a + bx + \frac{k}{2H} x^2.$$

Die Seilkurve ist in diesem Falle also eine Parabel mit lotrechter Achse.

12. Anwendung der Seilkurve zur Bestimmung des Trägheitsmomentes einer ebenen Fläche in bezug auf eine Achse oder eines Körpers in bezug auf eine Ebene. Die Abb. 52 zeigt die Querschnittsfläche einer Eisenbahnschiene, deren



L. Abb. 52.



K. Abb. 53.

Trägheitsmoment in bezug auf die Achse AB bestimmt werden soll. Man zerlegt zu diesem Zweck die Fläche in Streifen dF parallel zur Achse AB und bildet, wie im Abschnitt 10 beschrieben wurde, die Seilkurve CE der Kräfte dF von der Richtung der Achse AB . Wenn im Kräfteplan (Abb. 53) die Normalkraft gleich $\frac{1}{2}F$, d. h. gleich der Hälfte der ganzen Fläche, gewählt wird, so ist die Fläche

$$F_1 = CDEGBC,$$

welche von der Seilkurve CDE , den beiden äußersten, von den Achsen s_1, s_4 gebildeten Tangenten CB, EG und der Achse GB begrenzt wird, gleich dem Quadrat des Trägheitshalbmessers i der Fläche F in bezug auf die Achse AB . Man bildet also das Trägheitsmoment J durch das Produkt der beiden Flächen F und F_1

$$J = FF_1 = Fi^2.$$

Der Kräfteplan (Abb. 53) zeigt die beiden äußersten Seilkräfte S_1, S_4 und die beiden Seilkräfte S_2, S_3 , zwischen welchen die Last dF liegt, so daß

$$S_3 \equiv S_2 \pm dF$$

ist. Im Lageplan (Abb. 52) ist die unendlich kleine Strecke, die

auf der Achse AB von den beiden Achsen s_2, s_3 abgeschnitten wird, mit dx bezeichnet. Das von dx, s_2, s_3 gebildete Dreieck ist dem im Kräfteplan von den Strecken dF, S_2, S_3 gebildeten Dreieck geometrisch ähnlich, weil die Seiten der beiden Dreiecke paarweise parallel gerichtet sind. Daher ist, wenn mit y der Abstand des Flächenstreifens dF von der Achse AB bezeichnet wird:

$$dx : y = dF : \frac{1}{2} F$$

oder

$$y^2 dF = F \frac{y dx}{2}.$$

Durch $\frac{y dx}{2}$ wird die Fläche des im Lageplan schraffierten Dreiecks von der Basis dx und der Höhe y bestimmt. Bildet man für jede Last dF das entsprechende Dreieck, so bedecken alle diese Dreiecke die Fläche F_1 , während die Summe der Größen $y^2 dF$ das Trägheitsmoment J bestimmt. Demnach ist, wie oben angegeben wurde:

$$J = F F_1.$$

Bezeichnet F die Projektion eines Körpers und AB die Spur einer zur Bildebene senkrecht gestellten Ebene, so wird das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Ebene AB in genau derselben Weise bestimmt, wie oben beschrieben wurde. An die Stelle der Flächenstreifen dF treten die Massen der Körperschichten, in die man den Körper durch Ebenen parallel zu AB zerlegen kann.

B. Kräftegruppen im Raume.

13. Einleitende Bemerkungen. Die Aufgaben über Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften im Raume haben in der Regel die folgende Form: Auf einen starren Körper wirken Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$, die durch ihre Projektionen in zwei zueinander rechtwinklig gestellten Ebenen xy, xz gegeben sind. Die Kräftegruppe (P) soll ersetzt werden durch eine gleichwertige Gruppe $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$, deren Achsen $q_1, q_2, q_3 \dots$ entweder gegeben sind oder bestimmte Bedingungen zu erfüllen haben. Statt dessen kann die Aufgabe auch so gefaßt werden: Es sind unter den gegebenen Bedingungen die Kräfte Q zu bestimmen, die mit den *gewendeten* Kräften P eine *Gleichgewichtsgruppe* bilden. Aufgaben

der bezeichneten Art kommen nicht sehr häufig vor, und hierin liegt wohl ein Grund, weshalb sich dieser Teil der graphischen Statik verhältnismäßig wenig entwickelt hat. Der Hauptgrund liegt jedoch darin, daß sich die räumlichen Aufgaben für die graphische Behandlung weniger eignen. Es gelingt selten, der Zeichnung eine einfache und übersichtliche Form zu geben; in der Regel wird sie unübersichtlich und, was schlimmer ist, ungenau. In solchen Fällen ist die Rechnung vorzuziehen oder ein gemischtes Verfahren anzuwenden, d. h. die Zeichnung mit der Rechnung zu verbinden (vergl. Abhandlung XIV). Die in Betracht kommenden statischen Sätze sind in der Abhandlung I enthalten; sie mögen hier kurz wiederholt werden. Eine unbekannte Kraft Q , deren Achse q keine Bedingungen zu erfüllen hat, enthält *fünf* unbekannte Größen, z. B. die drei Projektionen der Kraft auf die Achsen x, y, z und die zwei Koordinaten ihrer Spur in der xy -Ebene. Die Anzahl der Unbekannten ist *vier*, wenn q eine gegebene Achse schneiden soll, *drei*, wenn die Achse q in einer gegebenen Ebene liegen oder durch einen gegebenen Punkt gehen soll, und *zwei*, wenn q in einer gegebenen Ebene liegen und durch einen bestimmten Punkt dieser Ebene gehen soll. Nur *eine* Unbekannte ist zu bestimmen, wenn die Kraftachse q gegeben ist.

Die Bedingungen der *Gleichwertigkeit* zweier Kräftegruppen (P) , (Q) werden dargestellt durch *sechs* Gleichungen, die z. B. fordern, daß in bezug auf die drei Achsen x, y, z die Projektionen und die Momente der beiden Gruppen übereinstimmen. Die Aufgabe, eine gegebene Kräftegruppe (P) durch eine andere Kräftegruppe (Q) zu ersetzen, ist daher nur dann *bestimmt*, wenn die Gruppe (Q) nicht mehr und nicht weniger als *sechs* voneinander unabhängige unbekannte Größen enthält. Daher ist es im allgemeinen Falle nicht möglich, eine gegebene Kräftegruppe (P) durch *eine* Kraft Q zu ersetzen. Dagegen ist die Aufgabe, (P) durch *zwei* Kräfte Q_1, Q_2 zu ersetzen, *unbestimmt*. Sie wird bestimmt, wenn Q_1 n und Q_2 $(6 - n)$ Unbekannte enthält. Wir erinnern ferner an folgende zwei Sätze: Gleichwertige Kräftegruppen haben gleiche geometrische Summen; und ferner: Sind zwei Kräftegruppen gleichwertig:

$$(P) \equiv (Q),$$

so bilden auch ihre rechtwinkligen Projektionen auf jede Ebene zwei gleichwertige Gruppen: $(P') \equiv (Q')$.

14. Kräftegruppen (P) , deren Achsen p in einem nicht unendlich fernen Punkte A sich schneiden. Eine solche Kräftegruppe läßt sich durch eine Einzelkraft Q ersetzen, die durch

den Punkt A geht (vergl. I, 24). Größe, Richtung und Sinn dieser Kraft wird durch die geometrische Summe der Gruppe (P) bestimmt. Es sind also in den beiden Projektionsebenen xy , xz die geometrischen Summen der Projektionen der gegebenen Kräfte P zu bilden, um die Projektionen Q' und Q'' der Kraft Q zu bestimmen.

15. Gruppen paralleler Kräfte. Die Bedingung des vorigen Abschnitts, daß die Einzelkraft Q , die der Gruppe der gegebenen parallelen Kräfte P gleichwertig ist, nach *Größe* und *Richtung* durch die geometrische Summe der Gruppe (P) zu bestimmen ist, bleibt bestehen. Die zweite Bedingung, daß die Kraft Q durch den unendlich fernen Schnittpunkt A der Kräfte P gehen muß, genügt jedoch nicht, um die *Lage* von Q zu bestimmen. Man muß daher in den beiden Projektionsebenen xy und xz durch *Seilpolygone* die Resultanten der gegebenen Kräfteprojektionen (P) , (P') bilden, um auch der *Lage* nach die Projektionen Q' , Q'' der Kraft Q zu ermitteln.

16. Eine Kräftegruppe (P) , die durch ihre Projektionen in den Ebenen xy und xz gegeben ist, zu ersetzen durch eine in der xy -Ebene liegende Kraft R in Verbindung mit einer zweiten, zur z -Achse parallel gerichteten Kraft Q :

$$R \pm Q \equiv (P).$$

Die Aufgabe ist *bestimmt*, weil jede der beiden Kräfte R und Q *drei* Unbekannte enthält. Man ersetzt jede der gegebenen Kräfte P in ihrem Schnittpunkt mit der xy -Ebene durch zwei Kräfte P_r , P_q , von denen erstere in der xy -Ebene liegt, während die zweite zur z -Achse parallel gerichtet ist. P_r ist die Projektion von P in der xy -Ebene, und P_q wird nach Größe und Sinn bestimmt durch die Projektion auf die z -Achse. Um darauf die beiden Kräfte

$$R \equiv (P_r) \quad \text{und} \quad Q \equiv (P_q)$$

zu bestimmen, sind *drei* Seilpolygone zu bilden: eins in der xy -Ebene zur Bestimmung der Resultanten R und zwei in den Ebenen xz und yz , welche nach Anleitung des Abschnitts 15 die Projektionen Q' und Q'' der Kraft Q bestimmen.

In den meisten Aufgaben, die sich auf die *Zusammensetzung* oder *Zerlegung* einer gegebenen Kräftegruppe (P) beziehen, empfiehlt es sich, die Gruppe zunächst durch die zwei Kräfte Q und R zu ersetzen. Man erreicht hierdurch den Vorteil, daß die geometrische Darstellung fast vollständig in der xy -Ebene ausgeführt werden kann. In den nächstfolgenden Abschnitten 17 bis 20 kommt dieses Verfahren zur Anwendung.

kann R im Punkt E durch die beiden Seitenkräfte K_2 und U_2 ersetzt werden. Demnach ist

$$K_1 = Q \sin \varphi = K \sin^2 \varphi, \quad U_1 = Q \cos \varphi = K \sin \varphi \cos \varphi$$

$$K_2 = R \cos \varphi = K \cos^2 \varphi, \quad U_2 = R \sin \varphi = K \sin \varphi \cos \varphi$$

$$K \pm U = Q \pm R = (K_1 \pm K_2) \pm (U_1 \pm U_2).$$

Die beiden Kräfte U_1 und U_2 sind der Größe nach gleich, dem Sinne nach einander entgegengesetzt. Sie bilden also das zu K normal gestellte Kräftepaar U , dessen Moment die Größe

$$U_1 \cdot \overline{CE} = K \cdot \overline{CE} \sin \varphi \cos \varphi = K \cdot \overline{JD}$$

hat. K bildet die Mittelkraft der beiden parallelen Kräfte K_1 , K_2 . Die Spur D der Kraft K in der xy -Ebene wird daher bestimmt durch die Bedingung

$$ED : \overline{DC} = K_1 : K_2 = \sin^2 \varphi : \cos^2 \varphi.$$

In Uebereinstimmung mit Abb. 54 ist also

$$\overline{ED} = \overline{EC} \sin^2 \varphi \quad \text{und} \quad \overline{DC} = \overline{EC} \cos^2 \varphi.$$

18. Eine gegebene Kräftegruppe $(P) \equiv Q \pm R$ zu ersetzen durch eine Kraft K , die durch einen gegebenen Punkt A geht, in Verbindung mit einem Kräftepaar U . Jede der beiden Kräfte K und U enthält drei Unbekannte, die

Aufgabe ist daher *bestimmt*.

Man legt in Abb. 56 durch den gegebenen Punkt A parallel zur geometrischen Summe von Q und R die Gerade AC , welche die xy -Ebene im Punkt C schneidet. Durch diesen Punkt C werden die Kräfte der beiden Gleichgewichtsgruppen:

$$Q_1 \pm Q_2 \equiv 0$$

$$\text{und} \quad R_1 \pm R_2 \equiv 0$$

gelegt. Die Kräfte Q_1 und R_1 haben Größe, Richtung

und Sinn der Kräfte Q und R . Da durch Hinzufügung der beiden Gleichgewichtsgruppen die gegebene Kräftegruppe nicht geändert wird, so ist

$$K \pm U \equiv Q \pm R \equiv (Q_1 \pm R_1) \pm (Q_2 \pm R_2).$$

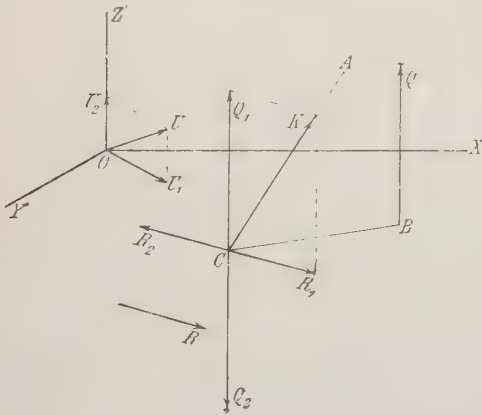


Abb. 56.

Die Kräfte $(Q \pm Q_2)$ und $(R \pm R_2)$ bilden zwei Kräftepaare; daher ist

$$K \equiv Q_1 \pm R_1$$

und

$$U \equiv (Q \pm Q_2) \pm (R \pm R_2).$$

Die Momentenstrecken U_1 und U_2 der beiden Kräftepaare $(Q \pm Q_2)$ und $(R \pm R_2)$ werden in irgend einem Punkt O zur Momentenstrecke des Kräftepaares U zusammengesetzt:

$$U \equiv U_1 \pm U_2.$$

19. Eine gegebene Kräftegruppe $(P) \equiv Q \pm R$ zu ersetzen durch eine Kraft T in Verbindung mit einer Kraft S , deren Achse s gegeben ist. Die Aufgabe ist *bestimmt*, weil T fünf und S eine Unbekannte enthält. A und B (Abb. 57) bezeichnen die Spuren der Achsen q und s in der xy -Ebene. In bezug auf die Achse AB sind die Momente der drei Kräfte Q , R , S gleich null; daher muß die Spur D der vierten Kraft T auch auf AB liegen. Die Kräfte S und T können ersetzt werden durch je zwei Seitenkräfte

$$S \equiv S_1 \pm S_2$$

$$T \equiv T_1 \pm T_2,$$

von denen S_1 und T_1 in

der xy -Ebene liegen, während S_2 und T_2 zur Kraft Q parallel gerichtet sind. Hierdurch entstehen die gleichwertigen Gruppen

$$R \equiv S_1 \pm T_1, \quad Q = S_2 \pm T_2.$$

Um den Punkt D zu bestimmen, bezeichnen wir die Momente der Kräfte Q , R , S_1 , S_2 in bezug auf diesen Punkt mit M_q , M_r , M_1 , M_2 . Die Gleichwertigkeit der oben bezeichneten Kräftegruppen fordert

$$M_q = M_2 \quad \text{und} \quad M_r = M_1,$$

folglich

$$0 = M_r - \frac{M_1}{M_2} \cdot M_q.$$

Diese Bedingung bleibt bestehen, wenn angenommen wird, daß die Kräfte Q und S_2 der Abb. 57 in der xy -Ebene liegen, weil

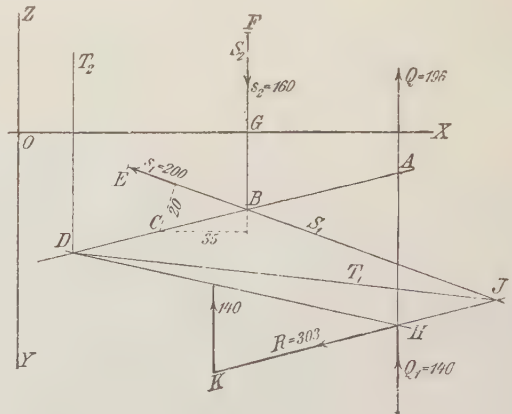


Abb. 57.

die Momente hierdurch nicht geändert werden. Legt man auf die Kraft Q eine Kraft Q_1 von der Größe

$$Q_1 = -Q \frac{M_1}{M_2},$$

so fordert die vorstehende Bedingung, daß der Momentenpunkt D auf der Mittelkraft von R und Q_1 liegt. Das Verhältnis $M_1 : M_2$ wird durch die gegebene Lage der Achse s bestimmt. Im vorliegenden Beispiel erhält S_2 die Größe

$$s_2 = \overline{FG} = 160,$$

wenn willkürlich gewählt wird

$$S_1 = s_1 = \overline{BE} = 200.$$

Das Verhältnis $M_1 : M_2$ ist unabhängig von der Wahl des Momentenpunktes C auf der Geraden AB . Für diesen Punkt ergeben die in die Zeichnung eingeschriebenen Abmessungen das Verhältnis

$$M_1 : M_2 = -200 \cdot 20 : +160 \cdot 35 = -5 : +7.$$

Demnach ist

$$Q_1 = -\frac{M_1}{M_2} \cdot Q = +\frac{5}{7} \cdot 196 = +140.$$

Das positive Vorzeichen gibt an, daß Q_1 den Sinn von Q hat. Die Zusammensetzung der beiden Kräfte

$$R = 303 \quad \text{und} \quad Q_1 = 140$$

ergibt die Lage der Mittelkraft und hierdurch die Spur D der Kraft T . Hierauf können die beiden Kräftegruppen

$$R = S_1 \mp T_1 \quad \text{und} \quad Q = S_2 \mp T_2$$

gebildet werden.

20. Eine gegebene Kräftegruppe $(P) \equiv Q \mp R$ zu ersetzen durch eine Kraft S , die in einer gegebenen Ebene s liegt, in Verbindung mit einer Kraft T , die durch einen gegebenen Punkt T_0 geht. Jede der beiden Kräfte S und T enthält drei unbekannte Größen. Man bildet in den Abb. 58 und 59 die beiden Kräftegruppen

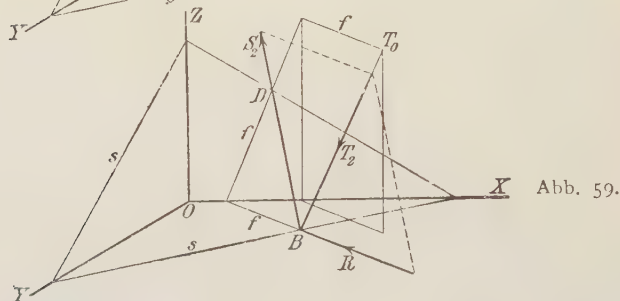
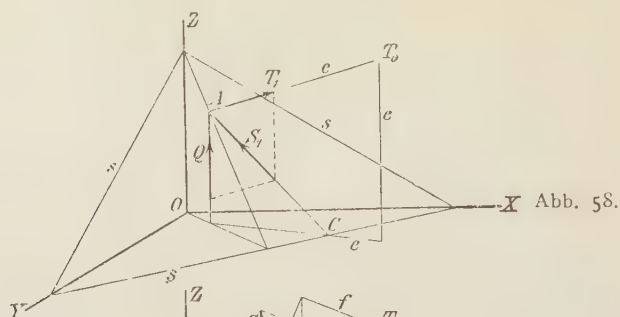
$$Q \equiv S_1 \mp T_1 \quad \text{und} \quad R \equiv S_2 \mp T_2,$$

von denen S_1 und S_2 in der Ebene s liegen und T_1 und T_2 durch den Punkt T_0 gehen. Darauf ergeben sich die beiden zu bestimmenden Kräfte S und T durch die Zusammensetzungen

$$S_1 \mp S_2 \equiv S \quad \text{und} \quad T_1 \mp T_2 \equiv T.$$

In Abb. 58 bezeichnet A den Schnittpunkt der Kraft Q mit der Ebene s und e die durch den Punkt T_0 und die Kraft Q gelegte Ebene. Die beiden Ebenen s und e schneiden sich in der Geraden AC , mit der die Kraft S_1 zusammenfällt, während die Lage der

Kraft T_1 durch die Gerade AT_0 bestimmt wird. In Abb. 59 bezeichnet B den Schnittpunkt der Kraft R mit der Ebene s und f die durch R und T_0 gelegte Ebene, welche die Ebene s in der



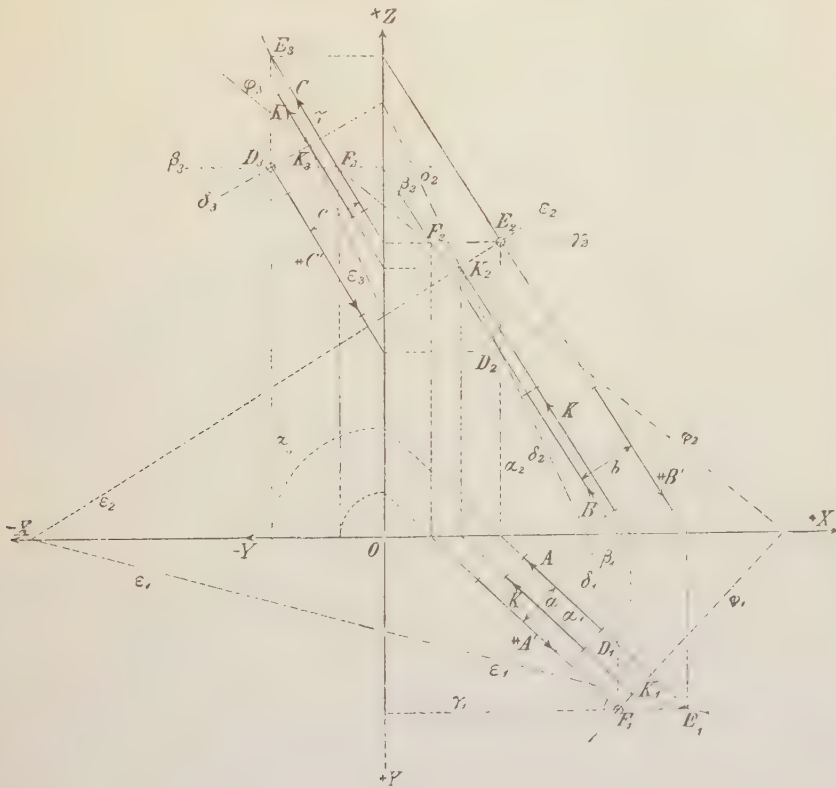
Geraden BD schneidet. Die Kräfte S_2 und T_2 fallen mit der Geraden BD und BT_0 zusammen.

Die in den Abschnitten 17 bis 20 behandelten Aufgaben werden in den folgenden Abschnitten auf einem anderen Wege gelöst, wobei die in der Abhandlung I gewonnenen Hilfsmittel zur Anwendung kommen.

21. Eine gegebene Kräftegruppe (P) zu ersetzen durch eine Kraft K in Verbindung mit einem Kräftepaar U , dessen Ebene senkrecht zu K gestellt ist. Die Achse k der Kraft K heißt die *Schraubenachse* oder die *Zentralachse* der mit (P) gleichwertigen Kräftegruppen (I, 29). Die Lösung zerfällt in zwei Teile.

Die Bestimmung der Kraft K . Man projiziere die gegebenen Kräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$ der Gruppe (P) auf die Ebenen xy, xz, yz eines rechtwinkligen Koordinatensystems und bestimme die Resultanten A, B, C dieser drei Projektionsgruppen. In Abb. 60 sind nur diese drei Kräfte: A in der xy -Ebene, B in der xz -Ebene und C in der yz -Ebene dargestellt; um die Zeichnung nicht zu überladen, wurden die Kräfte P fortgelassen. Die Kräfte A, B, C stimmen nach Größe, Richtung und Sinn, nicht aber der Lage nach

mit den Projektionen der Kraft K überein; denn K bildet die geometrische Summe der Kräfte P , während A , B , C die geometrischen Summen ihrer Projektionen angeben. Die durch je zwei Projektionen A und B , A und C , B und C bestimmten Kräfte D , E , F haben demnach Größe, Richtung und Sinn der Kraft K und liegen in den Kanten eines dreiseitigen Prismas, durch welches die



L. Abb. 60.

Lage der Kraft K in folgender Weise bestimmt wird: *die drei Ebenen, welche durch die Kanten D , E , F senkrecht zu den gegenüberliegenden Seitenflächen des Prismas gelegt werden, schneiden sich in der Achse k der Kraft K .* Um diese Behauptung zu beweisen, haben wir folgende Betrachtung anzustellen, wobei wir auf die Abb. 60 und 61 Bezug nehmen. Abb. 60 gibt die Darstellung in rechtwinkliger Projektion; übersichtlicher ist Abb. 61 in axonometrischer Darstellung, in der aber nur die Lagen der Kräfte, nicht ihre Größen angegeben sind. Die Ebenen der Kräfte ADE , BDE , CDE ,

CEF sind mit α , β und γ bezeichnet. Die Spuren der Ebenen und Kräfte tragen in den Projektionsebenen xy , xz , yz die Kennziffern 1, 2, 3. Wir bezeichnen mit A' , B' , C' die dritten Projektionen der Kräfte D , E , F , so daß D durch die drei Projektionen A , B , C' , ferner E durch die Projektionen A , B' , C und F durch A' , B , C bestimmt wird. Mit diesen Kräften lassen sich die folgenden gleichwertigen Kräftegruppen bilden:

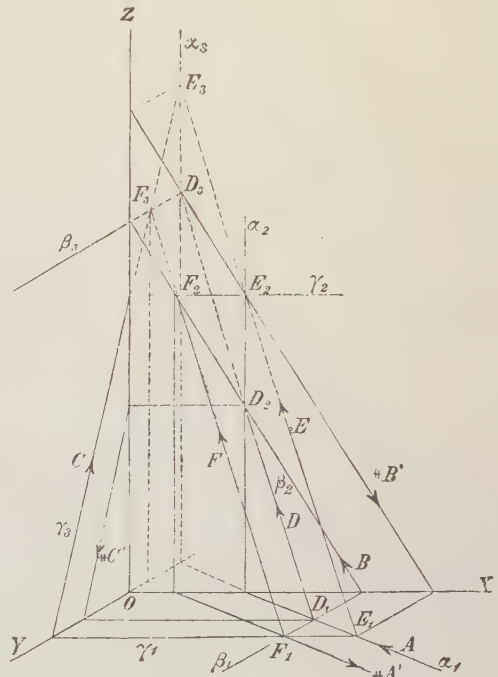
$$(P) \quad K \mp U \mp D \mp C' \\ ++ C' \quad E \mp B ++ B' \quad F' \\ \mp A ++ A';$$

denn diese Gruppen haben in bezug auf jede der drei Koordinatenachsen x , y , z gleiche Projektionen und gleiche Momente. Es ist hierbei zu beachten, daß die Momentensummen von D und $++ C'$ für die Achse x , von E und $++ B'$ für die Achse y und von F und $++ A'$ für die Achse z gleich null sind. Aus den vorstehenden gleichwertigen Kräftegruppen ergeben sich die folgenden, aus je drei Kräftepaaren gebildeten Gleichgewichtsgruppen:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (K ++ D) \mp U \mp (C' ++ C) \\ 0 &\equiv (K ++ E) \mp U \mp (B' ++ B) \\ 0 &\equiv (K ++ F) \mp U \mp (A' -- A). \end{aligned}$$

Die Ebenen (K, D) , (K, E) , (K, F) sind in Abb. 60 mit δ , ε , φ bezeichnet. Die durch irgend einen Punkt gelegten Ebenen dreier Kräftepaare, die eine Gleichgewichtsgruppe bilden, schneiden sich in *einer* Geraden; denn die Achse, in der zwei dieser Ebenen sich schneiden, ist eine Nullachse der beiden Kräftepaare und muß daher auch in der Ebene des dritten Paares liegen (I, 17). Wir fassen beispielsweise die zweite Gruppe

$$0 \equiv (K ++ E) \mp U \mp (B' ++ B)$$



L. Abb. 61r.

parallel gerichtete Hauptmomentenachse des Kräftepaars U zu projizieren. In der Zeichnung sind zur Probe auch die Hauptmomentenstrecken $M_y = Bb$, $M_x = Cc$ und deren Projektionen auf M gebildet worden. Beim Auftragen der Hauptmomentenstrecken M_x , M_y , M_z ist deren *Sinn* zu beachten. Im vorliegenden Beispiel (Abb. 60, 62) ist das Moment von $(U + C')$ für die Achse x negativ, das Moment von $(B + B')$ für die Achse y ebenfalls negativ und das Moment von $(A + A')$ für die Achse z positiv; daher waren M_x und M_y im Sinne der negativen Achsen x , y , die Strecke M_z dagegen im Sinne der positiven Achse z aufzutragen. Werden alle drei Momentenstrecken

$$M_x = OC_x, \quad M_y = OB_y, \quad M_z = OA_z$$

nach einem willkürlich gewählten Maßstabe aufgetragen, so ergibt sich noch eine Probe für die Richtigkeit und Genauigkeit der Zeichnung: da die Hauptmomentenstrecke M des Kräftepaars U die gemeinschaftliche Projektion der drei Strecken M_x , M_y , M_z bildet, so muß die Ebene $A_z B_y C_x$ rechtwinklig zur Kraft K gestellt sein.

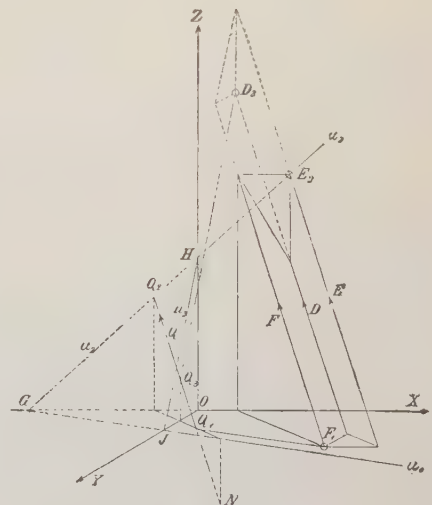
22. Eine gegebene Kräftegruppe (P) zu ersetzen durch eine Kraft Q , die durch einen gegebenen Punkt N geht, in Verbindung mit einem Kräftepaar U_1 (Abb. 63). Die Kraft Q hat Größe, Richtung und Sinn der geometrischen Summe der gegebenen Kräftegruppe (P), also der Kräfte D , E , F , die nach Anleitung des vorigen Abschnitts bestimmt werden. Durch den gegebenen Punkt N ist auch die *Lage* der Kraft Q bestimmt.

Um ferner das Kräftepaar U_1 zu bestimmen, bildet man aus den gleichwertigen Kräftegruppen

$$\begin{aligned} (P) &= Q + U_1 - F \\ &+ (A + A') \equiv (B + B') \\ &\equiv D + (C + C') \end{aligned}$$

die aus je drei Kräftepaaren zusammengesetzten Gleichgewichtsgruppen:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (Q + F) + U_1 + (A' + A) \\ 0 &\equiv (Q + E) + U_1 + (B' + B) \\ 0 &\equiv (Q + D) + U_1 + (C' + C). \end{aligned}$$



L. Abb. 63.

Die Ebene (Q, F) schneidet die Ebene (A', A) , d. i. die xy -Ebene, in der Geraden $Q_1 F_1$, zu der die Spur u_1 der Ebene u des Kräftepaares U_1 parallel gerichtet ist, weil die drei Ebenen der Kräftepaare $(Q \mp F)$, U_1 und $(A' \mp A)$ in parallelen Geraden sich schneiden müssen. Ebenso ist die Richtung der Spur u_2 durch die Gerade $Q_2 F_2$ und die Richtung der Spur u_3 durch die Gerade $Q_3 D_3$ bestimmt. In der Zeichnung ist die Ebene u durch den Punkt E_2 gelegt.

Die zur Ebene u senkrecht gerichtete Hauptmomentenstrecke M_1 des Kräftepaares U_1 wird bestimmt durch die Bedingung, daß in Abb. 62 die Momentenstrecke M die rechtwinklige Projektion der Strecke M_1 bildet. Auf der durch den Punkt O (Abb. 62) senkrecht zur Ebene u gelegten Geraden wird also von der Ebene $A_z B_y C_x$ die Strecke U_1 abgeschnitten; denn projiziert man die beiden gleichwertigen Kräftegruppen

$$Q \mp U_1 \equiv K \mp U$$

auf die Ebene von U , so müssen sich, da die Projektionen von Q und K verschwinden, als Projektionen zwei gleichwertige Kräftepaare ergeben. Die beschriebene Bestimmung von M_1 ist in Abb. 62 nicht ausgeführt worden, um die Zeichnung nicht zu überladen.

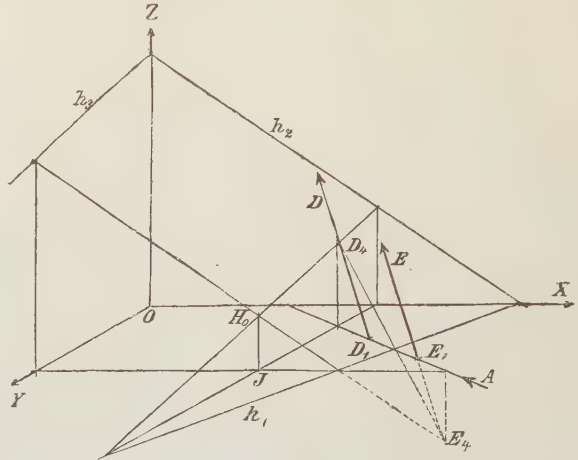
23. Eine gegebene Kräftegruppe (P) zu ersetzen durch ein in einer gegebenen Ebene u liegendes Kräftepaar U_1 in Verbindung mit einer Kraft Q (Abb. 63). Nach dem vorigen Abschnitt ist die Ebene (Q, F) parallel gestellt zur gegebenen Spur u_1 , ferner die Ebene (Q, E) parallel zur Spur u_2 und die Ebene (Q, D) parallel zur Spur u_3 . Hierdurch wird die Lage der unbekannten Kraft Q bestimmt. Die Größen von Q und U_1 ergeben sich wie im vorigen Abschnitt.

24. Den Nullpunkt H_0 einer gegebenen Ebene h in bezug auf eine gegebene Kräftegruppe (P) zu bestimmen (Abb. 64). Da

$$(P) \equiv F \mp (A \mp A') \equiv E \mp (B \mp B') \equiv D \mp (C \mp C')$$

ist, so liegen die Nullpunkte aller zu den Koordinatenebenen xy , xz , yz parallel gestellten Ebenen auf den Achsen der Kräfte F , E , D . Beispielsweise ist F_1 (Abb. 60) der Nullpunkt der Ebene xy ; denn jede durch diesen Punkt gelegte Gerade der xy -Ebene schneidet nicht nur die Kraft F , sondern auch die unendlich ferne Resultante des Kräftepaares $(A \mp A')$. In Abb. 64 sind nur die beiden Kräfte D und E eingetragen. Die durch ihre Spuren h_1 , h_2 , h_3 gegebene Ebene h wird von den Kräften D und E in den Punkten D_4 und E_4 geschnitten. D_4 ist der Nullpunkt der zu yz parallel gestellten

Ebene $D_4 H_0 J$; denn jede in dieser Ebene durch den Punkt D_4 gelegte Gerade schneidet nicht nur die Kraft D , sondern auch die unendlich ferne Resultante des Kräftepaares $(C + C')$. Ebenso ist E_4 der Nullpunkt der zu xz parallel gestellten Ebene $E_4 H_0 J$. Der gesuchte Nullpunkt H_0 der gegebenen Ebene h ist der Schnittpunkt der drei Ebenen h , $D_4 H_0 J$ u. $E_4 H_0 J$, weil die in der Ebene h liegenden zwei Achsen $D_4 H_0$ und $E_4 H_0$ Nullachsen der Kräftegruppe (P) sind (I, 9).



L Abb. 64.

25. Die Nullebene h eines gegebenen Punktes H_0 in bezug auf eine gegebene Kräftegruppe (P) zu bestimmen (Abb. 64). Man legt durch den gegebenen Punkt H_0 drei Ebenen parallel zu den Projektionsebenen yz , xz , xy . Die erste dieser Ebenen schneidet die Kraft D im Punkt D_4 , die zweite E im Punkt E_4 und die dritte F im Punkt F_4 . Nach dem vorigen Abschnitt sind die Achsen $H_0 D_4$, $H_0 E_4$ und $H_0 F_4$ Nullachsen der gesuchten Ebene h und zu den Spuren h_3 , h_2 , h_1 parallel gerichtet. Es genügt, wie in Abb. 64 geschehen ist, nur zwei Nullachsen $H_0 D_4$ und $H_0 E_4$ aufzutragen.

26. Eine gegebene Kräftegruppe (P) durch zwei Kräfte G , H zu ersetzen; die Kraft H soll in einer gegebenen Ebene h liegen, während die Kraft G durch einen gegebenen Punkt G_0 gehen soll, der nicht in der Ebene h liegt. Wir entnehmen aus dem Abschnitt 26 der Abhandlung I die Bedingungen, daß die Kraft G durch den Nullpunkt H_0 der gegebenen Ebene h gehen muß, und daß die Kraft H in der Nullebene g des gegebenen Punktes G_0 liegen muß. G fällt also mit der Geraden $G_0 H_0$ und H mit dem Schnitt der beiden Ebenen g und h zusammen. Nachdem die Lagen der beiden Kräfte nach Anleitung der Abschnitte 24 und 25

bestimmt worden sind, ergeben sich Größe und Sinn derselben aus der Bedingung, daß ihre geometrische Summe mit der bekannten Kraft K übereinstimmen muß:

$$G \pm H \equiv K.$$

Demnach müssen die drei Kräfte G , H und K zu *einer* Ebene parallel gerichtet sein, was für die Richtigkeit der Zeichnung zur Probe dienen kann.

27. Eine gegebene Kräftegruppe (P) durch zwei Kräfte G , H zu ersetzen; die Kraft G soll mit einer gegebenen Achse g zusammenfallen. Die Lage der Kraft H wird bestimmt durch die Schnittachse h der Nullebenen aller auf der Achse g liegenden Punkte (I, 26). Nachdem die Achse h durch *zwei* der bezeichneten Nullebenen bestimmt worden ist, ergeben sich Größe und Sinn der beiden Kräfte G , H wie im Abschnitt 26 aus der Bedingung:

$$G \pm H \equiv K.$$

28. Literarische Notizen. Bei Abfassung der vorstehenden Abhandlung wurden die folgenden Aufsätze benutzt:

1. *Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerksträger*; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1874, S. 230. Dieser Aufsatz behandelt u. a. die im Abschnitt 4 und in den Abb. 8 bis 13 dargestellten Aufgaben.

2. *Eine Aufgabe der graphischen Statik*; Zivilingenieur 1886, S. 535; bezieht sich auf die Aufgabe des Abschnitts 6: Ein Seilpolygon durch drei Punkte zu legen.

3. *Technische Mechanik*; nach den Vorlesungen von Mohr bearbeitet und 1877 herausgegeben vom Ingenieur-Verein am Polytechnikum in Stuttgart; behandelt auf Seite 205 die im Abschnitt 9 beschriebene erste Aufgabe, Abb. 30 bis 32.

4. *Beitrag zur Theorie der Träger*; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1899, S. 586; enthält die im Abschnitt 9 beschriebene und in den Abb. 36 bis 46 dargestellte Aufgabe.

5. *Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen*; Hannoversche Zeitschrift 1870, S. 41; behandelt die Aufgabe des Abschnitts 12, Abb. 52 und 53.

6. *Ueber die Zusammensetzung der Kräfte im Raume*; Zivilingenieur 1876, S. 121; behandelt ausführlicher den Gegenstand der Abschnitte 21 bis 27 und der Abb. 60 bis 64.

7. *Graphische Zusammensetzung von räumlichen Kräftegruppen*; Zeitschrift für Mathematik und Physik 1911, S. 431.

Varignon, Nouvelle mécanique ou statique, Paris 1725, war der erste, der das Seilpolygon für die Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene und für die Darstellung der Gleichgewichtsbedingungen benutzte.

Culmann, Graphische Statik, Zürich 1866, erkannte zuerst die allgemeine Anwendbarkeit des Kräftepolygons und des Seilpolygons für die Lösung statischer Aufgaben. Er wurde hierdurch zum Begründer der graphischen Statik. Von ihm stammt die in den Abschnitten 7 und 8 beschriebene Darstellung der statischen Momente und der Biegemomente mittels des Seilpolygons. Sein Buch gibt zahlreiche *Anwendungen* auf die Aufgaben des Ingenieurwesens, die in der vorliegenden Abhandlung nicht in Betracht kommen und daher hier übergangen werden.

Ausführliche Literaturangaben über die graphische Statik und ihre Anwendungen finden sich in dem von *Henneberg* bearbeiteten Abschnitt IV, 5 der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften: *Die graphische Statik der starren Körper*; ferner in dem Buche von *Henneberg: Die graphische Statik der starren Systeme*. Leipzig 1911.

Abhandlung III.

Die Geometrie der Massen.

A. Die Momente ersten Grades einer Gruppe von materiellen Punkten.

1. Der Schwerpunkt einer Punktgruppe. Wir bezeichnen mit $A_1, A_2, A_3 \dots$ eine Gruppe von starr miteinander verbundenen Punkten, deren Massen die Größen $m_1, m_2, m_3 \dots$ haben. Der Begriff *Masse* braucht hier nicht näher erläutert zu werden; es genügt die Angabe, daß man unter Massen *unveränderliche positive* Werte versteht, die den Punkten beigelegt werden. Mit M wird die Summe der Massen aller Punkte, also die Gesamtmasse der Punktgruppe, bezeichnet. Es sei u irgend eine Achse und (u) eine zur Achse u rechtwinklig gestellte Ebene, in bezug auf welche die Ordinaten der Massenpunkte $A_1, A_2, A_3 \dots$ die algebraischen Werte $u_1, u_2, u_3 \dots$ haben. Die Ordinaten sind positiv, wenn sie den Sinn der Achse u haben. Unter dem *Moment ersten Grades der Punktgruppe in bezug auf die Ebene (u)* versteht man die *algebraische* Summe der Produkte aus der Masse m eines jeden Punktes und seiner Ordinate u :

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + \dots = \Sigma m u.$$

Der Punkt S von der Masse M , dessen Moment in bezug auf *jede* Ebene gleich dem Moment der Punktgruppe ist, wird der *Schwerpunkt* der Gruppe genannt. Daß ein solcher Punkt, und zwar nur *ein* Punkt von dieser Beschaffenheit, vorhanden ist, erkennt man auf folgendem Wege. Werden in bezug auf irgend ein rechtwinkliges Koordinatensystem die Koordinaten der Punkte $S, A_1, A_2 \dots$ mit

$(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \dots$ bezeichnet, so ist nach der obigen Erklärung der Punkt S bestimmt durch die drei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} Mx_0 &= m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots = \Sigma m x \\ My_0 &= m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots = \Sigma m y \\ Mz_0 &= m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots = \Sigma m z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Zwischen den Koordinaten x, y, z eines Punktes und seiner Ordinate u in bezug auf irgend eine gegebene Ebene (u) besteht eine algebraische Beziehung von der Form

$$u = a + bx + cy + dz,$$

in der a, b, c, d unveränderliche Größen bezeichnen. Das Moment ersten Grades der Punktgruppe in bezug auf die Ebene (u) hat also den Wert:

$$\Sigma mu = a \Sigma m + b \Sigma mx + c \Sigma my + d \Sigma mz$$

oder nach den Gleichungen 1):

$$\Sigma mu = M(a + bx_0 + cy_0 + dz_0) = Mu_0, \quad (2)$$

wenn mit u_0 die Ordinate des Punktes S in bezug auf die Ebene (u) bezeichnet wird.

Unter dem *Schwerpunkt eines Körpers* versteht man den Schwerpunkt einer Punktgruppe, welche entsteht, wenn man den Körper in unendlich kleine Teile zerlegt und jeden Teil durch einen Punkt ersetzt, dem die Masse des Teiles beigelegt wird. Der Körper heißt *gleichartig*, wenn die Masse des Punktes dem *Rauminhalt* des Körperteiles proportional ist. In ähnlicher Weise spricht man von den Schwerpunkten gleichartiger und nicht gleichartiger Flächen und Linien. Im folgenden ist nur von gleichartigen Gebilden die Rede.

2. Der Schwerpunkt der Projektion einer Punktgruppe. Wenn man den rechtwinkligen Projektionen der Punkte $A_1, A_2, A_3 \dots$ auf irgend eine Ebene, z. B. die xy -Ebene, oder auf irgend eine Achse x die Massen $m_1, m_2, m_3 \dots$ jener Punkte beilegt, so fällt der Schwerpunkt S' der Projektionen mit der Projektion des Schwerpunktes zusammen. Denn die Koordinaten x', y', z' des Schwerpunktes S' sind den Gleichungen 1) zufolge im ersten Falle:

$$x' = \frac{\Sigma mx}{M} = x_0, \quad y' = \frac{\Sigma my}{M} = y_0, \quad z' = 0$$

und im zweiten Falle

$$x' = \frac{\Sigma mx}{M} = x_0, \quad y' = 0, \quad z' = 0.$$

3. Graphische Bestimmung des Schwerpunktes einer Punktgruppe.

Erstes Verfahren. Um die Ordinate x_0 des Schwerpunktes einer gegebenen Punktgruppe zu bestimmen, projiziert man jeden Punkt A_1 auf die x -Achse und legt durch die Projektion des Punktes eine Kraft von der Richtung und dem Sinne der y -Achse und von einer Größe, die ebensoviel Krafteinheiten enthält, wie die Masse m_1 des Punktes Masseneinheiten hat. Die durch ein Seilpolygon zu bestimmende Resultante der Parallelkräfte geht durch die Projektion des Schwerpunktes S auf die x -Achse. Denn die Gleichung

$$Mx_0 = m_1x_1 + m_2x_2 + \dots = \Sigma mx$$

kann aufgefaßt werden als die Momentengleichung in bezug auf den Anfangspunkt der Koordinaten, welche ausdrückt, daß das statische Moment der Resultanten M der Summe der statischen Momente der Parallelkräfte $m_1, m_2 \dots$ gleich ist.

Der Schwerpunkt einer räumlichen Punktgruppe wird demnach durch *drei* und der einer ebenen Gruppe durch *zwei* Seilpolygone bestimmt.

Zweites Verfahren. Wir bezeichnen mit $a_1, a_2, a_3 \dots$ die Strecken $AA_1, AA_2, AA_3 \dots$ vom Anfangspunkt A der Koordinaten nach den Punkten $A_1, A_2, A_3 \dots$ und mit a_0 die Strecke AS . Die drei Gleichungen:

$$x_0 = \frac{m_1}{M} x_1 + \frac{m_2}{M} x_2 + \dots$$

$$y_0 = \frac{m_1}{M} y_1 + \frac{m_2}{M} y_2 + \dots$$

$$z_0 = \frac{m_1}{M} z_1 + \frac{m_2}{M} z_2 + \dots$$

sind gleichbedeutend mit dem Ausdruck:

$$a_0 = \frac{m_1}{M} a_1 + \frac{m_2}{M} a_2 + \dots$$

welcher angibt, daß die Strecke a_0 die *geometrische Summe* der Strecken $\frac{m_1}{M} a_1, \frac{m_2}{M} a_2 \dots$ bildet; denn es ist zu beachten, daß in bezug auf die Koordinatenachsen x_0, y_0, z_0 die Projektionen der Strecke a_0 , ferner x_1, y_1, z_1 die Projektionen der Strecke a_1 usf. bezeichnen. Der Schwerpunkt einer *ebenen* Punktgruppe wird so-

nach durch ein Summierungspolygon bestimmt. Für eine räumliche Punktgruppe sind zwei Projektionen dieses Polygons aufzutragen. Die Abb. 1 zeigt ein Beispiel. Die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, S haben die Massen 3, 2, 6, 5, 16 und liegen in der Bildebene. Das Summierungspolygon $ACDES$ zur Bestimmung des Schwerpunktes S besteht also aus den Strecken: AC, CD, DE, ES , welche Richtung und Sinn der Strecken AA_1, AA_2, AA_3, AA_4 und die Größen:

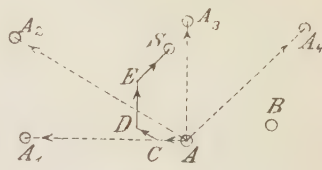


Abb. 1

$$AC = \frac{3}{16} AA_1, \quad CD = \frac{2}{16} AA_2, \quad DE = \frac{6}{16} AA_3, \\ ES = \frac{5}{16} AA_4$$

haben.

Daß die Wahl des Anfangspunktes A des Summierungspolygons ohne Einfluß ist auf die Lage des Endpunktes S , ergibt sich auch auf geometrischem Wege aus folgender Ueberlegung. Wählt man als Anfangspunkt anstatt A irgend einen anderen Punkt B und bezeichnet die Strecken $BA, BS, BA_1, BA_2 \dots$ mit $b, b_0, b_1, b_2 \dots$, so ist:

$$b \equiv \frac{m_1}{M} b \mp \frac{m_2}{M} b \mp \dots = \frac{M}{M} b,$$

folglich:

$$a_0 \mp b \equiv \frac{m_1}{M} (a_1 \mp b) \mp \frac{m_2}{M} (a_2 \mp b) \mp \dots$$

oder:

$$b_0 \equiv \frac{m_1}{M} b_1 \mp \frac{m_2}{M} b_2 \mp \dots$$

4. Zerlegung einer Punktgruppe in Teilgruppen. Zerlegt man eine gegebene Punktgruppe in Teilgruppen 1, 2, 3 ... mit den Schwerpunkten $S_1, S_2, S_3 \dots$, so fällt der Schwerpunkt der Punkte $S_1, S_2, S_3 \dots$ mit den Massen $M_1, M_2, M_3 \dots$ zusammen mit dem Schwerpunkt S der ganzen Gruppe, wie aus den Gleichungen 1) ohne weiteres folgt. Liegen die Punkte $S_1, S_2, S_3 \dots$ in einer Ebene oder auf einer Achse, so liegt auch S in dieser Ebene oder auf dieser Achse. Solche Ebenen und Achsen werden *Schwerebenen* und *Schwerachsen* der Punktgruppe genannt.

Beispiele: Die Achse AD , welche die Ecke A einer gleichartigen Dreiecksfläche ABC mit dem Halbierungspunkt D der

Seite BC verbindet, ist eine Schwerachse des Dreiecks, weil die Schwerpunkte der unendlich dünnen Streifen von der Richtung BC , in die man die Dreiecksfläche zerlegen kann, auf AD liegen.

Die Achse AS_1 , welche die Spitze einer gleichartigen Pyramide mit dem Schwerpunkt S_1 ihrer Grundfläche verbindet, ist eine Schwerachse, weil die Schwerpunkte der zur Grundfläche parallel gestellten unendlich dünnen Schichten, in die man die Pyramide zerlegen kann, auf jener Achse liegen.

Jede Symmetrieebene eines gleichartigen Körpers ist eine Schwereebene, jede Symmetrieachse eine Schwerachse. Der Schwerpunkt wird also durch zwei Symmetrieachsen bestimmt.

5. Gleichwertige Punktgruppen. Man nennt bei Schwerpunktsbestimmungen zwei Punktgruppen *gleichwertig*, wenn ihre Schwerpunkte zusammenfallen und gleiche Massen haben. Eine gerade Linie AB von der Masse M ist gleichwertig den zwei Punkten A, B , wenn jedem die Masse $\frac{M}{2}$ beigelegt wird. Eine Dreiecksfläche ABC von der Masse M ist gleichwertig den drei Punkten A, B, C von den Massen $\frac{M}{3}$. Ein Tetraeder $ABCD$ von der Masse M ist gleichwertig den vier Punkten A, B, C, D von den Massen $\frac{M}{4}$.

Als Beispiel der Anwendung wählen wir die Bestimmung des Schwerpunktes einer Trapezfläche $ABCD$ (Abb. 2). Wir zerlegen diese Fläche erstens durch die Diagonale AC in die beiden

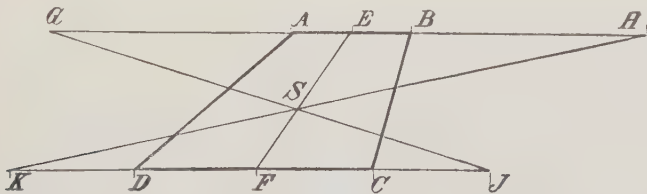


Abb. 2.

Dreiecke ABC, ADC von den Massen M_1, M_2 , zweitens durch die Diagonale BD in die Dreiecke ABD, BCD von den ebenso großen Massen M_1, M_2 . Bei der ersten Zerlegung ist die Trapezfläche gleichwertig den vier Punkten A, B, C, D , deren Massen in

dieser Reihenfolge die Größen $\frac{M_1 + M_2}{3}$, $\frac{M_1}{3}$, $\frac{M_1 + M_2}{3}$, $\frac{M_2}{3}$ haben. Bei der zweiten Zerlegung erhalten die vier dem Trapez gleichwertigen Punkte A, B, C, D die Massen $\frac{M_1}{3}$, $\frac{M_1 + M_2}{3}$, $\frac{M_2}{3}$, $\frac{M_1 + M_2}{3}$. Legt man die beiden Gruppen aufeinander und halbiert ihre Massen, so entsteht eine dritte dem Trapez gleichwertige Punktgruppe A, B, C, D von den Massen $\frac{2 M_1 + M_2}{6}$, $\frac{2 M_1 + M_2}{6}$, $\frac{M_1 + 2 M_2}{6}$, $\frac{M_1 + 2 M_2}{6}$. Die beiden Punkte A, B dieser Gruppe haben gleiche Massen und können also durch den Halbierungspunkt E der Strecke AB ersetzt werden, wenn diesem Punkte die Masse $\frac{2 M_1 + M_2}{3}$ beigelegt wird. Ebenso ersetzt man die Punkte C, D durch den Halbierungspunkt F der Strecke CD von der Masse $\frac{M_1 + 2 M_2}{3}$. Der Schwerpunkt S der Trapezfläche $ABCD$ liegt also auf der Schwerachse EF und muß der Bedingung:

$ES : SF = (2 M_2 + M_1) : (2 M_1 + M_2) = (2 CD + AB) : (2 AB + CD)$ entsprechen. Demgemäß trägt man:

$$AG = BH = CD \quad \text{und} \quad CJ = DK = AB$$

auf und bestimmt den Schwerpunkt S durch den Schnitt der drei Geraden EF, GJ, HK .

B. Die Momente zweiten Grades einer ebenen Punktgruppe oder einer ebenen Fläche.

6. Trägheitsmomente einer ebenen Punktgruppe in bezug auf alle Achsen der Ebene, die einer gegebenen Achse AB parallel gerichtet sind. In dem Abschnitt 12 der Abhandlung II wurde beschrieben, wie das Trägheitsmoment

$$J = Fi^2 = \sum y^2 dF$$

einer ebenen Fläche F in bezug auf eine Achse AB mittels einer Seilkurve CDE (Abb. 3) bestimmt werden kann. Es wurde dort bewiesen, daß die mit F_1 bezeichnete Fläche $CDEGBC$, die

von der Seilkurve CDE , ihren Tangenten CB , EG und der Achse AB begrenzt wird, dem Quadrat des Trägheitshalbmessers i der Fläche F in bezug auf die Achse AB gleich ist:

$$F_1 = i^2. \quad (3)$$

Ist die Fläche F nicht gleichartig, so treten an Stelle der Flächenteile dF ihre gegebenen Massen dM . Sind die Massen über

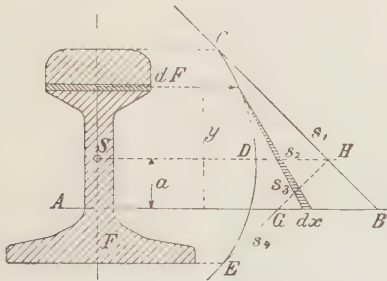


Abb. 3.

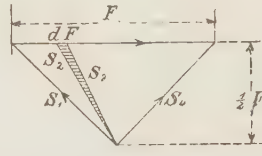


Abb. 4.

die Fläche F nicht stetig verteilt und bestehen aus endlichen Punktmassen, so tritt an die Stelle der Seilkurve ein Seilpolygon. Man kann ferner die ebene Punktgruppe ansehen als die Projektion einer räumlichen Punktgruppe und das Trägheitsmoment dieser Gruppe beziehen auf die Ebene, welche die Bildfläche in der Achse AB rechtwinklig schneidet. In allen diesen Fällen bleiben die in den folgenden Abschnitten abzuleitenden Beziehungen unverändert.

Die Fläche F_1 kann in die Fläche $CDEHC$ und das Dreieck GHB zerlegt werden. Die zuerst genannte Fläche bestimmt das Quadrat des Trägheitshalbmessers i_s in bezug auf die parallel zu AB durch den Schwerpunkt S der Fläche F gelegte Achse SH :

$$CDEHC = i_s^2.$$

Die Dreiecksfläche GHB ist gleich dem Quadrat des Abstandes a zwischen den beiden Achsen SH , AB :

$$GHB = a^2,$$

weil wegen Aehnlichkeit dieses Dreiecks mit dem Dreieck S_1 , S_4 , F im Kräfteplan (Abb. 4) BG gleich $2a$ ist. Zwischen den Trägheitshalbmessern i_s und i besteht demnach die Beziehung:

$$i^2 = i_s^2 + a^2. \quad (4)$$

Dieselbe Beziehung besteht zwischen den Trägheitshalbmessern einer räumlichen Punktgruppe in bezug auf zwei Parallelebenen, von denen eine durch den Schwerpunkt der Gruppe geht.

7. Die Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente einer ebenen Fläche F in bezug auf alle Achsen der Ebene, die durch den Schwerpunkt gehen. Wir bezeichnen in Abb. 5 mit z die Strecke SC vom Schwerpunkt S der Fläche F nach irgend einem unendlich kleinen Flächenteil dF und mit φ_1, φ_2 die Winkel, die ein Zeiger im Sinne der Uhrzeigerdrehung von den zwei gegebenen Achsen SA, SB nach SC zu durchlaufen hat. Wir setzen ferner das über die ganze Fläche F sich erstreckende Integral:

$$\int z^2 dF = F p^2$$

und bezeichnen also mit p den Halbmesser des *polaren* Trägheitsmomentes in bezug auf den

Schwerpunkt S . Der Umriß der Fläche F kommt hier nicht in Betracht und ist daher in die Zeichnung nicht eingetragen worden.

Die Ordinaten des Flächenelements dF in bezug auf die beiden Achsen SA, SB haben die algebraischen Werte $z \sin \varphi_1$ und $z \sin \varphi_2$; sie sind den Sinuswerten entsprechend *positiv* oder *negativ*, je nachdem dF *rechts* oder *links* von der betreffenden Achse liegt. Das *Zentrifugalmoment* von dF in bezug auf die beiden Achsen SA, SB hat demnach den Wert $z^2 dF \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$. Um diese Größe graphisch darzustellen, ziehen wir durch S einen Kreis vom Durchmesser p und im übrigen von beliebiger Lage, der von den Achsen SA, SB, SC in den Punkten A_1, B_1, C_1 geschnitten wird. Da:

$$C_1 A_1 = p \sin \varphi_1 \quad \text{und} \quad C_1 B_1 = p \sin \varphi_2$$

ist, so hat die Ordinate $C_1 G$ des Kreispunktes C_1 in bezug auf die Sehne $A_1 B_1$ die Länge:

$$C_1 G = p \sin \varphi_1 \sin \varphi_2.$$

Legt man nun dem Kreispunkte C_1 die Masse $\frac{z^2 dF}{p}$ bei, so erhält das *Moment ersten Grades* des Massenpunktes C_1 in bezug auf die Sehne $A_1 B_1$:

$$\frac{z^2 dF}{p} p \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = z^2 dF \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

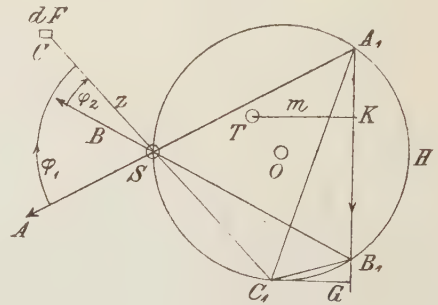


Abb. 5.

die Größe des Zentrifugalmomentes von dF in bezug auf das Achsenpaar SA, SB . Man beachte, daß die Punkte der beiden zur Sehne $A_1 B_1$ gehörigen Kreisbogen $A_1 SB_1$ und $A_1 HB_1$ Zentrifugalmomente von entgegengesetzten Vorzeichen haben; im vorliegenden Beispiel ist das Vorzeichen für die Punkte des Bogens $A_1 SB_1$ *positiv*, weil diese Punkte entweder links oder rechts von *beiden* Achsen SA, SB liegen. Wählt man den Sinn der Achse $A_1 B_1$ so, daß dieser Bogen $A_1 SB_1$ *rechts* von der Achse liegt, so stimmen nicht nur die Größen, sondern auch die Vorzeichen der beiden Momente miteinander überein. Man denke sich nun, was in Wirklichkeit nicht ausgeführt zu werden braucht, es sei ermittelt worden: für *jeden* Flächenteil dF der zugehörige Kreispunkt C_1 und dessen positive Masse $\frac{z^2 dF}{p}$, ferner die Lage des Schwerpunktes T aller dieser auf dem Kreise liegenden Massen und die Masse M des Punktes T , den wir zur Unterscheidung von dem Schwerpunkt S den *Trägheitsschwerpunkt* der Fläche F in bezug auf den *Trägheitskreis* SH nennen:

$$M = \frac{1}{p} \int z^2 dF = \frac{1}{p} F p^2 = F p; \quad (5)$$

dann ergeben sich ohne weiteres die folgenden Beziehungen:

1. Für jedes Paar Schwerpunktsachsen SA, SB ist das Zentrifugalmoment der Fläche F gleich dem Moment ersten Grades $F p m$ des Punktes T von der Masse $F p$ in bezug auf die Achse $A_1 B_1$, wenn der Sinn dieser Achse so gewählt wird, wie oben angegeben ist. Das Zentrifugalmoment ist positiv oder negativ, je nachdem T rechts oder links von der Achse $A_1 B_1$ liegt.

2. Das Zentrifugalmoment der Fläche F ist gleich null für jedes Achsenpaar SL_1, SN_1 (Abb. 6), dessen Kreissehne $L_1 N_1$ durch den *Trägheitsschwerpunkt* T geht. Zwei solche Achsen werden *konjugierte* Schwerpunktsachsen genannt, weil die Lage der einen Achse durch die der anderen bestimmt wird.

3. Das *Trägheitsmoment* J der Fläche F für jede Schwerpunktsachse SA (Abb. 7) ist gleich dem Moment ersten Grades des Punktes T von der Masse $F p$ in bezug auf die zugehörige *Kreistangente* AK :

$$J = F i^2 = F p t, \quad (6)$$

wenn mit t der Abstand TK oder LA des Punktes T von der Kreistangente AK bezeichnet wird; denn läßt man die Achse SB , auch dem Sinne nach, mit SA zusammenfallen, so verwandelt sich

die Sehne AB in die Tangente AK und das Zentrifugalmoment in das Trägheitsmoment, dessen Vorzeichen selbstverständlich stets positiv ist.

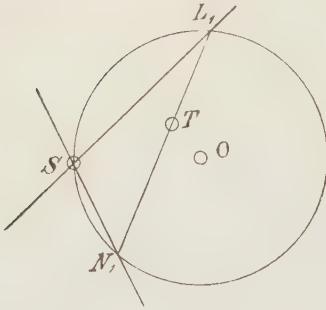


Abb. 6.

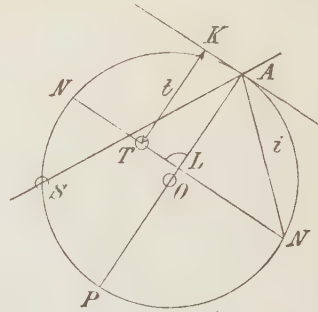


Abb. 7.

4. Um auf graphischem Wege für eine Schwerpunktsachse SA den Trägheitshalbmesser i zu bestimmen, zieht man (Abb. 7) durch T die Kreissehne $NTLN$ senkrecht zum Halbmesser OA . Da

$$AN^2 = AP \cdot AL = p^2$$

ist, so folgt:

$$AN = i.$$

5. Für je zwei Schwerpunktsachsen, die rechtwinklig sich schneiden, hat die Summe der beiden Trägheitsmomente den unveränderlichen Wert Fp^2 .

6. Fällt der Trägheitsschwerpunkt T nicht mit dem Kreismittelpunkt O zusammen, so gibt es nur ein Paar konjugierter Schwerpunktsachsen, die unter einem rechten Winkel sich schneiden. Diese beiden Schwerpunktschwerachsen SH_1, SH_2 (Abb. 8) werden durch den Kreisdurchmesser H_1OTH_2 bestimmt. Im Vergleich mit allen anderen Schwerpunktsachsen erreicht das Trägheitsmoment für die eine Hauptachse SH_1 seinen größten, für die andere SH_2 seinen kleinsten Wert. Wir nennen SH_1 die erste, SH_2 die zweite Schwerpunktschwerachse.

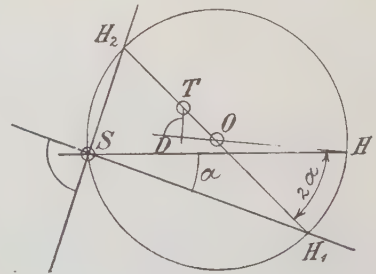


Abb. 8.

Fallen die Punkte T und O zusammen, so sind die Trägheitsmomente für alle Schwerpunktsachsen von gleicher Größe $\frac{1}{2} Fp^2$,

und je zwei unter einem rechten Winkel sich schneidende Schwerpunktsachsen bilden zwei Hauptachsen.

7. In Abb. 8 bezeichnen i_1, i_2, i die Trägheitshalbmesser der Fläche F für die beiden Schwerpunktschwerpunktsachsen SH_1, SH_2 und für die Achse SH , welche mit der *ersten* Hauptachse den Winkel

$$HS H_1 = \alpha$$

einschließt; ferner bezeichnen t_1, t_2, t die Abstände $H_1 T, H_2 T, HD$ des Trägheitsschwerpunktes T von den Kreistangenten der Punkte H_1, H_2, H . Es ist also:

$$i_1^2 = p t_1, \quad i_2^2 = p t_2, \quad i^2 = p t,$$

$$OH_1 = OH_2 = \frac{p}{2} = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{i_1^2 + i_2^2}{2p},$$

$$OT = \frac{t_1 - t_2}{2} = \frac{i_1^2 - i_2^2}{2p},$$

$$HD = HO + OD$$

oder:

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2} + \frac{t_1 - t_2}{2} \cos(2\alpha)$$

oder:

$$i^2 = \frac{i_1^2 + i_2^2}{2} + \frac{i_1^2 - i_2^2}{2} \cos(2\alpha) \quad (7)$$

oder:

$$i^2 = i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha. \quad (8)$$

Die vorstehenden Beziehungen ergeben sich in gleicher Weise für jeden anderen Achsenbüschel der Ebene, also für Achsen, die nicht im Schwerpunkt, sondern in irgend einem anderen Punkt der Ebene sich schneiden. Die Beziehungen gelten ferner auch für räumliche Punktgruppen und Körper in bezug auf Ebenen, die in einer Achse sich schneiden, wie schon oben hervorgehoben wurde.

8. Die Ausführung der graphischen Darstellung. Um die im vorigen Abschnitt beschriebene Darstellung zu bilden, bestimmt man für *drei*

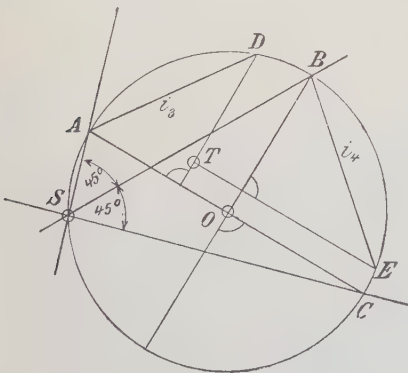


Abb. 9.

Schwerpunktsachsen SA , SB , SC (Abb. 9), welche zwei Winkel von 45° :

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = 45^\circ$$

einschließen, die Trägheitsmomente Fi_3^2 , Fi_4^2 , Fi_5^2 der Fläche F . Da der Winkel ASC gleich 90° ist, so wird durch die Gleichung

$$p^2 = i_3^2 + i_5^2$$

der Durchmesser

$$AC = p$$

des durch den Schwerpunkt S zu ziehenden Trägheitskreises SAB' bestimmt. Man trägt darauf die Sehnen

$$AD = i_3, \quad BE = i_4$$

auf und bestimmt nach Abschnitt (7, 4) den Trägheitsschwerpunkt T durch die beiden Geraden:

$$DT \perp OA \text{ und } ET \perp OB.$$

Hat die Fläche F eine Symmetrieachse, so ist diese eine der Schwerpunktschwerachsen und es genügt dann die Bestimmung der Trägheitshalbmesser i_1 , i_2 für die Hauptachsen.

9. Andere Darstellungen. Die im vorstehenden beschriebene graphische Darstellung ist für die meisten Anwendungen am bequemsten; wir fügen jedoch noch einige andere Darstellungen hinzu, weil dieselben in einzelnen Fällen mit Nutzen verwendet werden können.

1. Von *Cauchy* und *Poinsot* rührt folgende Darstellung her. Trägt man auf jeder Schwerpunktschwerachse SH (Abb. 10), für die der Trägheitshalbmesser mit i bezeichnet wird, die Strecken

$$SH = SH = \frac{i_1 i_2}{i}$$

auf, so entsteht als geometrischer Ort der Punkte H eine Ellipse, deren große Achse mit der zweiten und deren kleine Achse mit der ersten Schwerpunktschwerachse zusammenfällt; denn bezeichnet man die Koordinaten des Punktes H in bezug auf die Achsen SH_1 und SH_2 mit x und y , so ist

$$x = \frac{i_1 i_2}{i} \sin \alpha \text{ und } y = \frac{i_1 i_2}{i} \cos \alpha,$$

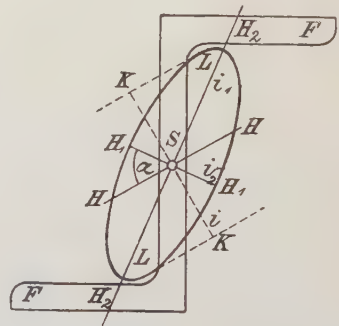


Abb. 10.

entsprechen. Die Geradenpaare $(H_3 H_4, K_3 K_4)$, $(H_3 H_5, K_3 K_5)$, $(H_4 H_5, K_4 K_5)$ schneiden sich in drei Punkten L_5, L_4, L_3 der Achse QL_3 , die zur Achse $QH_2 OH_1$ rechtwinklig steht, und also die Hauptachsen bestimmt.

3. In Abb. 12 ist der Durchmesser $H_1 H_2$ des Kreises $SH_1 H_2$ gleich $i_1 + i_2$ und durch den Punkt P in die Strecken

$$PH_1 = i_1, PH_2 = i_2$$

zerlegt. Auf jeder Schwerpunktsachse SH bestimmt der Kreispunkt H den Trägheitshalbmesser i durch die Länge

$$PH = i;$$

denn in Abb. 12 ist:

$$PL_1 = i_1 \cos \alpha, PL_2 = i_2 \sin \alpha,$$

folglich in Uebereinstimmung mit Gleichung 8):

$$PH^2 = i^2 = i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha.$$

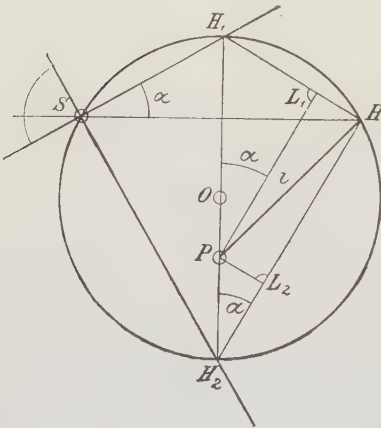


Abb. 12.

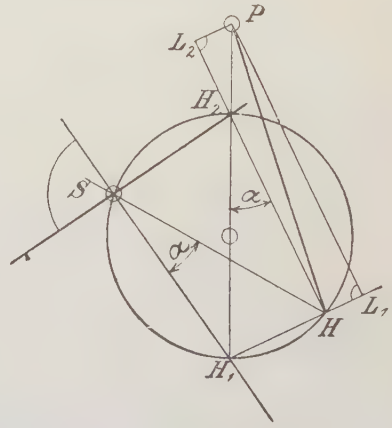


Abb. 13.

4. In Abb. 13 ist der Durchmesser des Kreises $SH_1 H_2$:

$$H_1 H_2 = i_1 - i_2,$$

und der Punkt P auf der Geraden $H_1 H_2$ entspricht den Bedingungen:

$$PH_1 = i_1, PH_2 = i_2.$$

Für jede Schwerpunktsachse SH bestimmt der Kreispunkt H den Trägheitshalbmesser i durch die Länge

$$PH = i;$$

denn in Abb. 13 ist:

$$PL_1 = i_1 \cos \alpha, \quad PL_2 = i_2 \sin \alpha,$$

folglich in Uebereinstimmung mit Gleichung 8):

$$PH^2 = i^2 = i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha.$$

5. In Abb. 14 schneidet der Kreis $H_1 H H_2$ auf den beiden Hauptachsen SH_1 , SH_2 die Längen

$$H_1 H_1 = i_1, \quad H_2 H_2 = i_2$$

ab. $H_1 H_1$ ist der Durchmesser des Kreises. Auf jeder Schwerpunktsachse SH schneidet dieser Kreis die Sehne

$$HH = i$$

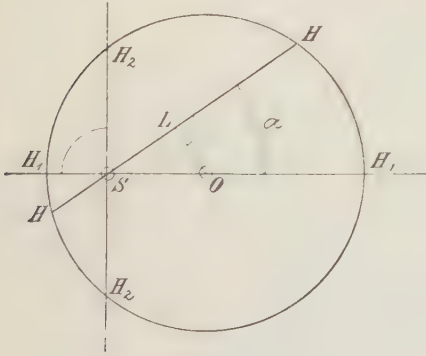


Abb. 14.

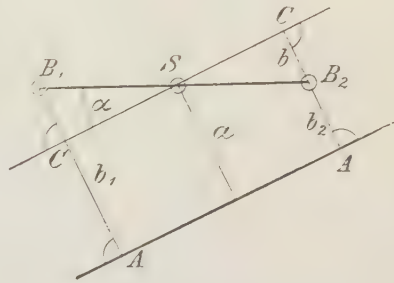


Abb. 15.

ab. Man beachte, daß:

$$\overline{SO}^2 = \frac{i_1^2 - i_2^2}{4}, \quad \overline{OL}^2 = \frac{i_1^2 - i_2^2}{4} \sin^2 \alpha,$$

folglich:

$$\overline{HH}^2 = 4 \overline{LH}^2 = i_1^2 - (i_1^2 - i_2^2) \sin^2 \alpha = i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha = i^2$$

ist.

6. In Abb. 15 liegen die beiden Punkte B_1 , B_2 , die Brennpunkte der Fläche F , auf der ersten Schwerpunktsachse um die Länge:

$$SB_1 = SB_2 = \sqrt{i_1^2 - i_2^2}$$

vom Schwerpunkt entfernt. Für jede Achse AA' der Ebene, also nicht nur für die Schwerpunktsachsen, wird der Trägheitshalbmesser i der Fläche F bestimmt durch die Gleichung:

$$i^2 = i_1^2 + b_1 b_2, \quad (9)$$

wenn mit b_1, b_2 die Ordinaten der Brennpunkte B_1, B_2 in bezug auf die Achse AA bezeichnet werden. Hierbei ist zu beachten, daß das Produkt $b_1 b_2$ negativ ist, wenn die Brennpunkte durch die Achse AA voneinander getrennt werden.

Für die zu AA parallel gerichtete Schwerpunktsachse CC hat das Quadrat des Trägheitshalbmessers nach Gleichung 8) die Größe

$$i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha = i_1^2 - (i_1^2 - i_2^2) \sin^2 \alpha = i_1^2 - b^2.$$

Folglich ist:

$$i^2 = i_1^2 - b^2 + a^2 = i_1^2 + (a - b)(a + b) = i_1^2 + b_1 b_2.$$

Die vorstehende Darstellung gestattet die Lösung der folgenden zwei Aufgaben:

Für einen gegebenen Punkt U der Ebene die Lage der Hauptachsen UH_1, UH_2 zu bestimmen (Abb. 16). Nach Gleichung 8), die auch für den Achsenbüschel U gilt, halbieren die Hauptachsen die Winkel zwischen je zwei Achsen, für welche die Trägheitsmomente

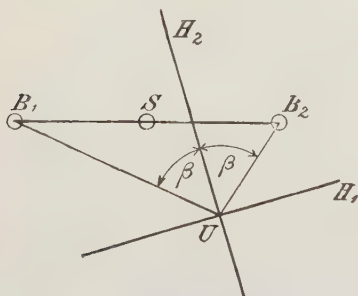


Abb. 16.

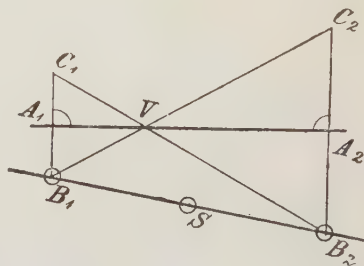


Abb. 17.

der Fläche F gleiche Werte haben. UB_1, UB_2 sind zwei solche Achsen, weil die Trägheitsmomente für alle Achsen, die durch einen der beiden Brennpunkte gehen, nach Gleichung 9) die Größe $F i_1^2$ haben.

Auf einer gegebenen Achse A_1A_2 (Abb. 17) den Punkt V zu bestimmen, für den A_1A_2 eine der beiden Hauptachsen ist. Man fällt von den Brennpunkten auf die Achse die beiden Lote B_1A_1, B_2A_2 , verlängert dieselben um

$$A_1C_1 = B_1A_1, \quad A_2C_2 = B_2A_2$$

und bestimmt den Punkt V durch den Schnitt der drei Geraden A_1A_2, B_1C_2, B_2C_1 .

**C. Die Momente zweiten Grades von räumlichen Punktgruppen
oder Körpern.**

10. Beziehungen zwischen den Zentrifugalmomenten eines Körpers oder einer räumlichen Punktgruppe in bezug auf alle Paare von Ebenen, die durch einen Punkt gehen.

Wir bezeichnen mit r, s, u, v, w die Ordinaten eines Massenpunktes m in bezug auf Ebenen $(r), (s), (u), (v), (w)$, die in einem Punkte A des Raumes sich schneiden. Die durch diesen Punkt gehenden und zu den Ebenen rechtwinklig gerichteten Achsen r, s, u, v, w geben durch ihren Sinn an, auf welcher Seite einer jeden der genannten Ebenen die *positiven* Ordinaten liegen. Die drei Koordinatenebenen $(u), (v), (w)$ und also auch die Koordinatenachsen u, v, w sind *rechtwinklig* zueinander gestellt. Die Lage des Massenpunktes m ist demnach durch seine rechtwinkligen Koordinaten u, v, w bestimmt, und seine Ordinaten r, s in bezug auf die Ebenen $(r), (s)$ ergeben sich hieraus durch die Gleichungen:

$$r = u \cos(ru) + v \cos(rv) + w \cos(rw) \quad (10)$$

$$s = u \cos(su) + v \cos(sv) + w \cos(sw), \quad (11)$$

wenn in gebräuchlicher Weise z. B. mit (ru) der Winkel bezeichnet wird, welcher von den beiden Achsen r und u eingeschlossen wird.

Das Hilfsmittel, welches zur Darstellung der Beziehungen im folgenden benutzt wird, besteht darin, daß einer jeden durch den Punkt A gelegten Ebene (r) eine *Strecke*

$$R = AR$$

zugeordnet wird, deren Anfangspunkt mit A zusammenfällt, während ihr Endpunkt R durch die drei Koordinaten:

$$\left. \begin{aligned} R_u &= R \cos(Ru) = \frac{\sum r u m}{l M} = \sum r u m \\ R_v &= R \cos(Rv) = \frac{\sum r v m}{l M} = \sum r v m \\ R_w &= R \cos(Rw) = \frac{\sum r w m}{l M} = \sum r w m \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

bestimmt wird. Die positive Länge l ist so zu wählen, daß ihr Produkt mit der Masse M des ganzen Körpers in den gewählten Einheiten die Größe *eins* erhält.

Für je zwei durch den Punkt A gehende Ebenen (r) , (s) hat das Produkt der beiden Ordinaten eines Massenpunktes m den Gleichungen 10) und 11) zufolge die beiden gleichen Werte:

$$\left. \begin{aligned} rs &= ru \cos(su) + rv \cos(sv) + rw \cos(sw) \\ rs &= su \cos(ru) + sv \cos(rv) + sw \cos(rw) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Das Zentrifugalmoment des Körpers in bezug auf die beiden Ebenen (r) , (s) wird demnach bestimmt durch jede der beiden folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma rsm &= R_u \cos(su) + R_v \cos(sv) + R_w \cos(sw) \\ \Sigma rsm &= S_u \cos(ru) + S_v \cos(rv) + S_w \cos(rw) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Das bezeichnete Zentrifugalmoment wird also nach Größe und Vorzeichen dargestellt sowohl durch die Projektion R_s der Strecke R auf die Achse s , als auch durch die Projektion S_r der Strecke S auf die Achse r :

$$\Sigma rsm = R_s = S_r. \quad (15)$$

Das Moment ist *positiv*, wenn der Sinn der Projektion R_s mit dem Sinn der Achse s , und folglich auch der Sinn von S_r mit dem Sinn von r übereinstimmt. Die Gleichung 15) darf als die Fundamentalbeziehung der Geometrie der Massen bezeichnet werden, da alle anderen Beziehungen aus ihr abgeleitet werden können.

II. Die Momentenkugeln. Projiziert man die Strecke R auf alle durch den Punkt A gehende Achsen, so bilden die Endpunkte der Projektionen die Kugel vom Durchmesser R , welche kurz die Momentenkugel (R) genannt werden soll. Auf jeder durch den Punkt A gelegten Achse s schneidet diese Kugel die Strecke

$$R_s = S_r$$

ab, die nach Größe und Vorzeichen das Zentrifugalmoment des Körpers M in bezug auf die beiden Ebenen (r) , (s) darstellt. Alle diese Momentenkugeln werden bestimmt durch die drei Momentenkugeln (U) , (V) , (W) der Koordinatenebenen (u) , (v) , (w) im Punkte A . Die Momentenkugel (U) schneidet auf den drei Koordinatenachsen u , v , w die Strecken:

$$U_u = \Sigma u^2 m, \quad U_v = \Sigma u v m, \quad U_w = \Sigma u w m$$

ab. Ebenso werden die beiden anderen Kugeln durch die Abschnitte:

$$V_u = \Sigma v u m, \quad V_v = \Sigma v^2 m, \quad V_w = \Sigma v w m$$

und

$$W_u = \Sigma w u m, \quad W_v = \Sigma w v m, \quad W_w = \Sigma w^2 m$$

bestimmt. Von diesen neun Größen sind nur sechs unabhängig voneinander, nämlich die drei Trägheitsmomente U_u, V_v, W_w und die drei Zentrifugalmomente U_v, V_w, W_u . Die übrigen drei Größen ergeben sich aus den Bedingungen der Gleichung 15):

$$U_w = W_u, \quad V_u = U_v, \quad W_v = V_w.$$

Auf jeder durch den Punkt A gelegten Achse r schneiden die Momentenkugeln $(U), (V), (W)$ die drei Strecken

$$U_r = R_u, \quad V_r = R_v, \quad W_r = R_w$$

ab, durch welche die Momentenkugel (R) der Ebene (r) für den Punkt A bestimmt wird.

Die Momentenkugel (R) , Abb. 18, schneidet auf der Achse r die Strecke

$$R_r = \Sigma r^2 m$$

ab, welche das Trägheitsmoment des Körpers M für die Ebene (r) darstellt. Da diese Größe

$$R_r = R \cos (Rr)$$

einen *positiven* Wert hat, so schließt die Strecke R mit der Achse r stets einen *spitzen* Winkel (Rr) ein.

Für jede Ebene (t) , welche durch die Strecke R gelegt wird, ist das Zentrifugalmoment

$$\Sigma t r m = 0;$$

denn die zugehörige Achse t berührt die Momentenkugel (R) im Punkte A . Die Ebenen (t) und die zugehörigen Achsen t bilden sonach je einen

Büschel. Die Momentenkugel (R) wird von der Ebene (r) in einem Kreise vom Durchmesser

$$AC = \sqrt{R^2 - R_r^2} = R'$$

geschnitten.

12. Die Hauptebenen und Hauptachsen des Punktes A . Man nennt eine durch den Punkt A gehende Ebene (x) eine *Hauptebene* und die zugehörige Achse x eine *Hauptachse* dieses Punktes, wenn die zugeordnete Strecke X mit der Achse x zusammenfällt, oder was dasselbe sagt, wenn die Strecke X_x den Durchmesser der Momentenkugel (X) bildet.

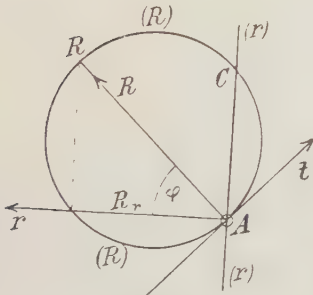


Abb. 18.

Das Zentrifugalmoment des Körpers Σmxt in bezug auf eine Hauptebene (x) in Verbindung mit jeder durch die Achse x gelegten Ebene (t) ist gleich null, weil die Achse t die Momentenkugel (X) im Punkte A berührt. Wenn also für zwei Ebenen (t_1) , (t_2) , welche in der Achse x sich schneiden, die Bedingungen

$$\Sigma mxt_1 = \Sigma mxt_2 = 0$$

erfüllt sind, so ist die Achse x eine Hauptachse des Punktes A .

Zwei Hauptebenen (x) , (y) , deren zugeordnete Strecken X , Y nicht gleich groß sind, schneiden sich rechtwinklig; denn die Bedingung

$$X_y = Y_x = X \cos(xy) = Y \cos(xy)$$

fordert, daß

$$\cos(xy) = 0$$

ist.

Die zu zwei Hauptebenen (x) (y) rechtwinklig gestellte Ebene (z) ist auch eine Hauptebene; denn da die Strecken

$$X_z = Z_x = 0 \quad \text{und} \quad Y_z = Z_y = 0$$

sind; so fällt die Strecke Z mit der Achse z zusammen.

Ist (x) eine Hauptebene des Punktes A , so sind mindestens noch zwei zueinander und zu (x) rechtwinklig gestellte Hauptebenen (y) , (z) vorhanden, die man nach Anleitung des Abschnittes 7 bestimmen kann. In dem besonderen Falle, wenn die Strecken

$$Y_y = \Sigma my^2, \quad Z_z = \Sigma mz^2$$

von gleicher Größe sind, ist jede durch die Hauptachse x gelegte Ebene eine Hauptebene des Punktes A .

13. Die Größen der Trägheitsmomente für die Hauptebenen des Punktes A . Wir nehmen an, daß für die Ebenen (u) , (v) , (w) des willkürlich gewählten Koordinatensystems die Strecken U_u , V_v , W_w , U_v , V_w , W_u bestimmt worden sind. Ist (s) eine Hauptebene des Punktes A , so ist:

$$S_u = S \cos(su), \quad S_v = S \cos(sv), \quad S_w = S \cos(sw).$$

Die drei Bedingungen:

$$S_u = U_s, \quad S_v = V_s, \quad S_w = W_s$$

führen also zu den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} S \cos(su) &= U_u \cos(su) + U_v \cos(sv) + U_w \cos(sw) \\ S \cos(sv) &= V_u \cos(su) + V_v \cos(sv) + V_w \cos(sw) \\ S \cos(sw) &= W_u \cos(su) + W_v \cos(sv) + W_w \cos(sw) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Zwischen den unbekannten Winkeln (su) , (sv) , (sw) besteht ferner die Beziehung:

$$\cos^2 (su) + \cos^2 (sv) + \cos^2 (sw) = 1. \quad (17)$$

Beseitigt man aus diesen vier Gleichungen die drei unbekannten Winkel, so bleibt *eine* Bedingung, die von dem Trägheitsmoment S zu erfüllen ist:

$$\left. \begin{aligned} 0 = S^3 - S^2 (U_u + V_v + W_w) + S (U_u V_v + U_u W_w + V_v W_w) \\ - U_v^2 - V_w^2 - W_u^2 - (U_u V_v W_w + 2 U_v V_w W_u - U_u V_w^2 \\ - V_v W_u^2 - W_w U_v^2). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Die vorstehende Gleichung dritten Grades hat nicht nur *eine*, sondern, wie aus dem vorigen Abschnitt hervorgeht, stets *drei* reelle und zwar *positive* Wurzeln X, Y, Z , weil diese Strecken *Trägheitsmomente* darstellen. Sie stimmt überein mit der Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} 0 = (S - X)(S - Y)(S - Z) = S^3 - S^2(X + Y + Z) \\ + S(XY + XZ + YZ) - XYZ, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

und man ersieht hieraus, daß die drei Größen:

$$\left. \begin{aligned} 3A = U_u + V_v + W_w = X + Y + Z \\ 3B^2 = U_u V_v + U_u W_w + V_v W_w - U_v^2 - V_w^2 - W_u^2 = XY + XZ + YZ \\ C^3 = U_u V_v W_w + 2 U_v V_w W_u - U_u V_w^2 - V_v W_u^2 - W_w U_v^2 = XYZ \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

positiv und unabhängig von der Wahl der Koordinatenebenen (u) , (v) , (w) sind.

Da Gleichung 18) reelle Wurzeln hat, so kann man ihrer Auflösung die bekannte trigonometrische Form geben. Man setzt:

$$S = T \sin \varphi + A \quad (21)$$

und bringt hierdurch die Gleichung:

$$0 = S^3 - 3AS^2 + 3B^2S - C^3$$

in die Form:

$$0 = \sin^3 \varphi - \frac{3(A^2 - B^2)}{T^2} \sin \varphi + \frac{3AB^2 - 2A^3 - C^3}{T^3},$$

die mit der trigonometrischen Formel:

$$0 = \sin^3 \varphi - \frac{3}{4} \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin (3\varphi)$$

übereinstimmt, wenn gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \frac{3(A^2 - B^2)}{T^2} &= \frac{3}{4} \\ \frac{3AB^2 - 2A^3 - C^3}{T^3} &= \frac{\sin (3\varphi)}{4} \end{aligned}$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} T &= 2 (A^2 - B^2)^{\frac{1}{2}} \\ \sin (3 \varphi) &= \frac{3 A B^2 - 2 A^3 - C^3}{2 (A^2 - B^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Der letzten Gleichung entsprechen unendlich viele Werte von 3φ , nämlich ein Winkel $3 \varphi_1$, welcher zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, ferner der Winkel $(\pi - 3 \varphi_1)$ und alle Winkel, die von diesen beiden Größen um 2π oder um ein vielfaches von 2π abweichen. Allen diesen Winkeln entsprechen jedoch nur *drei* voneinander verschiedene Werte von $\sin \varphi$, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_2 &= \sin \left(\varphi_1 + \frac{2}{3} \pi \right) \\ \sin \varphi_3 &= \sin \left(\varphi_1 + \frac{4}{3} \pi \right) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Die Trägheitsmomente X, Y, Z in bezug auf die Hauptebenen $(x), (y), (z)$ haben nach Gleichung 21) also die Werte:

$$\left. \begin{aligned} X &= 2 (A^2 - B^2)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi_1 + A \\ Y &= 2 (A^2 - B^2)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi_2 + A \\ Z &= 2 (A^2 - B^2)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi_3 + A \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Zwei dieser Trägheitsmomente sind gleich groß, wenn:

$$\sin (3 \varphi) = \pm 1$$

ist, und alle drei erhalten gleiche Größen in dem Falle:

$$A = B = C.$$

Die Trägheitsmomente des Körpers in bezug auf die *Hauptachsen* x, y, z des Punktes A haben in dieser Reihenfolge die Größen $(Y + Z), (X + Z), (X + Y)$.

14. Die Richtungen der Hauptachsen des Punktes A . Nachdem eine der Wurzeln der Gleichung 18), z. B. X , bestimmt worden ist, ergeben zwei der Gleichungen 16):

$$\left. \begin{aligned} X \cos (xu) &= U_u \cos (ru) + U_v \cos (rv) + U_w \cos (rw) \\ X \cos (xv) &= V_u \cos (ru) + V_v \cos (rv) + V_w \cos (rw) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

die Proportion:

$$\cos (xu) : \cos (xv) : \cos (xw) = D_u : D_v : D_w, \quad (26)$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} D_u &= (X - V_v) U_w + U_v V_w \\ D_v &= (X - U_u) V_w + U_v U_w \\ D_w &= (X - U_u) (X - V_v) - U_v^2 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Setzt man ferner:

$$D = \pm \sqrt{D_u^2 + D_v^2 + D_w^2}, \quad (28)$$

so folgt aus den Gleichungen 17) und 26):

$$\cos(xu) = \frac{D_u}{D}, \quad \cos(xv) = \frac{D_v}{D}, \quad \cos(xw) = \frac{D_w}{D}. \quad (29)$$

Die Unbestimmtheit des Vorzeichens von D deutet an, daß der Sinn der Achse x unbestimmt ist und nach Belieben gewählt werden kann.

Die Richtung der Hauptachse y kann in gleicher Weise bestimmt werden. Dann ergibt sich die Hauptachse z aus der Bedingung, daß sie x und y rechtwinklig schneidet.

15. Die Beziehungen zwischen den Hauptträgheitsmomenten X, Y, Z und den übrigen Momenten zweiten Grades. Einer durch den Punkt A gehenden Ebene (r) ist die Strecke

$$AR = R$$

zugeordnet, deren Projektionen auf die Hauptachsen x, y, z des Punktes A die Größen

$$\left. \begin{aligned} R_x &= X_r = X \cos(xr) \\ R_y &= Y_r = Y \cos(yr) \\ R_z &= Z_r = Z \cos(zr) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

haben. Da hiernach

$$\frac{R_x^2}{X^2} + \frac{R_y^2}{Y^2} + \frac{R_z^2}{Z^2} = 1 \quad (31)$$

ist, so liegen die Endpunkte R der Strecken, die allen durch A gehenden Ebenen zugeordnet sind, auf dem Ellipsoid vom Mittelpunkt A und den Halbachsen X, Y, Z . Sind zwei Halbachsen, z. B. X und Y , gleich groß, so ist jede in der xy -Ebene durch A gelegte Achse eine *Hauptachse* dieses Punktes. Ist das Ellipsoid eine Kugel, so sind alle durch A gehende Achsen Hauptachsen.

Die Länge der Strecke R wird durch die Gleichung:

$$R^2 = X^2 \cos^2(xr) + Y^2 \cos^2(yr) + Z^2 \cos^2(zr) \quad (32)$$

bestimmt.

Das *Zentrifugalmoment* des Körpers in bezug auf je zwei durch *A* gehende Ebenen (*r*), (*s*) hat nach den Gleichungen 14) und 30) die Größe:

$$R_s = S_r = \left. \begin{aligned} X \cos(xr) \cos(xs) + Y \cos(yr) \cos(ys) \\ + Z \cos(zr) \cos(zs) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Läßt man die Ebene (*s*) mit der Ebene (*r*) zusammenfallen, so ergibt sich das Trägheitsmoment in bezug auf die Ebene (*r*):

$$R_r = X \cos^2(xr) + Y \cos^2(yr) + Z \cos^2(zr). \quad (34)$$

Die Summe der beiden Trägheitsmomente J_r und R_r für die Achse *r* und für die Ebene (*r*) ist gleich der Summe der drei Hauptträgheitsmomente:

$$J_r + R_r = X + Y + Z. \quad (35)$$

Daher ist

$$J_r = X \sin^2(xr) + Y \sin^2(yr) + Z \sin^2(zr). \quad (36)$$

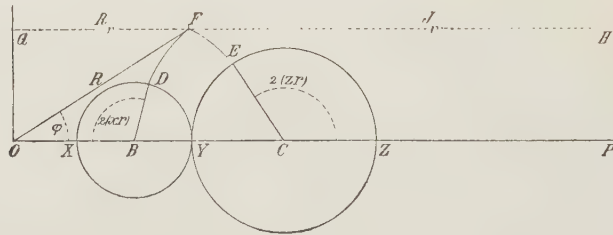


Abb. 19.

16. Graphische Darstellung der vorstehenden Beziehungen. Auf einer Achse *OP* (Abb. 19) sind die Strecken:

$$OX = X, \quad OY = Y, \quad OZ = Z, \quad OP = X + Y + Z$$

und in den Kreisen *XY*, *YZ* die Zentriwinkel

$$XBD = 2(xr), \quad ZCE = 2(zr)$$

aufzutragen. Der Schnittpunkt *F*, der beiden Kreisbögen *EF*, *DF*, welche um die Mittelpunkte *B* und *C* mit den Halbmessern *BE* und *CD* gezogen sind, bestimmt:

1. durch die Strecke *OF* den Durchmesser *R* der Momentenkugel (*R*),

2. durch *FOB* den Winkel φ , den die Strecke *R* mit der Achse *r* bildet,

3. durch die Abszisse *FG* das Trägheitsmoment R_r des Körpers in bezug auf die Ebene (*r*),

4. durch die Abszisse *FH* das Trägheitsmoment J_r des Körpers in bezug auf die Achse *r*,

17. Die Beziehungen zwischen den Hauptachsen des Schwerpunktes S und den Hauptachsen eines anderen gegebenen Punktes A . In den meisten Fällen der Anwendung empfiehlt es sich, zunächst die Hauptachsen des Schwerpunktes x_s, y_s, z_s und die zugehörigen Trägheitsmomente X_s, Y_s, Z_s nach Anleitung der Abschnitte 13 und 14 zu bestimmen. Die Hauptachsen x, y, z eines anderen gegebenen Punktes A , dessen Ordinaten in bezug auf die Ebenen $(x_s), (y_s), (z_s)$ mit a_x, a_y, a_z bezeichnet werden, ergeben sich dann in folgender Weise. Man legt durch den Punkt A die Koordinatenebenen $(u), (v), (w)$ parallel zu den Hauptschwerpunktsebenen $(x_s), (y_s), (z_s)$, so daß für jeden Massenpunkt

$$u = x_s - a_x, \quad v = y_s - a_y, \quad w = z_s - a_z$$

ist. Beachtet man nun, daß jedes der sechs Momente $\Sigma m x_s, \Sigma m y_s, \Sigma m z_s, \Sigma m x_s y_s, \Sigma m x_s z_s, \Sigma m y_s z_s$ gleich null ist, so folgt:

$$\left. \begin{aligned} U_u &= \Sigma m (x_s - a_x)^2 = X_s + M a_x^2 \\ V_v &= \Sigma m (y_s - a_y)^2 = Y_s + M a_y^2 \\ W_w &= \Sigma m (z_s - a_z)^2 = Z_s + M a_z^2 \\ U_v &= \Sigma m (x_s - a_x) (y_s - a_y) = M a_x a_y \\ V_w &= \Sigma m (y_s - a_y) (z_s - a_z) = M a_y a_z \\ W_u &= \Sigma m (z_s - a_z) (x_s - a_x) = M a_x a_z \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Diese Werte sind in die Gleichungen der Abschnitte 13 und 14 einzusetzen, um die Hauptachsen des Punktes A und die zugehörigen Trägheitsmomente zu ermitteln.

Liegt der Punkt A auf einer Schwerpunkthauptachse, z. B. auf der Achse x_s , ist also

$$a_y = a_z = 0,$$

so werden auch die Zentrifugalmomente

$$U_v = V_w = W_u = 0.$$

Die Hauptachsen des Punktes A fallen also mit den Achsen u, v, w zusammen und sind zu den Hauptschwerpunktsachsen parallel gerichtet.

18. Literarische Notizen. Der Inhalt der vorstehenden Abhandlung wurde folgenden Aufsätzen entnommen:

1. *Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisen-Konstruktionen*, Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1870, S. 41 und 1877, S. 51. In dem ersten Beitrage sind die Darstellungen

der Abb. 3, 4, 14, 15, 16 und in dem zweiten die Darstellungen der Abb. 11, 12, 13 mitgeteilt worden.

2. *Ueber die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen*, Zivilingenieur 1887, S. 43; enthält die von den Abb. 5 bis 9 gezeigten Beziehungen und Darstellungen.

3. *Beitrag zur Geometrie der Massen*, Zivilingenieur 1896, S. 237; behandelt die Momente zweiten Grades von starren Körpern, Abschnitte 10 bis 17.

In betreff der sehr umfangreichen Literatur verweisen wir auf *Jung, Geometrie der Massen*, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, 4.

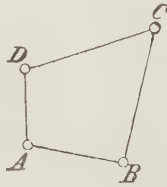
Abhandlung IV.

Die Bewegung der ebenen Getriebe.

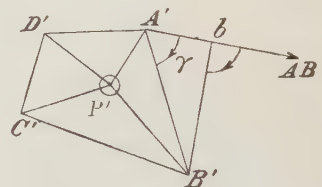
Erster Teil.

Die Geometrie der Bewegung ebener Getriebe.

1. Der Geschwindigkeitsplan einer ebenen Punktgruppe. Wir betrachten während eines unendlich kleinen Zeitabschnittes eine Gruppe von Punkten $A, B, C, D \dots$, die in einer Ebene sich bewegen und deren augenblickliche Lage durch den *Lageplan* Abb. 1 in dem Maßstabe 1 cm gleich μ cm angegeben wird. Die Ge-



L. Abb. 1.



G. Abb. 2.

schwindigkeiten der Punkte während jenes Zeitabschnittes sollen in einer besonderen Zeichnung, dem *Geschwindigkeitsplan* Abb. 2, durch die Strecken $P'A', P'B', P'C' \dots$ nach Größe, Richtung und Sinn, und zwar in dem Maßstabe 1 cm gleich μ' cm sek⁻¹ dargestellt werden. In den Abbildungen tragen die Lagepläne, die Geschwindigkeitspläne und die Beschleunigungspläne die abgekürzten Bezeichnungen L, G und B . Der gemeinschaftliche Anfangspunkt P' aller Geschwindigkeitsstrecken heißt der *Pol* des Geschwindigkeitsplans. Die Geschwindigkeit $P'B'$ des Punktes B kann zusammengesetzt werden aus der Geschwindigkeit $P'A'$ des Punktes A und der von der Strecke $A'B'$ dargestellten *relativen* Geschwindigkeit des Punktes B gegen den Punkt A . Wir zerlegen ferner diese relative Geschwindigkeit in die beiden zur Strecke AB parallel und normal gerichteten Komponenten $A'b, bB'$ und erhalten hierdurch folgendes Bild von der Bewegung der zwei Punkte A, B : Beide Punkte bewegen sich mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit $P'A'$, während B gleich-

zeitig noch zwei andere Bewegungen mit den Geschwindigkeiten $A'b$, bB' ausführt. Infolge der Geschwindigkeit $A'b$ ändert sich die *Länge* der Strecke AB , und zwar in positivem oder in negativem Sinne, je nachdem die beiden Strecken AB , $A'b$ dem *Sinne* nach übereinstimmen oder einander entgegengesetzt sind. Die Strecke $A'b$ bestimmt sonach die *relative Dehnungsgeschwindigkeit* des Punktes B gegen den Punkt A . Das Verhältnis der Geschwindigkeit $A'b$ zur Länge AB , also die Größe

$$\delta = \frac{A'b}{AB} \frac{\mu'}{\mu} \text{ sek}^{-1}$$

heißt die *Dehnungsgeschwindigkeit der Strecke AB* . Sie gibt an, um welchen Bruchteil diese Strecke in einer Sekunde ihre Länge verändert. Es empfiehlt sich, das Verhältnis μ' zu μ gleich einer runden Zahl zu wählen. Im folgenden soll, wenn nichts anderes angegeben wird, stets μ' gleich μ angenommen werden, so daß die Geschwindigkeit δ durch die Formel

$$\delta = \frac{A'b}{AB} \text{ sek}^{-1} \quad (1)$$

bestimmt wird. Infolge der *dritten* von bB' dargestellten Geschwindigkeit des Punktes B ändert sich die *Richtung* der Strecke AB ; wir nennen diese Komponente daher die *relative Drehgeschwindigkeit* des Punktes B gegen den Punkt A und das Verhältnis

$$\omega = \frac{bB'}{AB} \text{ sek}^{-1} \quad (2)$$

die *Drehgeschwindigkeit der Strecke AB* . Um auch den *Sinn* der beiden Geschwindigkeiten δ , ω auf algebraischem Wege angeben zu können, wird es nötig, den von den beiden Strecken AB , $A'B'$ gebildeten Winkel γ in einer bestimmten Weise zu messen und zu bezeichnen: Der Winkel γ , den ein Strahl im Sinne der Uhrzeigerdrehung, dem *positiven* Drehungssinne, zu durchlaufen hat, um von der Richtung AB nach der Richtung $A'B'$ zu gelangen, soll der *Geschwindigkeitswinkel* der Strecke AB genannt und mit $(AB, A'B')$ bezeichnet werden. Bei dieser Bezeichnung kommt nicht allein die Aufeinanderfolge der Buchstaben, durch die der *Streckensinn* angegeben wird, sondern auch die Reihenfolge der Strecken in Betracht; z. B. ist

$$(A'B', AB) = 360^\circ - (AB, A'B')$$

$$(BA, B'A') = (AB, A'B').$$

Mit Benutzung dieser Regel, die bei allen Winkelbezeichnungen an-

gewandt werden soll, ergeben sich die Geschwindigkeiten δ , ω nicht nur der Größe, sondern auch dem Sinne nach durch die Formeln:

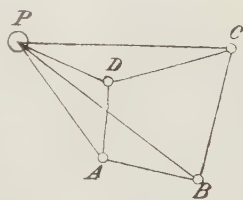
$$\delta = \frac{A'B'}{AB} \cos (AB, A'B') = \frac{A'B'}{AB} \cos \gamma \quad (3)$$

$$\omega = \frac{A'B'}{AB} \sin (AB, A'B') = \frac{A'B'}{AB} \sin \gamma. \quad (4)$$

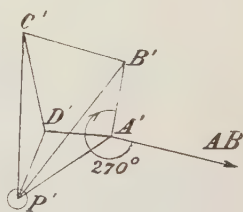
Denn man ersieht ohne weiteres, daß AB sich *verlängert*, wenn $\cos \gamma$ positiv ist, und daß AB im *positiven* Sinne der Uhrzeigerbewegung sich dreht, wenn $\sin \gamma$ das positive Vorzeichen trägt.

2. Der Geschwindigkeitsplan einer starren Punktgruppe, Abb. 3 und 4. Wenn die bewegten Punkte $A, B, C, D \dots$ starr miteinander verbunden sind, so bleiben

die Winkel zwischen den Strecken $AB, BC, CA \dots$ unverändert. Daher sind die gleichzeitigen Drehgeschwindigkeiten aller Strecken nach Größe und Sinn einander gleich. Die



L. Abb. 3.



G. Abb. 4.

Dehnungsgeschwindigkeit

einer jeden Strecke ist ihrer Starrheit wegen gleich null. Folglich sind die Geschwindigkeitswinkel aller Strecken gleich groß, und zwar entweder alle gleich 90° oder gleich 270° . Im ersten Falle hat die gemeinschaftliche Drehgeschwindigkeit den *positiven* Sinn und die Größe

$$\omega = \frac{A'B'}{AB} \sin 90^\circ = + \frac{A'B'}{AB} = + \frac{B'C'}{BC} = + \frac{A'C'}{AC} = \dots,$$

während sie im zweiten Falle den *negativen* Wert

$$\omega = \frac{A'B'}{AB} \sin 270^\circ = - \frac{A'B'}{AB} = - \frac{B'C'}{BC} = - \frac{A'C'}{AC} = \dots$$

hat. Da diese Gleichungen für je zwei einander entsprechende Dreiecke $ABC, A'B'C'$ gelten, so sind die beiden Punktgruppen $ABCD \dots, A'B'C'D' \dots$ *geometrisch ähnlich und von gleichem Sinne*, was durch das Zeichen:

$$A'B'C'D' \dots \approx ABCD \dots \quad (5)$$

ausgedrückt werden soll. Dasselbe bringt also nicht nur die Ähnlichkeit der beiden Gruppen, sondern auch die Gleichheit der Ge-

schwindigkeitswinkel zur Darstellung. In dem besonderen Falle, wenn die Drehgeschwindigkeit ω gleich null ist, fallen alle Punkte $A', B', C' \dots$ zusammen. Der Geschwindigkeitsplan besteht dann aus einer einzigen Strecke $P'A'$ und bestimmt eine *Parallelverschiebung* der Punktgruppe.

Der mit der Gruppe starr verbundene und durch die Bedingung:

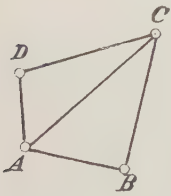
$$PABC' \dots \approx P'A'B'C' \dots$$

bestimmte Punkt P heißt der *Geschwindigkeitspol des Lageplans*. Von allen Punkten der mit der Gruppe starr verbundenen Ebene ABC ist P der einzige, dessen Geschwindigkeit im Zeitpunkt der Betrachtung gleich null ist. Die Bewegung der starren Punktgruppe besteht also aus einer unendlich kleinen Drehung um den Pol P mit der Drehgeschwindigkeit ω .

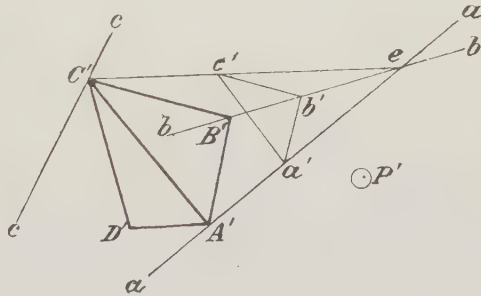
Die Geschwindigkeit v eines Punktes A der Gruppe wird bestimmt durch die beiden Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} v &= \omega PA \\ (PA, v) &= 90^\circ \text{ oder } = 270^\circ, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

je nachdem ω positiv oder negativ ist. Der Geschwindigkeitsplan einer starren Punktgruppe wird bestimmt durch die Geschwindigkeiten $P'A', P'B'$ zweier Punkte A, B der Gruppe. Diese beiden Geschwindigkeiten sind voneinander abhängig durch die Bedingung, daß $A'B'$ normal zu AB gerichtet sein muß.



L. Abb. 5.



G. Abb. 6.

Der Plan ist ferner bestimmt, wenn außer dem Pol P' drei Gerade aa, bb, cc , Abb. 5 und 6, gegeben sind, auf welchen beziehungsweise die Punkte A', B', C' liegen müssen. Läßt man die zwei Ecken a', b' des ähnlich-veränderlichen Dreiecks

$$a'b'c' \approx ABC,$$

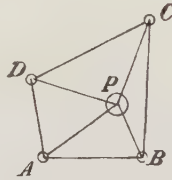
dessen Seiten $a'b'$, $b'e'$, $c'a'$ zu den Geraden AB , BC , CA normal gerichtet sind, auf den Geraden aa , bb sich bewegen, so beschreibt die dritte Ecke e' die durch den Schnittpunkt e von aa und bb gehende Gerade $e'e$. Man bestimmt also C' durch den Schnitt der Geraden $e'e$, cc , ferner einen zweiten Punkt A' , indem man $C'A'$ normal zu CA zieht, und den übrigen Teil des Geschwindigkeitsplans durch die Bedingung

$$A'B'C'D' \dots \approx ABCD \dots$$

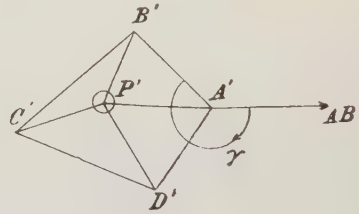
In dem besonderen Falle, wenn die beiden Geraden cc , $e'e$ zusammenfallen, wird der Plan unbestimmt.

3. Der Geschwindigkeitsplan einer ähnlich-veränderlichen Punktgruppe, Abb. 7 und 8. Da die Winkel zwischen den Strecken AB , BC , $CA \dots$ bei der *ähnlichen* Veränderung der Gruppe unverändert bleiben, so sind die gleichzeitigen Drehgeschwindigkeiten aller Strecken gleich groß:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{A'B'}{AB} \sin \gamma_1 \\ &= \frac{B'C'}{BC} \sin \gamma_2 \\ &= \frac{C'A'}{CA} \sin \gamma_3 = \dots\end{aligned}$$



L. Abb. 7.



G. Abb. 8.

Auch die Dehnungs-
geschwindigkeiten

aller Strecken sind infolge der ähnlichen Veränderung von gleicher Größe:

$$\delta = \frac{A'B'}{AB} \cos \gamma_1 = \frac{B'C'}{BC} \cos \gamma_2 = \frac{C'A'}{CA} \cos \gamma_3 = \dots$$

Die Geschwindigkeitswinkel γ_1 , γ_2 , $\gamma_3 \dots$ sind daher von gleicher Größe γ und durch die Bedingung

$$\frac{\omega}{\sin \gamma} = \frac{\delta}{\cos \gamma} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \dots \quad (7)$$

bestimmt. Folglich ist wie bei einer starren Punktgruppe

$$A'B'C'D' \dots \approx ABCD \dots \quad (8)$$

Der gemeinschaftliche Geschwindigkeitswinkel γ kann jede Größe annehmen; er liegt:

im ersten Quadranten, wenn ω positiv und δ positiv ist
 „ zweiten „ „ „ ω positiv „ δ negativ „
 „ dritten „ „ „ ω negativ „ δ negativ „
 „ vierten „ „ „ ω negativ „ δ positiv

ist. Zählt man alle Punkte der Ebene ABC zur ähnlich-veränderlichen Gruppe, so enthält dieselbe nur einen einzigen Punkt P , dessen augenblickliche Geschwindigkeit gleich null ist. Dieser *Geschwindigkeitspol des Lageplans* ist wiederum bestimmt durch die Bedingung

$$PABC \dots \approx P'A'B'C' \dots \quad (9)$$

Jede unendlich kleine Bewegung einer ähnlich-veränderlichen Punktgruppe besteht demnach aus dieser Veränderung in Verbindung mit einer gleichzeitigen unendlich kleinen Drehung um einen ruhenden Punkt P . Der gemeinschaftliche Geschwindigkeitswinkel

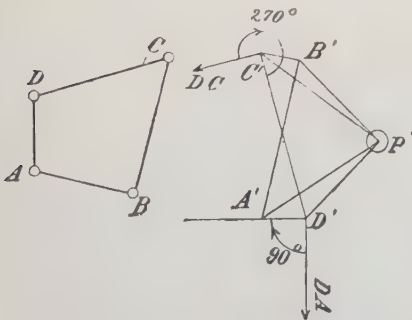
$$\gamma = (\overline{PA}, \overline{P'A'}) = (\overline{PB}, \overline{P'B'}) = (\overline{PC}, \overline{P'C'}) \dots$$

wird gleich null oder 180° , wenn ω gleich null ist, er wird gleich 90° oder 270° in dem besonderen Falle, wenn δ gleich null ist.

Der Geschwindigkeitsplan einer ähnlich-veränderlichen Punktgruppe $ABC \dots$ wird bestimmt durch die *voneinander unabhängigen* Geschwindigkeiten $P'A'$, $P'B'$ zweier Punkte A , B der Gruppe. Bleiben diese beiden Geschwindigkeiten unverändert, so ändern sich auch die Geschwindigkeiten der anderen Punkte nicht. Wenn also zwei Punkte einer ähnlich-veränderlichen Gruppe mit unveränderlichen Geschwindigkeiten in geraden Linien sich bewegen, so beschreibt auch jeder andere Punkt der Gruppe mit unveränderlicher Geschwindigkeit eine Gerade.

4. Der Geschwindigkeitsplan eines Stabpolygons, Abb. 9 und 10. AB , BC , $CD \dots$ bezeichnen m starre Körper, die

parallel zur Bildebene sich bewegen, in den Punkten A , B , $C \dots$ durch Gelenke miteinander verbunden sind und eine geschlossene Kette bilden. Durch die Geschwindigkeiten $P'A'$, $P'B'$, $P'C' \dots$ der Gelenke sind die Bewegungen der Körper vollständig bestimmt. Sie können also ersetzt werden durch starre Stäbe AB , BC , $CD \dots$, und



L. Abb. 9.

G. Abb. 10.

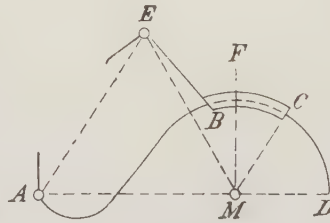
ein solches Körperpolygon soll daher ein *Stabpolygon* genannt werden. Die geometrische Beziehung des Geschwindigkeitsplans zum Lageplan besteht einfach darin, daß jede Seite des geschlossenen m -Ecks $A'B'C'D' \dots$ zu der entsprechenden Seite des m -Ecks $ABCD \dots$ normal gerichtet sein muß; denn der Geschwindigkeitswinkel eines jeden starren Stabes ist entweder gleich 90° oder gleich 270° . Für die folgenden Anwendungen dieser Beziehung kommt nur der einfachste Fall in Betracht, in dem alle Ecken des Polygons $A'B'C'D' \dots$ bis auf eine, z. B. B' , gegeben sind. Man zieht $A'B'$ normal zu AB , $C'B'$ normal zu CB und bestimmt hierdurch die Geschwindigkeit $P'B'$ des Gelenkes B sowie die Drehgeschwindigkeiten

$$\frac{A'B'}{AB} \sin(AB, A'B') \text{ und } \frac{B'C'}{BC} \sin(BC, B'C')$$

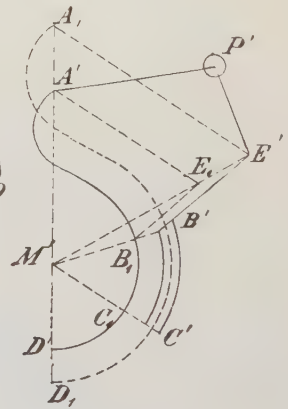
der beiden Stäbe AB , BC .

5. Der Geschwindigkeitsplan eines Stabpolygons mit Schieberverbindungen, Abb. 11 und 12. Es seien AD und BCE zwei Glieder eines Stabpolygons, die in den Gelenken A , E mit den benachbarten Gliedern und durch den Schieber BC miteinander verbunden sind. Der den Schieber führende Stabteil BCD bildet einen Kreisbogen

vom Mittelpunkt M . Wir nehmen an, daß die voneinander unabhängigen Geschwindigkeiten $P'A'$, $P'E'$ der Gelenke A , E gegeben sind. Die relative Bewegung der beiden Glieder gegeneinander besteht in einer Drehung um den Punkt M ;



L. Abb. 11.



G. Abb. 12.

denn diese Bewegung bleibt möglich, wenn ein Gelenk im Punkte M durch einen Stab MD starr mit dem Gliede AD und durch einen zweiten Stab MC starr mit dem Gliede BCE verbunden wird. Da also sowohl die Punkte A und M als auch die Punkte E und M starr miteinander verbunden sind, so bestimmt man die Geschwindig-

keit $P'M'$ des Gelenkes M , indem man $A'M'$ normal zu AM und $E'M'$ normal zu EM zieht. Hierauf sind die Punktgruppen

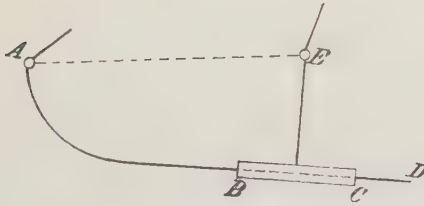
$$A'M'D' \approx AMD \text{ und } M'B'C'E' \approx MBCE$$

zu bilden.

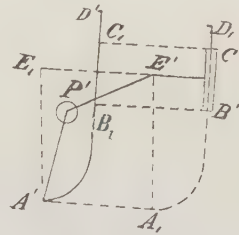
Zweites Verfahren. Man kann die Bewegung des Gliedes BCE zusammensetzen aus einer Bewegung in starrer Verbindung mit dem Gliede AD und einer gleichzeitigen Drehung um den Punkt M . Die erste Bewegung wird durch den Plan $P'A'D'B_1C_1E_1$, die zweite durch die im Punkte M' sich schneidenden Geschwindigkeitsstrecken B_1B' , C_1C' , E_1E' dargestellt. Ebenso läßt sich auch die Bewegung des Gliedes AD zusammensetzen aus einer durch den Geschwindigkeitsplan $P'B'C'E'A_1D_1$ dargestellten Bewegung in starrer Verbindung mit dem Gliede BCE und einer gleichzeitigen Drehung um den Punkt M , bei der die Punkte A , D die Geschwindigkeiten A_1A' , D_1D' annehmen. Man bestimmt also die Punkte A_1 , E_1 , indem man $E'A_1$ und $A'E_1$ normal zu AE , ferner $M'A_1$ normal zu MA und $M'E_1$ normal zu ME zieht. Alsdann können die Punktgruppen

$$A'D'B_1C_1E_1 \approx A_1D_1B'C'E' \approx ADBCE$$

und hierdurch der Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'E'$ gebildet werden.



L Abb. 13.



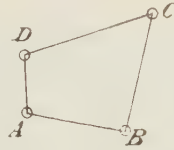
G. Abb. 14.

Diese Bildungsweise ist auch in dem Falle anwendbar, wenn der den Schieber führende Stab BCD gerade ist, Abb. 13 und 14 wenn also der Punkt M unendlich fern liegt. Um den Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'E'$ zu bilden, zieht man $A'E_1$ und $E'A_1$ normal zu AE , ferner $A'A_1$ und $E'E_1$ parallel zu BD und bildet

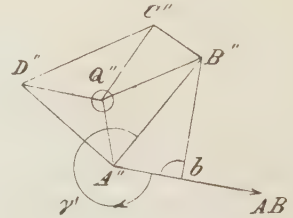
$$A'D'B_1C_1E_1 \approx A_1D_1B'C'E' \approx ADBCE.$$

6. Der Beschleunigungsplan einer Punktgruppe, Abb. 15 und 16. In ähnlicher Weise wie der Geschwindigkeitsplan entsteht

der *Beschleunigungsplan* der ebenen Bewegung einer Punktgruppe, indem man die gleichzeitigen Beschleunigungen der Punkte $A, B, C \dots$ durch Strecken $Q''A'', Q''B'', Q''C'' \dots$ darstellt, die von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkt Q'' , dem *Pol* des Beschleunigungsplans, ausgehen. Der Maßstab dieser Darstellung, 1 cm gleich $\mu'' \text{ cm sek}^{-2}$, ist zweckmäßig so zu wählen, daß er zum Maßstab des Lageplans, 1 cm gleich $\mu \text{ cm}$, in einem einfachen Verhältnis steht. Für die folgenden Anwendungen wählen wir, wenn nichts anderes bemerkt wird, stets



L. Abb. 15.



B. Abb. 16.

$$\mu'' = \mu' = \mu.$$

Auch die Zerlegung der Beschleunigungen kann in derselben Weise ausgeführt und bezeichnet werden wie die der Geschwindigkeiten im Abschnitt 1. Wir zerlegen also z. B. die Beschleunigung $Q''B''$ des Punktes B in die Beschleunigung $Q''A''$ des Punktes A und die relative Beschleunigung $A''B''$ des Punktes B gegen den Punkt A . Der Winkel

$$\gamma' = (AB, A''B'')$$

wird der *Beschleunigungswinkel* der Strecke AB genannt. Wir zerlegen ferner die Beschleunigung $A''B''$ in die zu AB parallel und normal gerichteten Komponenten $A''b$, bB'' und bezeichnen erstere als die *relative Dehnungsbeschleunigung*, letztere als die *relative Drehbeschleunigung* des Punktes B gegen den Punkt A . Die Verhältnisse dieser Beschleunigungsstrecken zur Länge AB bilden die *Dehnungsbeschleunigung* δ' und die *Drehbeschleunigung* ω' der Strecke AB :

$$\left. \begin{aligned} \delta' &= \frac{A''b}{AB} = \frac{A''B''}{AB} \cos (AB, A''B'') = \frac{A''B''}{AB} \cos \gamma' \\ \omega' &= \frac{bB''}{AB} = \frac{A''B''}{AB} \sin (AB, A''B'') = \frac{A''B''}{AB} \sin \gamma'. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

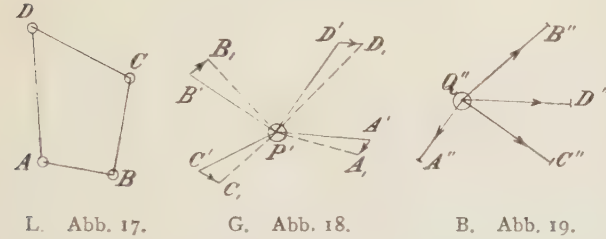
Sinn und Vorzeichen dieser beiden Größen, deren gemeinschaftliche Maßeinheit die sek^{-2} ist, werden durch $\cos \gamma'$ und $\sin \gamma'$ bestimmt.

Läßt man gleichzeitig mit der Bewegung der Punkt-

gruppe $ABC \dots$, Abb. 17 bis 19, den zugehörigen Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C' \dots$ bei festliegendem Pol P' sich ändern, so bildet der Beschleunigungsplan $Q''A''B''C'' \dots$ der Gruppe $ABC \dots$ zugleich den Geschwindigkeitsplan der Punktgruppe $A'B'C' \dots$;

denn werden die

Geschwindigkeiten der Punkte $A, B, C \dots$ zur Zeit t durch die Strecken $P'A', P'B', P'C' \dots$ und zur Zeit $t + dt$ durch die



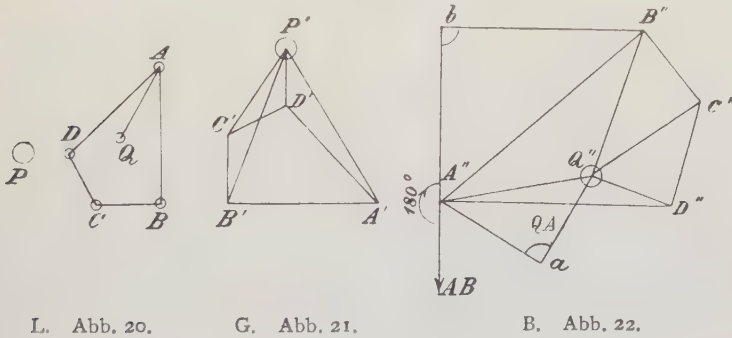
L. Abb. 17.

G. Abb. 18.

B. Abb. 19.

Strecken $P'A_1, P'B_1, P'C_1 \dots$ dargestellt, so ergeben sich sowohl die Geschwindigkeiten der Punkte $A', B', C' \dots$ als auch die Beschleunigungen der Punkte $A, B, C \dots$, indem man die unendlich kleinen Strecken $A'A_1, B'B_1, C'C_1 \dots$ durch die unendlich kleine Zeit dt dividiert. Die Strecken sind im ersten Falle mit dem Längenmaßstabe, in dem zweiten mit dem Geschwindigkeitsmaßstabe zu messen.

7. Der Beschleunigungsplan einer starren Punktgruppe, Abb. 20 bis 22. Wenn die beiden Punkte A, B , Abb. 20, starr miteinander verbunden sind, so ist zu jeder Zeit die Strecke $A'B'$,



L. Abb. 20.

G. Abb. 21.

B. Abb. 22.

Abb. 21, normal zur Strecke AB gerichtet. Die gleichzeitigen Drehgeschwindigkeiten dieser beiden Strecken sind daher nach Größe und Sinn einander gleich:

$$\frac{A''b}{A'B'} = \frac{A''B''}{A'B'} \sin(A'B', A''B'') = \frac{A'B'}{AB} \sin(AB, A'B'). \quad (11)$$

Da demnach die gleich großen Winkel $(AB, A'B')$, $(A'B', A''b)$ beide entweder gleich 90° oder gleich 270° sind, so ist der doppelt so große Winkel

$$(AB, A''b) = (AB, A'B') + (A'B', A''b)$$

entweder gleich 180° oder gleich 540° , d. h. der Sinn der Strecke $A''b$ ist in jedem Fall dem Sinn der Strecke AB entgegengesetzt. In Verbindung mit Gleichung 11) folgt hieraus:

$$A''b = A''B'' \cos(AB, A''B'') = - \frac{(A'B')^2}{AB} \quad (12)$$

oder

$$\delta' = -\omega^2, \quad (13)$$

d. h. die Dehnungsbeschleunigung einer starren Strecke ist in jedem Zeitpunkt gleich dem negativen Quadrat ihrer Drehgeschwindigkeit. Alle Strecken einer starren Punktgruppe haben dieselbe Drehgeschwindigkeit ω , also nach Gleichung 13) auch dieselbe Dehnungsbeschleunigung δ' . Da in jedem Zeitabschnitt alle Drehgeschwindigkeiten um gleiche Größen sich ändern, so haben alle Strecken auch gleiche Drehbeschleunigungen ω' und nach den Gleichungen 10) gleiche Beschleunigungswinkel γ' . Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{\delta'}{\cos \gamma'} = \frac{\omega'}{\sin \gamma'} = \frac{A''B''}{AB} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{C''A''}{CA} = \dots, \quad (14)$$

d. h. die beiden Punktgruppen $A''B''C''D'' \dots$, $ABCD \dots$ sind geometrisch ähnlich und von gleichem Sinn:

$$A''B''C''D'' \dots \approx ABCD \dots \quad (15)$$

Der mit der Gruppe $ABC \dots$ starr verbundene und durch die Bedingung

$$QABC \dots \approx Q''A''B''C'' \dots \quad (16)$$

bestimmte Punkt Q heißt der *Beschleunigungspol des Lageplans*. Von allen Punkten der bewegten Ebene $ABC \dots$ ist Q der einzige, dessen augenblickliche Beschleunigung null ist, der also in zwei aufeinander folgenden, unendlich kleinen Zeitabschnitten mit unveränderter Geschwindigkeit in gerader Linie sich bewegt.

Der durch die Gleichung

$$\frac{\sin \gamma'}{\cos \gamma'} = \frac{\omega'}{\delta'} = - \frac{\omega'}{\omega^2} \quad (17)$$

bestimmte Beschleunigungswinkel

$$\gamma' = (QA, Q''A'') = (QB, Q''B'') = \dots$$

liegt, weil δ' stets negativ ist, im zweiten oder im dritten Quadranten, je nachdem ω' positiv oder negativ ist.

Die Beschleunigungsstrecke $Q''A''$ ist proportional der Strecke QA und setzt sich zusammen aus der relativen Dehnungsbeschleunigung des Punktes A gegen den Punkt Q

$$Q''a = \delta' QA = -\omega^2 QA \quad (18)$$

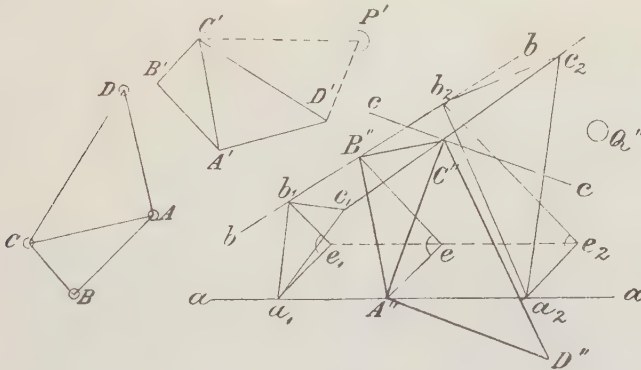
und der relativen Drehbeschleunigung

$$aA'' = \omega' QA. \quad (19)$$

Der Beschleunigungsplan einer starren Punktgruppe wird zufolge Gleichung 15) bestimmt durch die Beschleunigungen $Q''A''$, $Q''B''$ zweier Punkte der Gruppe. Diese beiden Strecken sind voneinander abhängig durch Gleichung 12), nach der die Projektion $A''b$ der Strecke $A''B''$ auf die Gerade AB den Sinn BA und die Größe $\frac{(A'B')^2}{AB}$ haben muß.

Der Plan ist ferner bestimmt, wenn außer dem Pol Q'' drei Gerade aa , bb , cc , Abb. 25, gegeben sind, auf welchen beziehungsweise die Punkte A'' , B'' , C'' liegen müssen. Man bildet zwei Vier-

G. Abb. 24.



L. Abb. 23.

B. Abb. 25.

ecke $a_1b_1c_1e_1$ und $a_2b_2c_2e_2$, die folgende Bedingungen erfüllen: Die Punkte a_1 , a_2 liegen auf aa , b_1 , b_2 auf bb ; die Strecken a_1e_1 , a_2e_2 haben die Richtung und den Sinn BA , Abb. 23—25, und die gemeinschaftliche Größe

$$a_1e_1 = a_2e_2 = \frac{(A'B')^2}{AB}.$$

Die Strecken e_1b_1 , e_2b_2 sind normal zu AB gerichtet, und endlich ist

$$a_1b_1c_1 \approx a_2b_2c_2 \approx ABC.$$

Erteilt man nun den Punkten a_1 , b_1 , c_1 , e_1 gleichzeitig die Geschwindigkeiten a_1a_2 , b_1b_2 , c_1c_2 , e_1e_2 , so bleiben bei der Bewegung unverändert:

die Richtungen der Strecken $a_1 e_1$, $e_1 b_1$, die Größe der Strecke $a_1 e_1$ und die Winkel des Dreiecks $a_1 b_1 c_1$. Der Punkt C'' des Beschleunigungsplans ist also der Schnittpunkt der beiden Geraden ce und $c_1 c_2$. Man bestimmt ferner einen der Punkte A'' , B'' aus der Bedingung:

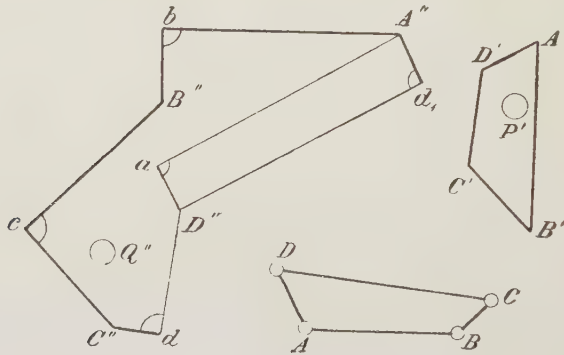
$$\frac{a_1 A''}{a_1 a_2} = \frac{b_1 B''}{b_1 b_2} = \frac{c_1 C''}{c_1 c_2}$$

und den übrigen Teil des Plans nach der Bedingung:

$$A'' B'' C'' D'' \dots \approx ABCD \dots$$

8. Der Beschleunigungsplan eines Stabpolygons mit Gelenkverbindungen, Abb. 26 bis 28. Einem Stabpolygon $ABCD$ von m Seiten entspricht im Beschleunigungsplan ein Polygon

G. Abb. 27.



B. Abb. 28.

L. Abb. 26.

$A'' b B'' c C'' d D'' a A''$ von $2m$ Seiten. In dem vorliegenden Beispiel ist, wie in allen folgenden Fällen, der Maßstab

des Lageplans: $1 \text{ cm} = 100 \text{ cm}$,

des Geschwindigkeitsplans: $1 \text{ cm} = 100 \text{ cm sek}^{-1}$,

des Beschleunigungsplans: $1 \text{ cm} = 100 \text{ cm sek}^{-2}$.

Nachdem der Geschwindigkeitsplan gebildet worden ist, sind von jenen $2m$ Seiten nach Größe, Richtung und Sinn m bekannt:

$$\left. \begin{aligned} A'' b &= \frac{(A' B')^2}{AB} = \frac{250^2}{200} = 313 \text{ cm sek}^{-2}; (AB, A'' b) = 180^\circ \\ B'' c &= \frac{(B' C')^2}{BC} = \frac{120^2}{60} = 240 \text{ cm sek}^{-2}; (BC, B'' c) = 180^\circ \\ C'' d &= \frac{(C' D')^2}{CD} = \frac{130^2}{290} = 58 \text{ cm sek}^{-2}; (CD, C'' d) = 180^\circ \\ D'' a &= \frac{(D' A')^2}{DA} = \frac{80^2}{90} = 71 \text{ cm sek}^{-2}; (DA, D'' a) = 180^\circ. \end{aligned} \right\} (20)$$

Von den übrigen m Seiten sind die *Richtungen* bekannt:

$$bB'' \perp AB, cC'' \perp BC, dD'' \perp CD, aA'' \perp DA. \quad (21)$$

Um den Beschleunigungsplan des Stabpolygons bilden zu können, müssen demnach gegeben sein: der Geschwindigkeitsplan, Abb. 27, die Beschleunigung $Q''A''$ eines Gelenkes A und die Drehbeschleunigungen von $(m-2)$ Stäben, z. B:

$$bB'' = +120 \text{ cm sek}^{-2}, \text{ also } (AB, bB'') = 90^\circ, \\ cC'' = +180 \text{ cm sek}^{-2}, \text{ also } (BC, cC'') = 90^\circ.$$

Durch die vorstehenden Angaben sind die Punkte Q'', A'', b, B'', c, C'' bestimmt. Es ist dann aufzutragen:

$$(AD, A''d_1) = 180^\circ, \quad A''d_1 = D''a = 71 \text{ cm sek}^{-2} \\ (CD, C''d) = 180^\circ, \quad C''d = 58 \text{ cm sek}^{-2} \\ d_1D'' \perp AD, \quad dD'' \perp CD.$$

Die gegebenen und die durch Rechnung bestimmten Strecken sind in Abb. 28 wie in den folgenden Abbildungen durch kräftigere Linien gekennzeichnet.

9. Der Beschleunigungsplan eines Stabpolygons mit Schieberverbindungen. Die Abb. 29 und 30 bilden eine Wiederholung der Abb. 11 und 12. AD und BCE sind also, wie im Abschnitt 5, zwei Glieder eines Stabpolygons, die in den Gelenken A, E mit den benachbarten Gliedern und durch den Schieber BC miteinander verbunden sind. Gegeben sind: der Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'E'$, Abb. 30, und die voneinander unabhängigen Beschleunigungen $Q''A'', Q''E''$ der Gelenke A, E , Abb. 31. Es ist die Aufgabe, den Beschleunigungsplan der beiden Glieder AD, BCE zu bilden.

Erstes Verfahren. (Abb. 31.) Im Abschnitt 5 wurde gezeigt, daß die Schieberverbindung ersetzt werden kann durch das Gelenk M , mit dem die Glieder AD, BCE durch Stäbe MD, MC starr zu verbinden sind. Man bestimmt also nach Abschnitt 8 die Beschleunigung $Q''M''$ des Gelenkes M , indem man aufträgt:

$$(AM, A''m) = 180^\circ, \quad A''m = \frac{(A'M')^2}{AM} = \frac{228^2}{260} = 200 \text{ cm sek}^{-2},$$

$$(EM, E''m_1) = 180^\circ, \quad E''m_1 = \frac{(E'M')^2}{EM} = \frac{300^2}{249} = 361 \text{ cm sek}^{-2}.$$

$$mM'' \perp A''m, \quad m_1M'' \perp E''m_1.$$

die Drehgeschwindigkeit der Strecke $A_1 A'$. Diese Größe steht in einer bemerkenswerten Beziehung zu den Drehgeschwindigkeiten ω_1 , ω_2 der beiden Glieder AD und BCE . Es ist nämlich im Sinne der Achse MA :

$$M'' a'' = -MA \omega_1^2, \quad M'' a_2 = -MA \omega_2^2,$$

also

$$a_2 a'' = MA (\omega_2^2 - \omega_1^2).$$

Ferner ist im Sinne einer Achse FM , Abb. 29, die mit MA den Winkel (FM, MA) gleich 90° einschließt:

$$M' A' = -MA \omega_1, \quad M' A_1 = -MA \omega_2,$$

folglich

$$A_1 A' = MA (\omega_2 - \omega_1).$$

Die Drehgeschwindigkeit ω der Strecke $A_1 A'$ hat also den algebraischen Wert

$$\omega = \frac{MA (\omega_2^2 - \omega_1^2)}{MA (\omega_2 - \omega_1)} = \omega_1 + \omega_2. \quad (22)$$

Da dieser Wert unabhängig ist von der Wahl des Punktes A , so haben alle Strecken $A_1 A'$, $B_1 B'$, $C_1 C'$, $D_1 D'$, $E_1 E'$ eine gemeinschaftliche Drehgeschwindigkeit ω , die gleich ist der algebraischen Summe der Drehgeschwindigkeiten ω_1 , ω_2 der beiden durch den Schieber verbundenen Glieder AD und BCE . Vermittels dieser Beziehung lassen sich die Punkte A_2 , E_2 bestimmen, auch wenn die Punkte M , M' , M'' nicht auf das Zeichnungsblatt fallen. Für das vorliegende Beispiel ist

$$\omega_1 = \frac{M' A'}{MA} \sin (MA, M' A') = + \frac{228}{260}$$

$$\omega_2 = \frac{M' A_1}{MA} \sin (MA, M' A_1) = + \frac{313}{260}$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = + \frac{541}{260}.$$

Da dieser Wert positiv ist, so sind die Winkel

$$(A' A_1, A'' a) = (E' E_1, E'' e) = 90^\circ.$$

Ferner ist aufzutragen:

$$A'' a = a'' a_2 = A' A_1 \omega = 85 \frac{541}{260} = 177 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$E'' e = E' E_1 \omega = 80 \frac{541}{260} = 166 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$(EA, E'' a_1) = (AE, A'' e_1) = 180^\circ$$

$$E'' a_1 = \frac{(E' A_1)^2}{EA} = \frac{316^2}{263} = 380 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$A'' e_1 = \frac{(A' E_1)^2}{AE} = \frac{230^2}{263} = 201 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$a A_2 \perp A'' a, \quad e E_2 \perp E'' e, \quad a_1 A_2 \perp E'' a_1, \quad e_1 E_2 \perp A'' e_1.$$

Nachdem hierdurch die Punkte A_2, E_2 bestimmt worden sind, kann der Beschleunigungsplan $Q'' A'' B'' C'' D'' E''$ gebildet werden nach der Bedingung

$$A'' D'' B_2 C_2 E_2 \cong A_2 D_2 B'' C'' E'' \cong ADBCE.$$

Wenn der den Schieber führende Stabteil BCD , Abb. 32—34,

gerade ist, so vereinfacht sich das Verfahren, weil die Drehgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 der beiden Glieder AD, BCE gleich groß sind, und also die gemeinschaftliche Drehgeschwindigkeit der Strecken $A_1 A', B_1 B', C_1 C', D_1 D', E_1 E'$

$$\omega = 2\omega_1 = 2\omega_2 \quad (23)$$

wird. Da ferner auch die Drehbeschleunigungen und die Beschleunigungswinkel für beide Glieder gleich groß sind, so sind die *Punktgruppen*

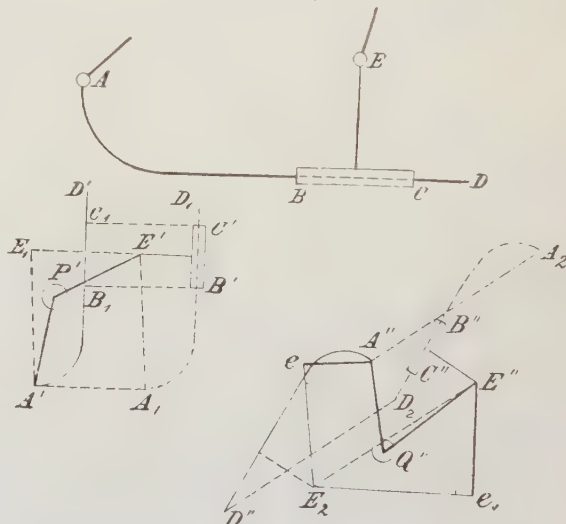
$A'' D'' B_2 C_2 E_2, A_2 D_2 B'' C'' E''$ kongruent und können durch Parallelverschiebung zur Deckung gebracht werden. Die Strecken $A'' A_2, D'' D_2, B_2 B'', C_2 C'', E_2 E''$ sind daher gleich groß und gleich gerichtet, und von den beiden Punkten A_2, E_2 braucht nur einer, z. B. E_2 , bestimmt zu werden. Im vorliegenden Beispiel ist

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{A' E_1}{AE} \sin(AE, A' E_1) = -\frac{180}{360} = -\frac{1}{2} \text{ sek}^{-1},$$

also

$$\omega = 2\omega_1 = -1 \text{ sek}^{-1},$$

L. Abb. 32.



G. Abb. 33.

B. Abb. 34.

Folglich ist aufzutragen:

$$\begin{aligned}(E' E_1, E'' e_1) &= 270^\circ \\ E'' e_1 &= E' E_1 \omega = E' E_1 = 150 \text{ cm sek}^{-2} \\ (AE, A'' e) &= 180^\circ \\ A'' e &= \frac{(A' E_1)^2}{AE} = \frac{180^2}{360} = 90 \text{ cm sek}^{-2} \\ e_1 E_2 &\perp E'' e_1, \quad e E_2 \perp A'' e.\end{aligned}$$

Man bestimmt dann A_2 , indem man der Strecke $A'' A_2$ Größe, Richtung und Sinn der Strecke $E_2 E''$ gibt und bildet endlich die Punktgruppen:

$$A'' D'' B_2 C_2 E_2 \approx A_2 D_2 B'' C'' E'' \approx ADBCE.$$

Anwendung des Satzes von Coriolis auf die vorstehenden zwei Aufgaben. In dem Beispiel der Abb. 29 bis 31a kann AD als das führende und CBE als das geführte Glied angesehen werden. Das führende Glied dreht sich mit der Geschwindigkeit ω_1 , das geführte mit der Geschwindigkeit ω_2 . Die relative Bewegung des Gliedes EBC gegen das Glied AD besteht also aus einer Drehung um den Punkt M mit der Geschwindigkeit $(\omega_2 - \omega_1)$. Die Beschleunigung der relativen Bewegung des Punktes E gegen das Glied AD wird in der Abb. 31a dargestellt durch die Strecke $\overline{E_2 e_2}$, d. h. durch die geometrische Summe der Normalbeschleunigung

$$\overline{ee_2} = \overline{EM}(\omega_2 - \omega_1)^2$$

und der von der Strecke $\overline{E_2 e}$ dargestellten Tangentialbeschleunigung. Die Strecke $\overline{ee_2}$ hat Richtung und Sinn der Strecke $\overline{EM}$ (Abb. 29), während $\overline{E_2 e}$ zu $\overline{EM}$ normal gerichtet ist. Nach dem Satze von Coriolis setzt sich die Beschleunigung $\overline{Q'' E''}$ des Punktes E zusammen aus drei Beschleunigungen, nämlich erstens der Beschleunigung $\overline{Q'' E_2}$, die der Punkt E in starrer Verbindung mit dem führenden Gliede AD annehmen würde, zweitens der Beschleunigung $\overline{E_2 e_2}$ der relativen Bewegung des Punktes E gegen das führende Glied AD und drittens einer Zusatzbeschleunigung $\overline{e_2 E''}$. Richtung und Sinn dieser Zusatzbeschleunigung werden bestimmt, indem die relative Geschwindigkeit $\overline{E_1 E'}$ (Abb. 30) des Punktes E gegen das führende Glied AD im Sinne der Drehung ω_1 dieses Gliedes, hier also im Sinne der Uhrzeigerbewegung um 90° gedreht wird. Die Strecke $\overline{e_2 E''}$ hat demnach Richtung und Sinn der Strecke $\overline{ee_2}$. Die Zusatzbeschleunigung hat die Größe:

$$\overline{eE''} = 2 \omega_1 \overline{E_1 E'} = 2 \overline{EM} \omega_1 (\omega_2 - \omega_1).$$

Demnach ist:

$$\overline{eE''} = \overline{ee_2} + \overline{e_2 E''} = \overline{EM}[(\omega_2 - \omega_1)^2 + 2\omega_1(\omega_2 - \omega_1) = \overline{EM}(\omega_2^2 - \omega_1^2)]$$

übereinstimmend mit unserer Darstellung:

$$\overline{eE''} = E_1 \overline{E'} \omega = \overline{EM}(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 + \omega_1).$$

In dem *zweiten* Beispiel (Abb. 32 bis 34) haben das führende Glied AD und das geführte Glied $BC'E$ dieselbe Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}.$$

Die relative Bewegung des geführten Gliedes ist also eine Verschiebung auf dem geraden Stabe BD . Um Richtung und Sinn der Zusatzbeschleunigung $\overline{e_1 E''}$ zu bestimmen, ist die relative Geschwindigkeit $\overline{E_1 E'}$ des Punktes E im Sinne von ω_1 , hier also der Uhrzeigerbewegung entgegen um 90° zu drehen. Ihre Größe ist in Uebereinstimmung mit unserer Darstellung:

$$\overline{e_1 E''} = \overline{E_1 E'} \omega = 2 \overline{E_1 E'} \omega_1.$$

Dem Satze von Coriolis gemäß bildet die Beschleunigung $\overline{Q'' E''}$ des Punktes E die geometrische Summe der Beschleunigung $\overline{Q'' E_2}$, die der Punkt E in starrer Verbindung mit dem führenden Gliede AD erhalten würde, ferner der Beschleunigung $\overline{E_2 e_1}$ der relativen Bewegung gegen den Stab AD und der Zusatzbeschleunigung $\overline{e_1 E''}$.

10. Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne ebener Getriebe. Eine in der Ebene sich bewegende Stabverbindung, die so gestützt und so geführt wird, daß in jeder Lage ihr Geschwindigkeitsplan bestimmt ist, wird ein *ebenes Getriebe* genannt. In der Regel besteht die Stützung und die Führung des Getriebes darin, daß ein Glied festgestellt ist, während ein *zweites* Glied um einen Punkt des festgestellten Gliedes mit gegebener Drehgeschwindigkeit geführt wird.

Die Geschwindigkeiten in zwei unendlich nahe aufeinanderfolgenden Zeitpunkten sind durch die Drehgeschwindigkeiten des geführten Gliedes bestimmt. Um den *Beschleunigungsplan* des Getriebes für einen Zeitpunkt darstellen zu können, muß also außer den Geschwindigkeiten aller Glieder noch die Drehbeschleunigung des geführten Gliedes gegeben sein.

Bei der Bildung der Geschwindigkeitspläne und der Beschleunigungspläne ebener Getriebe kommen in erster Linie die in den vorstehenden Abschnitten beschriebenen Gesetze zur Anwendung; außerdem noch einige Regeln über die Zusammensetzung mehrerer Bewegungen, für deren Darstellung wir folgende Bezeichnungen anwenden.

Die Glieder des Getriebes werden mit den Nummern 0, 1, 2, 3 . . . , verschiedene Bewegungen des Getriebes mit I, II, III . . . bezeichnet. ω_{mn} und ω'_{mn} bezeichnen die Drehgeschwindigkeit und die Drehbeschleunigung des Gliedes m in der Bewegung n . $l_1, l_2, l_3 \dots$ sind die Längen der Seiten eines Stabpolygons, dem die Glieder 1, 2, 3 . . . angehören. Zur Darstellung einer *geometrischen* Summe benutzen wir das Summierungszeichen $\pm$.

Wir erinnern daran, daß der Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'$, Abb. 26 und 27, eines Stabpolygons $ABCD$, dem die Glieder 1, 2, 3, 4 angehören, nur die *eine* Bedingung zu erfüllen hat:

$$l_1\omega_1 \mp l_2\omega_2 \mp l_3\omega_3 \mp l_4\omega_4 \equiv 0, \quad (24)$$

d. h. die Seiten $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ von den Längen $l_1\omega_1$, $l_2\omega_2 \dots$ und den gegebenen Richtungen

$$A'B' \perp AB, B'C' \perp BC \text{ usw.}$$

bilden ein *geschlossenes* Polygon und haben daher eine geometrische Summe gleich null. Ebenso hat der Beschleunigungsplan des Stabpolygons $Q''A''bB''cC''dD''aA''$, Abb. 28, nur *eine* Bedingung zu erfüllen:

$$l_1\omega_1^2 \mp l_2\omega_2^2 \mp l_3\omega_3^2 \mp l_4\omega_4^2 \mp l_1\omega_1' \mp l_2\omega_2' \mp l_3\omega_3' \mp l_4\omega_4' \equiv 0, \quad (25)$$

d. h. die Seiten $A''b$, $B''c$, $C''d$, $D''a$ von den Größen $l_1\omega_1^2$, $l_2\omega_2^2$, $l_3\omega_3^2$, $l_4\omega_4^2$, deren Richtung und Sinn durch BA , CB , DC , AD gegeben sind, müssen in Verbindung mit den Seiten bB'' , cC'' , dD'' , aA'' von den Richtungen

$$bB'' \perp AB, cC'' \perp BC \dots$$

und den Längen

$$bB'' = l_1\omega_1', cC'' = l_2\omega_2' \dots$$

ein *geschlossenes* Polygon bilden. Diese Bedingungen gelten in gleicher Form auch für Stabpolygone mit Schieberverbindungen, wenn man nach den Abschnitten 5 und 9 die Schieber durch Gelenke ersetzt.

1. Bezeichnet $P'A'B'C' \dots$ den Geschwindigkeitsplan einer Bewegung I der Stabverbindung $ABC \dots$ und P_1 irgend einen Punkt der Ebene, so ist $P_1A'B'C' \dots$ der Geschwindigkeitsplan einer *möglichen* Bewegung II, d. h. einer Bewegung, die von der Stabverbindung gestattet wird; denn die Bedingung 24) wird von jedem Stabpolygon für beide Bewegungen in gleicher Weise erfüllt. Die Bewegung II entsteht, indem man die Bewegung I zusammensetzt mit einer gleichzeitigen Parallelverschiebung, die allen Punkten die gemeinschaftliche Geschwindigkeit P_1P' erteilt.

2. Bezeichnet $Q''A''B''C'' \dots$ den Beschleunigungsplan einer Bewegung I der Stabverbindung $ABC \dots$ und Q_2 irgend einen Punkt der Ebene, so ist $Q_2A''B''C'' \dots$ der Beschleunigungsplan einer *möglichen* Bewegung II der Stabverbindung. Die Bewegung II entsteht, indem die Bewegung I zusammengesetzt wird mit einer Parallelverschiebung von beliebiger Geschwindigkeit und der Be-

schleunigung $Q_2 Q''$. Die Bewegung II ist möglich, weil die Bedingungen 25) für beide Bewegungen I und II gleich lauten.

3. (Vergl. Beispiel 5.) Bezeichnen $P'_1 A'_1 B'_1 C'_1 \dots$ und $P'_2 A'_2 B'_2 C'_2 \dots$ die Geschwindigkeitspläne zweier Bewegungen I, II der Stabverbindung $ABC \dots$, also

$$\omega_{01}, \omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{31} \dots$$

und

$$\omega_{02}, \omega_{12}, \omega_{22}, \omega_{32} \dots$$

die Drehgeschwindigkeiten der Glieder 0, 1, 2, 3 ... in diesen beiden Bewegungen, ferner ζ_1, ζ_2 zwei beliebige positive oder negative Zahlen, so wird der Geschwindigkeitsplan $P'_3 A'_3 B'_3 C'_3 \dots$ einer möglichen Bewegung III gebildet, indem man

$$\begin{aligned} P'_3 A'_3 &\equiv \zeta_1 \cdot P'_1 A'_1 \pm \zeta_2 \cdot P'_2 A'_2 \\ P'_3 B'_3 &\equiv \zeta_1 \cdot P'_1 B'_1 \pm \zeta_2 \cdot P'_2 B'_2 \text{ usf.} \end{aligned}$$

aufträgt. Die Drehgeschwindigkeiten der Glieder 0, 1, 2 ... erhalten in der Bewegung III die Größen

$$\begin{aligned} \omega_{03} &= \zeta_1 \omega_{01} + \zeta_2 \omega_{02} \\ \omega_{13} &= \zeta_1 \omega_{11} + \zeta_2 \omega_{12} \\ \omega_{23} &= \zeta_1 \omega_{21} + \zeta_2 \omega_{22} \text{ usf.} \end{aligned}$$

Ist ζ negativ, so ist der Sinn der Drehgeschwindigkeit $\zeta\omega$ dem Sinn von ω entgegengesetzt. Der Beweis der vorstehenden Behauptungen ergibt sich, indem man für jedes Stabpolygon die Bedingung 24) für alle drei Bewegungen bildet und beachtet, daß die Bedingung der Bewegung III unmittelbar aus den Bedingungen I und II zu folgern ist. Sind die Drehgeschwindigkeiten ω_{03}, ω_{13} zweier Glieder 0, 1 in der Bewegung III gegeben, so sind die beiden Zahlen ζ_1, ζ_2 durch obige Gleichungen bestimmt:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{\omega_{03} \omega_{12} - \omega_{13} \omega_{02}}{\omega_{01} \omega_{12} - \omega_{11} \omega_{02}} \\ \zeta_2 &= \frac{\omega_{03} \omega_{11} - \omega_{13} \omega_{01}}{\omega_{02} \omega_{11} - \omega_{12} \omega_{01}} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Bei Anwendung dieser Zusammensetzung kann man in der Regel als Bewegung II eine Drehung aller Glieder in starrer Verbindung miteinander, und zwar mit der Drehgeschwindigkeit

$$\pm 1 = \omega_{02} = \omega_{12} = \omega_{22} = \dots$$

wählen; dann wird

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{\omega_{03} - \omega_{13}}{\omega_{01} - \omega_{11}} \\ \zeta_2 &= \frac{\omega_{03} \omega_{11} - \omega_{13} \omega_{01}}{\omega_{11} - \omega_{01}} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

4. (Vergl. Beispiel 6.) Für eine Stabverbindung sei gegeben die Bewegung I durch ihre Drehgeschwindigkeiten:

$$\omega_{01}, \omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{31} \dots$$

und ihre Drehbeschleunigungen:

$$\omega'_{01}, \omega'_{11}, \omega'_{21}, \omega'_{31} \dots;$$

ferner die Bewegung II durch ihre Drehgeschwindigkeiten:

$$0 = \omega_{02} = \omega_{12} = \omega_{22} = \omega_{32} = \dots$$

und ihre Drehbeschleunigungen:

$$\omega'_{02} = \alpha \omega_{01}, \quad \omega'_{12} = \alpha \omega_{11}, \quad \omega'_{22} = \alpha \omega_{21} \quad \text{usf.}$$

α bezeichnet eine beliebige positive oder negative Drehgeschwindigkeit. Eine solche Bewegung nennt man eine *Anfangsbewegung*, weil sie an den Ruhezustand sich anschließt. Sie ist möglich, weil der Beschleunigungsplan der Bewegung II dem Geschwindigkeitsplan der Bewegung I geometrisch ähnlich ist, und weil infolgedessen die Bedingung 25) für jedes Stabpolygon erfüllt ist.

Gegeben sei endlich die Bewegung III, ebenfalls eine Anfangsbewegung, durch ihre Drehgeschwindigkeiten:

$$0 = \omega_{03} = \omega_{13} = \omega_{23} = \omega_{33} = \dots$$

und durch die Drehbeschleunigungen

$$\alpha' = \omega'_{03} = \omega'_{13} = \omega'_{23} = \omega'_{33} = \dots$$

Der Beschleunigungsplan dieser Bewegung III ist dem *Lageplan* geometrisch ähnlich; es ist also für jedes Stabpolygon die Bedingung 25) erfüllt.

Es soll eine Bewegung IV gebildet werden, die in ihren Drehgeschwindigkeiten mit der Bewegung I übereinstimmt:

$$\omega_{04} = \omega_{01}, \quad \omega_{14} = \omega_{11}, \quad \omega_{24} = \omega_{21} \quad \text{usf.,}$$

während für zwei beliebige Glieder 0 und 1 die Drehbeschleunigungen ω'_{04} , ω'_{14} vorgeschrieben sind. Die Bewegung IV entsteht durch Zusammensetzung der Bewegungen I, II, III. Hierdurch wird:

$$\begin{aligned} \omega'_{04} &= \omega'_{01} + \alpha \omega_{01} + \alpha' \\ \omega'_{14} &= \omega'_{11} + \alpha \omega_{11} + \alpha' \\ \omega'_{24} &= \omega'_{21} + \alpha \omega_{21} + \alpha' \quad \text{usf.} \end{aligned}$$

Die Drehgeschwindigkeit α und die Drehbeschleunigung α' werden durch die ersten beiden Gleichungen bestimmt:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega'_{04} - \omega'_{01} + \omega'_{11} - \omega'_{14}}{\omega_{01} - \omega_{11}} \\ \alpha' &= \omega'_{04} - \omega'_{01} - \alpha \omega_{01} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

5. (Vergl. Beispiel 8.) Wenn *einem* Stabe eines Getriebes, z. B. dem Stabe 3, die *Eigenschaft der Dehnbarkeit* beigelegt wird, so erhält die Stabverbindung einen höheren Grad der Beweglichkeit, so daß eine ihrer Bewegungen erst bestimmt wird, wenn die Drehgeschwindigkeiten und Drehbeschleunigungen von *drei* Gliedern, z. B. der Glieder 0, 1, 2, gegeben sind. Es seien die Geschwindigkeiten der Bewegungen I und II bestimmt durch die gegebenen Größen

$$\omega_{01} = 0, \quad \omega_{11} = 0, \quad \omega_{21} = +1 \text{ sek}^{-1}$$

und

$$\omega_{02} = 0, \quad \omega_{12} = +1 \text{ sek}^{-1}, \quad \omega_{22} = 0.$$

Aus den Geschwindigkeitsplänen dieser beiden Bewegungen können die Dehnungsgeschwindigkeiten δ_{31} , δ_{32} des dehnbaren Stabes 3 entnommen werden.

Es sei nun die Aufgabe, die Geschwindigkeiten einer Bewegung III zu bestimmen, für die vorgeschrieben ist: die Drehgeschwindigkeit des Gliedes 0

$$\omega_{03} = 0,$$

ferner die Drehgeschwindigkeit ω_{13} des Gliedes 1 und endlich die Starrheit des Stabes 3:

$$\delta_{33} = 0.$$

Diese Bewegung III kann also von dem *Getriebe* ausgeführt werden. Sie wird gebildet durch Zusammensetzung der ζ_1 -fachen Geschwindigkeiten der Bewegung I mit den ζ_2 -fachen Geschwindigkeiten der Bewegung II, wenn die beiden Zahlen ζ_1 , ζ_2 folgende zwei Bedingungen erfüllen: Die Drehgeschwindigkeit des Gliedes 1 muß die vorgeschriebene Größe ω_{13} erhalten:

$$\omega_{13} = \zeta_1 \omega_{11} + \zeta_2 \omega_{12} = \zeta_2 \text{ sek}^{-1}$$

oder

$$\zeta_2 = \frac{\omega_{13}}{1 \text{ sek}^{-1}}. \quad (29)$$

Ferner muß die Dehnungsgeschwindigkeit des Stabes 3 gleich null werden:

$$\delta_{33} = \zeta_1 \delta_{31} + \zeta_2 \delta_{32} = 0,$$

woraus folgt:

$$\zeta_1 = - \frac{\delta_{32}}{\delta_{31}} \frac{\omega_{13}}{1 \text{ sek}^{-1}}. \quad (30)$$

Die Drehgeschwindigkeiten der Bewegung III haben demnach die Größen:

$$\omega_{03} = \zeta_1 \omega_{01} + \zeta_2 \omega_{02} = 0$$

$$\omega_{13} = \zeta_1 \omega_{11} + \zeta_2 \omega_{12} = \zeta_2$$

$$\omega_{23} = \zeta_1 \omega_{21} + \zeta_2 \omega_{22} \text{ usf.}$$

Es sei ferner die Aufgabe, die *Beschleunigungen* der Bewegung III zu bestimmen, wenn vorgeschrieben ist: die Drehbeschleunigung ω'_{13} des Gliedes 1 und diejenige des Gliedes 0

$$\omega'_{03} = 0.$$

Man erteilt wieder einem Stabe 3 die Eigenschaft der Dehnbarkeit und bestimmt durch einen Plan die Beschleunigungen der Bewegung IV, deren Geschwindigkeiten mit denen der Bewegung III übereinstimmen

$$\omega_{04} = \omega_{03} = 0, \quad \omega_{14} = \omega_{13}, \quad \omega_{24} = \omega_{23} \quad \text{usf.},$$

während die Drehbeschleunigungen der *drei* Glieder 0, 1, 2 die Größen

$$\omega'_{04} = 0, \quad \omega'_{14} = \omega'_{13}, \quad \omega'_{24} = 0$$

erhalten. Mit V bezeichnen wir ferner eine Bewegung, deren Geschwindigkeiten alle gleich null sind:

$$0 = \omega_{05} = \omega_{15} = \omega_{25} \dots$$

und deren Drehbeschleunigungen den *bekannten* Drehgeschwindigkeiten der Bewegung I proportional sind:

$$\omega'_{05} = \alpha \omega_{01} = 0$$

$$\omega'_{15} = \alpha \omega_{11} = 0$$

$$\omega'_{25} = \alpha \omega_{21} = \alpha$$

$$\omega'_{35} = \alpha \omega_{31} \quad \text{usf.}$$

Die Beschleunigungen der vorgeschriebenen Bewegung III entstehen durch Zusammensetzung der beiden Bewegungen IV, V, wenn die unbekannte Drehgeschwindigkeit α so gewählt wird, daß die Dehnungsbeschleunigung des Stabes 3 die einem *starken* Stabe entsprechende Größe erhält. Die Drehgeschwindigkeit dieses Stabes hat die Größe

$$\omega_{33} = \zeta_1 \omega_{31} + \zeta_2 \omega_{32}.$$

Seine Dehnungsbeschleunigung δ'_{34} in der Bewegung IV kann aus dem Beschleunigungsplan dieser Bewegung entnommen werden, während seine Dehnungsbeschleunigung in der Bewegung V durch die Gleichung

$$\delta'_{35} = \alpha \delta_{31}$$

aus dem Geschwindigkeitsplan der Bewegung I ermittelt werden kann. Die Größe α wird demnach bestimmt durch die Gleichung:

$$\delta'_{33} = -\omega_{33}^2 = \delta'_{34} + \delta'_{35} = \delta'_{34} + \alpha \delta_{31}$$

oder

$$\alpha = -\frac{\omega_{33}^2 + \delta'_{34}}{\delta_{31}}. \quad (31)$$

Nachdem α bestimmt worden ist, ergeben sich die Drehbeschleunigungen der Bewegung III durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\omega'_{03} &= \omega'_{04} + \alpha \omega_{01} = 0 \\ \omega'_{13} &= \omega'_{14} + \alpha \omega_{11} \\ \omega'_{23} &= \omega'_{24} + \alpha \omega_{21} \\ \omega'_{33} &= \omega'_{34} + \alpha \omega_{31} \quad \text{usf.}\end{aligned}$$

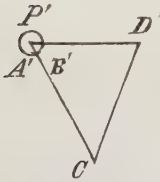
II. Beispiele und Aufgaben. Die vorstehenden Regeln sollen an einer Reihe von Beispielen erläutert werden. Wenn nichts anderes bemerkt wird, ist der Maßstab

des Lageplans L : 1 cm = 100 cm

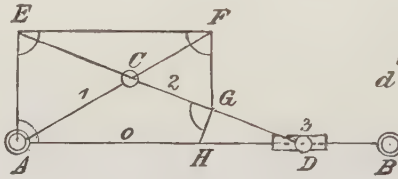
des Geschwindigkeitsplans G : 1 cm = 100 cm sek⁻¹

des Beschleunigungsplans B : 1 cm = 100 cm sek⁻².

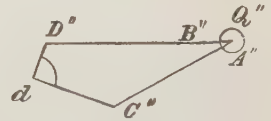
In den Lageplänen sind die Gelenke durch kleine Kreise, die ruhenden Gelenke durch Doppelkreise bezeichnet. In den Geschwindigkeitsplänen und den Beschleunigungsplänen sind die Pole P' und Q'' durch Kreise, rechte Winkel durch Viertelkreise,



G. Abb. 36.



L. Abb. 35.



B. Abb. 37.

die gegebenen und durch Rechnung bestimmten Strecken durch kräftigere Linien bezeichnet.

Beispiel 1. Das Getriebe, Abb. 35, besteht aus vier mit 0, 1, 2, 3 bezeichneten Gliedern, den Stäben AB , AC , CD und dem Schieber D . Das Glied 0 ist festgestellt:

$$\omega_0 = 0, \quad \omega'_0 = 0;$$

das Glied 1 wird geführt mit der gegebenen Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = + 1,00 \text{ sek}^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega'_1 = 0.$$

Der *Geschwindigkeitsplan*, Abb. 36. Die Punkte A' , B' fallen mit dem Pol P' zusammen, weil die Punkte A , B (Abb. 35) ruhen. Die Geschwindigkeit $A' C'$ des Punktes C wird bestimmt durch das

Vorzeichen und die *Größe* der gegebenen Drehgeschwindigkeit ω_1 des Gliedes 1. Da ω_1 positiv ist, so ist der Winkel

$$(AC, A'C') = 90^\circ$$

aufzutragen, und die Strecke $A'C'$ wird durch die Gleichung

$$A'C' = AC \omega_1 = AC$$

gegeben. Von der Geschwindigkeit $P'D'$ des Schiebers ist die Richtung

$$P'D' \parallel AB$$

gegeben; ihre Größe wird bestimmt, indem man

$$C'D' \perp CD$$

aufträgt.

Der *Beschleunigungsplan*, Abb. 37. Die den ruhenden Punkten A, B entsprechenden Punkte A'', B'' fallen mit dem Pol Q'' des Beschleunigungsplanes zusammen. Gegeben sind ferner die Strecken $A''C''$ und $C''d$ durch die Bedingungen:

$$(AC, A''C'') = 180^\circ$$

$$A''C'' = AC \omega_1^2 = AC$$

$$(CD, C''d) = 180^\circ$$

$$C''d = CD \omega_2^2 = CD \left(\frac{C'D'}{CD} \right)^2 = \frac{\overline{C'D'}^2}{CD}.$$

Von der Beschleunigung $Q''D''$ des Schiebers D ist die Richtung bekannt:

$$Q''D'' \parallel AB.$$

Ihre Größe ergibt sich aus der Bedingung, daß die Strecke $C''d$ die Projektion von $C''D''$ auf CD bildet. Daher ist

$$dD'' \perp C''d$$

aufzutragen.

In dem vorliegenden einfachen, aber häufig vorkommenden Falle ist es nicht nötig, Geschwindigkeitsplan und Beschleunigungsplan in besonderen Zeichnungen zu bilden, da zweckmäßig beide Pläne mit dem Lageplan sich verbinden lassen. Zieht man nämlich in Abb. 35:

$$AE \perp AB, EF \perp AE, FG \perp EF \text{ und } GH \perp CD,$$

so ist das Dreieck ACE kongruent dem Geschwindigkeitsplan $A'C'D'$ und gegen denselben um 90° gedreht. Ferner ist das Viereck $ACGH$ kongruent dem Beschleunigungsplan $A''C''dD''$ und gegen denselben um 180° gedreht. Es ist also

$$AE = P'D' \text{ und } HA = Q''D'',$$

wodurch die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Schiebers D bestimmt sind. Man beachte hierbei, daß wegen Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$CEF \sim CDA \text{ und } CFG \sim CAE$$

die folgenden Beziehungen bestehen:

$$\frac{CF}{CE} = \frac{CA}{CD} \text{ und } \frac{CG}{CF} = \frac{CE}{CA}.$$

Da nun

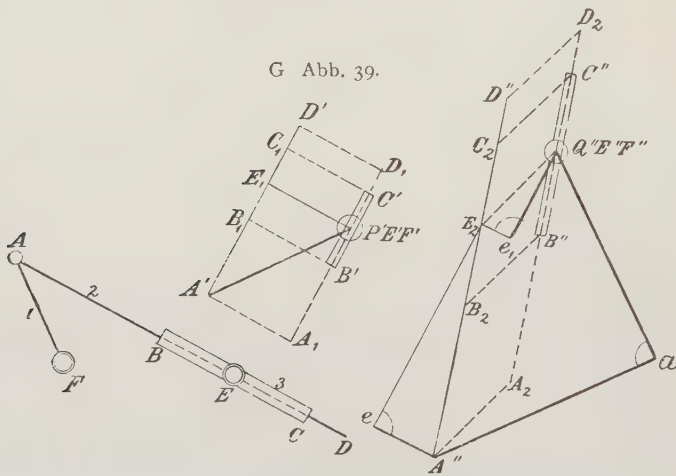
$$CE = C'D'$$

ist, so folgt:

$$CG = \frac{\bar{C}' \bar{D}'^2}{CD} = C'' d$$

und

$$ACGH \simeq A'' C'' d D''.$$



L. Abb. 38.

B. Abb. 40.

Beispiel 2, Abb. 38 bis 40. Das Getriebe besteht aus dem ruhenden Gliede EF , dem mit der Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = -1,40 \text{ sek}^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega'_1 = -2,14 \text{ sek}^{-2}$$

geführten Gliede FA , dem Stabe AD und dem um das Gelenk E sich drehenden Schieber BC .

Der Geschwindigkeitsplan, Abb. 39. Da die Gelenke E, F

ruhen, so fallen die Punkte E', F' mit dem Pol P' zusammen. Der Punkt A' wird bestimmt durch die Bedingung:

$$\frac{F' A'}{F A} \sin (F A, F' A') = \omega_1 = -1,40 \text{ sek}^{-1};$$

also ist

$$(F A, F' A') = 270^\circ, \quad F' A' = F A \omega_1 = 150 \cdot 1,40 = 210 \text{ cm sek}^{-1}.$$

Im übrigen ist die Bildung des Geschwindigkeitsplans vollständig im Abschnitt 5 beschrieben. Man bestimmt hiernach die Geschwindigkeit $P' E_1$ des vom ruhenden Gelenke E gedeckten Punktes des Stabes AD , indem man

$$A' E_1 \perp A E, \quad E' E_1 \parallel A D$$

zieht. Dann entsteht der Geschwindigkeitsplan $P' A' B' C' D' E'$, indem man die Punktgruppen

$$A' B_1 C_1 D' E_1 \approx A B C D E$$

und

$$A_1 B' C' D_1 E' \cong A' B_1 C_1 D' E_1$$

bildet. Die relative Geschwindigkeit der Punkte des Stabes AD gegen den Schieber BC wird durch die Strecken

$$A_1 A' = D_1 D' = 120 \text{ cm sek}^{-1}$$

dargestellt.

Der Beschleunigungsplan, Abb. 40. Die Punkte E'', F'' fallen mit dem Pol Q'' zusammen. Ferner wird der Punkt A'' bestimmt durch die gegebenen Größen ω_1 und ω'_1 :

$$(F A, F'' a) = 180^\circ$$

$$F'' a = F A \omega_1^2 = 150 \cdot 1,4^2 = 294 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$(F A, a A'') = 270^\circ$$

$$a A'' = F A \omega'_1 = 150 \cdot 2,14 = 321 \text{ cm sek}^{-2}.$$

Der Punkt E_2 wird nach Abschnitt 9 bestimmt:

$$(A E, A'' e) = 180^\circ$$

$$A'' e = \frac{(A' E_1)^2}{A E} = \frac{170^2}{330} = 88 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$(E' E_1, E'' e_1) = (A D, A' D') = 270^\circ$$

$$E'' e_1 = 2 E' E_1 \frac{A' E_1}{A E} = 2 \cdot 120 \cdot \frac{170}{330} = 124 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$e E_2 \perp A'' e, \quad e_1 E_2 \perp E'' e_1.$$

Nachdem die Strecke $A''A_2$ nach Größe, Richtung und Sinn gleich E_2E'' aufgetragen ist, können die Punktgruppen

$$A''D''B_2C_2E_2 \approx A_2D_2B''C''E'' \approx ADBCE$$

und hierdurch der Beschleunigungsplan $Q''A''D''B''C''E''$ gebildet werden.

Beispiel 3, Abb. 41 bis 43. In dem sechsgliedrigen Getriebe $ABCDEF G$, Abb. 41, ist das Glied AB festgestellt, während das Glied BCD mit der Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = -1,17 \text{ sek}^{-1}$$

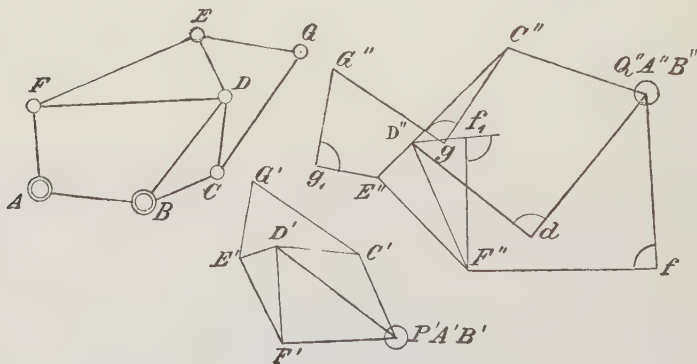
und der Drehbeschleunigung

$$\omega'_1 = -1,18 \text{ sek}^{-2}$$

geführt werden soll. Da die Stabvierecke $ABDF$ und $CDEG$ in dieser Reihenfolge nur je zwei Glieder mit unbekannten Dreh-

L. Abb. 41.

B. Abb. 43.



G. Abb. 42.

geschwindigkeiten enthalten, so kommen die Regeln der Abschnitte 4 und 8 zur Anwendung, wie folgt:

Der Geschwindigkeitsplan, Abb. 42.

$$(BD, B'D') = 270^\circ$$

$$B'D' = BD \omega_1 = 173 \cdot 1,17 = 202 \text{ cm sek}^{-1}$$

$$A'F' \perp AF, D'F' \perp DF$$

$$B'C'D' \approx BCD, D'E'F' \approx DEF$$

$$C'G' \perp CG, E'G' \perp EG.$$

Der Beschleunigungsplan, Abb. 43.

$$(BD, B''d) = 180^\circ$$

$$B''d = BD \omega_1^2 = 173 \cdot 1,17^2 = 236 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$(BD, dD'') = 270^\circ$$

$$dD'' = BD \omega' = 173 \cdot 1,18 = 204 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$(AF, A''f) = 180^\circ$$

$$A''f = \frac{(A'F')^2}{AF} = \frac{156^2}{108} = 225 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$(DF, D''f_1) = 180^\circ$$

$$D''f_1 = \frac{(D'F')^2}{DF} = \frac{132^2}{250} = 70 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$fF'' \perp A''f, \quad f_1F'' \perp D''f_1$$

$$B''C''D'' \approx BCD, \quad D''F''E'' \approx DFE$$

$$(CG, C''g) = 180^\circ$$

$$C''g = \frac{(C'G')^2}{CG} = \frac{172^2}{190} = 155 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$(EG, E''g_1) = 180^\circ$$

$$E''g_1 = \frac{(E'G')^2}{EG} = \frac{106^2}{140} = 80 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$gG'' \perp C''g, \quad g_1G'' \perp E''g_1.$$

Beispiel 4. In dem achthliedrigen Getriebe, Abb. 44, ist das Glied AB festgestellt, während das Glied BCD mit der Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = -0,95 \text{ sek}^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega'_1 = -0,63 \text{ sek}^{-2}$$

geführt werden soll. Das Getriebe enthält nur ein Stabviereck $ABDF$, alle übrigen Stabpolygone enthalten, abgesehen von den starren Stabdreiecken, mehr als vier Seiten. Die Pläne für den Teil $ABCDEFGF$ des Getriebes werden wie im Beispiel 3 gebildet; die Beschreibung braucht hier nicht wiederholt zu werden.

Im *Geschwindigkeitsplan*, Abb. 45, sind darauf die drei Geraden

$$C'M_1K' \perp CMK$$

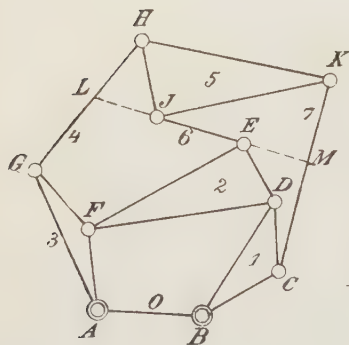
$$G'L_1H' \perp GLH$$

$$L_1I'E'M_1 \perp LIEM$$

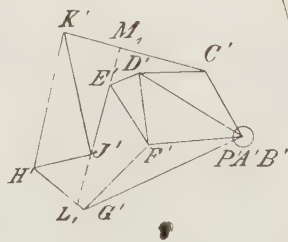
zu ziehen und auf diesen nach Abschnitt 2 die dem starren Dreieck KHI entsprechenden Punkte K' , H' , I' zu bestimmen. Statt dessen kann man auch die Punktgruppe

$$L_1 I' M_1 K' H' \approx LIMKH$$

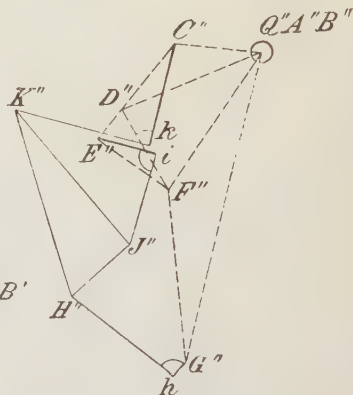
bilden, da den Dreiecken LHI , HIK , IKM die ähnlichen Dreiecke $L_1 H' I'$, $H' I' K'$, $I' K' M_1$ entsprechen. Der Geschwindigkeitsplan



L. Abb. 44.



G. Abb. 45.



B. Abb. 46.

wird *unbestimmt*, wenn die drei Geraden $C'K'$, $G'H'$, $E'I'$ in *einem* Punkte sich schneiden.

Im *Beschleunigungsplan*, Abb. 46, sind die Winkel:

$$(CK, C''k) = (GH, G''h) = (EI, E''i) = 180^\circ,$$

darauf die Strecken:

$$C''k = \frac{(C'K')^2}{CK} = \frac{195^2}{265} = 143 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$G''h = \frac{(G'H')^2}{GH} = \frac{85^2}{228} = 32 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$E''i = \frac{(E'I')^2}{EI} = \frac{100^2}{120} = 83 \text{ cm sek}^{-2}$$

und die Geraden:

$$kK'' \perp C''k, \quad hH'' \perp G''h, \quad iI'' \perp E''i$$

aufzutragen. Die Lage des Dreiecks $K''H''I''$ konnte darauf durch das im Abschnitt 7 und in den Abb. 23 bis 25 beschriebene Verfahren bestimmt werden.

Beispiel 5. In dem Getriebe des vorigen Beispiels, Abb. 44, soll das Glied 4 (GH) festgestellt und das Glied 1 (BCD) mit der Drehgeschwindigkeit $+0,67 \text{ sek}^{-1}$ geführt werden. Es sind die Geschwindigkeiten dieser Bewegung III zu bestimmen. Man bildet die Bewegung III nach Abschnitt 10, 3 durch Zusammensetzung der ζ_1 -fachen Geschwindigkeiten der im vorigen Beispiel bestimmten Bewegung I mit den ζ_2 -fachen Geschwindigkeiten der Bewegung II, in der das Getriebe, ohne seine Form zu ändern, mit der Drehgeschwindigkeit $+1 \text{ sek}^{-1}$ um irgend einen festen Punkt sich dreht. In der Bewegung I haben die Glieder 1 und 4 die Drehgeschwindigkeiten

$$\omega_{11} = -0,95 \text{ sek}^{-1}$$

und

$$\omega_{41} = \frac{G' H'}{G H} \sin (G H, G' H') = -\frac{85}{228} = -0,37 \text{ sek}^{-1}.$$

Damit

$$\zeta_1 \omega_{11} + \zeta_2 = +0,67$$

$$\zeta_1 \omega_{41} + \zeta_2 = 0$$

werde, ist

$$\zeta_1 = \frac{+0,67}{-0,95 + 0,37} = -1,15$$

und

$$\zeta_2 = -\zeta_1 \omega_{41} = -1,15 \cdot 0,37 = -0,42$$

zu wählen. Die folgende Tabelle enthält die aus Abb. 45 entnommenen Drehgeschwindigkeiten ω_1 der Bewegung I und die nach der Formel

$$\omega_3 = -1,15 \omega_1 - 0,42$$

berechneten Drehgeschwindigkeiten der Bewegung III:

Glied	0	1	2	3	4	5	6	7
ω_1	0	-0,95	-0,38	-1,17	-0,37	-0,69	-0,83	-0,74
ω_3	-0,42	+0,67	+0,02	+1,35	0	+0,37	+0,53	+0,43

Will man den Geschwindigkeitsplan der Bewegung III auftragen, so genügt die Berechnung von *zwei* Drehgeschwindigkeiten, z. B.:

$$\omega_{33} = +1,35, \quad \omega_{53} = +0,37.$$

Der Pol des Geschwindigkeitsplans P' fällt selbstverständlich mit den Punkten G', H' zusammen.

Beispiel 6. Das Getriebe, Abb. 44, hat bei der durch die Abb. 45 und 46 dargestellten Bewegung I folgende Drehgeschwindigkeiten ω_1 und Drehbeschleunigungen ω'_1 :

Glied	0	1	2	3	4	5	6	7
ω_1	0	— 0,95	— 0,38	— 1,17	— 0,37	— 0,69	— 0,83	— 0,74
ω'_1	0	— 0,63	— 0,45	— 1,33	— 0,75	— 0,88	— 0,98	— 0,70
ω'_4	0	+ 1,27	+ 0,31	+ 1,01	— 0,01	+ 0,50	+ 0,68	+ 0,78

Es soll die Bewegung IV des Getriebes gebildet werden, deren Geschwindigkeiten mit der Bewegung I übereinstimmen, während die Drehbeschleunigung des Gliedes 5 die Größe

$$\omega'_{54} = + 0,50 \text{ sek}^{-2}$$

erhalten soll.

Nach Abschnitt 10, 4 entsteht die zu bestimmende Bewegung IV, indem man die Bewegung I zusammensetzt mit einer Bewegung V, in der alle Geschwindigkeiten die Größe null haben:

$$0 = \omega_{05} = \omega_{15} = \omega_{25} = \dots$$

und deren Beschleunigungen durch die Gleichungen:

$$\omega'_{05} = \alpha \omega_{01}, \quad \omega'_{15} = \alpha \omega_{11}, \quad \omega'_{25} = \alpha \omega_{21} \text{ usf.}$$

bestimmt werden, wenn man die Größe α so wählt, daß die aus der Zusammensetzung der beiden Bewegungen I und V entstehende Drehbeschleunigung des Gliedes 5 die vorgeschriebene Größe erhält:

$$\omega'_{54} = + 0,50 = \omega'_{51} + \alpha \omega_{51} = - 0,88 - 0,69 \alpha.$$

Im vorliegenden Falle ist also

$$\alpha = - \frac{0,50 + 0,88}{0,69} = - 2,00 \text{ sek}^{-1}.$$

Die in der letzten Reihe der vorstehenden Tabelle angegebenen Drehbeschleunigungen der Bewegung IV werden demnach durch die Gleichung

$$\omega'_4 = \omega'_1 - 2,00 \omega_1$$

bestimmt.

Beispiel 7. Das Getriebe, Abb. 47, enthält acht Glieder, nämlich das ruhende Glied, zu dem die Gelenke A, G und der Schieber I gehören, ferner die sechs aus Stäben gebildeten Glieder ABC, BE, CD, DEF, FG, HI und den Schieber H. Das Glied ABC wird mit der Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = + 1,75 \text{ sek}^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega'_1 = 0$$

geführt.

Der Geschwindigkeitsplan, Abb. 48. Durch die gegebene positive Drehgeschwindigkeit des Gliedes ABC ist vorgeschrieben:

$$(BC, B'C') = 90^\circ$$

$$B'C' = BC \omega_1 = 200 \cdot 1,75 = 350 \text{ cm sek}^{-2}$$

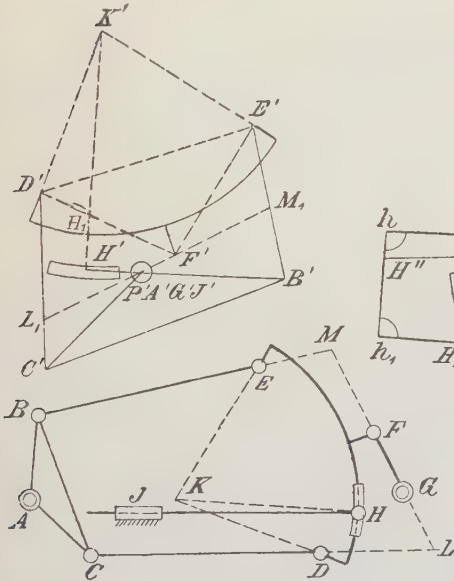
$$B'C'A' \approx BCA.$$

Der Pol P' und die Punkte G' , I' fallen mit A' zusammen. Durch die Bedingungen:

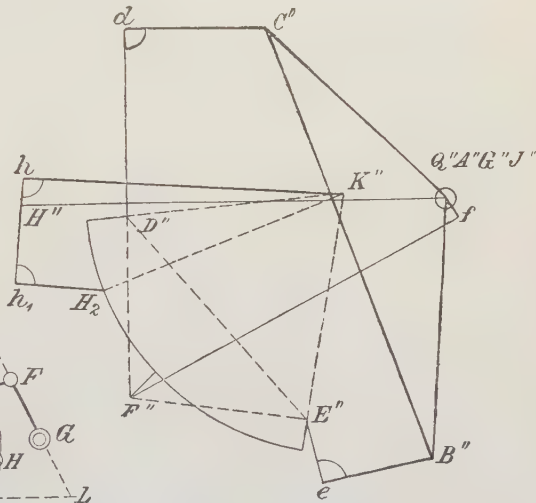
$$B'M_1E' \perp BEM, \quad C'L_1D' \perp CDL, \quad L_1G'F'M_1 \perp LGFM$$

sind ferner die drei Geraden $B'M_1E'$, $C'L_1D'$, $L_1G'F'M_1$ gegeben, auf welchen die dem starren Dreieck EDF entsprechenden Punkte

G. Abb. 48.



L. Abb. 47.



B. Abb. 49.

E' , D' , F' liegen müssen. Man bestimmt ihre Lage entweder nach dem im Abschnitt 2, Abb. 5 und 6, beschriebenen Verfahren oder einfacher durch die Bedingung, daß den Dreiecken $D'LF'$, $D'FE'$, $E'FM'$, DEK die ähnlichen Dreiecke $D'L_1F'$, $D'F'E'$, $E'F'M_1$, $D'E'K'$ entsprechen, und daß folglich:

$$L_1F'M_1E'K'D' \approx LFMEKD$$

ist. Das Gelenk H bewegt sich infolge der Führung durch den festen Schieber I auf den festen Geraden HI :

$$P'H' \parallel IH,$$

und da sein Abstand KH vom Mittelpunkt K des Führungsstabes unveränderlich ist, so ist

$$K'H' \perp KH.$$

Die Strecke H_1H' bezeichnet die relative Geschwindigkeit des Schiebers H gegen den Führungsstab.

Der *Beschleunigungsplan*, Abb. 49. Da die Drehbeschleunigung des geführten Gliedes ABC gleich null gegeben ist, so ist

$$(BC, B''C'') = 180^\circ$$

$$B''C'' = \frac{(B'C')^2}{BC} = \frac{350^2}{200} = 613 \text{ cm sek}^{-2}$$

und

$$B''C''A'' \approx BCA$$

aufzutragen. Mit A'' fallen die Punkte G'' , I'' und der Pol Q'' zusammen. Die Dehnungsbeschleunigungen der Stäbe BE , CD , GF bestimmen ferner die drei Geraden eE'' , dD'' , fF'' , auf denen die dem starren Dreieck EDF entsprechenden Punkte E'' , D'' , F'' liegen müssen:

$$(BE, B''e) = (CD, C''d) = (GF, G''f) = 180^\circ$$

$$B''e = \frac{(B'E')^2}{BE} = \frac{210^2}{300} = 147 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$C''d = \frac{(C'D')^2}{CD} = \frac{240^2}{300} = 192 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$G''f = \frac{(G'F')^2}{GF} = \frac{50^2}{83} = 30 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$eE'' \perp B''e, \quad dD'' \perp C''d, \quad fF'' \perp G''f.$$

Das im Abschnitt 7, Abb. 23 bis 25, beschriebene Verfahren ergab die Lage des Dreiecks $E''D''F''$, und durch die Bedingung:

$$D''E''F''H_2K'' \approx DEFHK$$

wurden darauf die den Punkten H_1 , K' entsprechenden Punkte H_2 , K'' bestimmt. Die Beschleunigung $Q''H''$ des Gelenkes H hat drei Bedingungen zu erfüllen: Sie ist infolge der Führung des Stabes IH durch den festen Schieber I parallel zu IH gerichtet:

$$Q''H'' \parallel IH;$$

wegen Starrheit der Strecke KH ist ferner:

$$(KH, K''h) = 180^\circ$$

$$K''h = \frac{(K'H')^2}{KH} = \frac{320^2}{240} = 427 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$hH'' \perp K''h.$$

Hierdurch ist der Punkt H'' bestimmt. Eine dritte Bedingung, die man als Probe benutzen kann, ergibt sich nach Abschnitt 9 aus der Drehgeschwindigkeit ω der Geschwindigkeitsstrecke H_1H' . Die Drehgeschwindigkeiten der beiden Glieder DEF und H sind:

$$\frac{K'H_1}{KH} \sin(KH, K'H_1) = + \frac{270}{240} \text{ sek}^{-1}$$

$$\frac{K'H'}{KH} \sin(KH, K'H') = + \frac{320}{240} \text{ sek}^{-1}.$$

Folglich ist

$$(H_1H', H_2h_1) = 90^\circ$$

$$H_2h_1 = H_1H' \omega = 50 \frac{270 + 320}{240} = 123 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$h_1H'' \perp H_2h_1$$

aufzutragen. Die Gerade h_1H'' muß durch den bereits bestimmten Punkt H'' gehen.

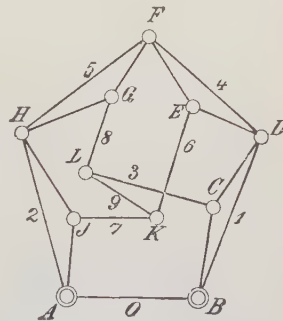
Beispiel 8. In dem zehngliedrigen Getriebe, Abb. 50, ruht das Glied 0 (AB), während das Glied 1 (BCD) mit der Drehgeschwindigkeit $+0,50 \text{ sek}^{-1}$ und der Drehbeschleunigung $+0,20 \text{ sek}^{-2}$ geführt wird. Da das Getriebe kein einziges Stabviereck enthält, so ist das im Abschnitt 10,5 beschriebene Verfahren anzuwenden.

Die Geschwindigkeiten. Wir erteilen dem Stabe 3 (CL) die Eigenschaft der Dehnbarkeit und bestimmen die Geschwindigkeiten zweier Bewegungen I, II, die gegeben sind durch folgende Annahmen:

$$\text{Bewegung I: } \omega_{01} = 0, \quad \omega_{11} = 0, \quad \omega_{21} = +1 \text{ sek}^{-1}$$

$$\text{Bewegung II: } \omega_{02} = 0, \quad \omega_{12} = +0,50 \text{ sek}^{-1}, \quad \omega_{22} = 0.$$

Die Bildung der hier nicht mitgeteilten Geschwindigkeitspläne, deren Ergebnisse in den ersten beiden Reihen der folgenden Tabelle zu-



L. Abb. 50.

sammengestellt sind; bietet keine Schwierigkeit, da in den Stabpolygonen $ABDFH$, $ABDEKI$, $EFG LK$ in dieser Reihenfolge nur je *zwei* Glieder mit unbekannten Drehgeschwindigkeiten vorkommen.

	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	δ_3
Bewegung I	0	0	+1,00	+0,98	+1,08	-0,57	-0,43	-0,75	+0,37	+0,68	-0,61
Bewegung II	0	+0,50	0	-0,32	-0,33	+0,52	+0,66	+0,36	+0,34	-0,11	+0,53
Bewegung III	0	+0,50	+0,54	+0,21	+0,25	+0,21	+0,43	-0,04	+0,54	+0,26	0

Die von der Aufgabe geforderte Bewegung III ergibt sich durch Zusammensetzung der Geschwindigkeiten der Bewegung II mit den ζ -fachen Geschwindigkeiten der Bewegung I, wenn man die Zahl ζ so wählt, daß die Dehnungsgeschwindigkeit δ_3 des Stabes 3 in der zusammengesetzten Bewegung III gleich null wird:

$$0 = \zeta \delta_{31} + \delta_{32} = -0,61 \zeta + 0,53$$

$$\zeta = +\frac{53}{61} = +0,54.$$

Die in der letzten Tabellenreihe angegebenen Drehgeschwindigkeiten der Bewegung III konnten demnach durch die Gleichung

$$\omega_3 = \omega_2 + \zeta \omega_1 = \omega_2 + 0,54 \omega_1$$

bestimmt werden.

Die Beschleunigungen. Wir erteilen wieder dem Stabe 3 (CL) die Eigenschaft der Dehnbarkeit und bestimmen die Beschleunigungen einer Bewegung IV, deren Geschwindigkeiten mit der Bewegung III übereinstimmen:

$$\omega_{04} = \omega_{03}, \quad \omega_{14} = \omega_{13}, \quad \omega_{24} = \omega_{23} \text{ usf.},$$

während die Drehbeschleunigungen durch die Annahme

$$\omega'_{04} = 0, \quad \omega'_{14} = +0,20 \text{ sek}^{-2}, \quad \omega'_{24} = 0$$

bestimmt sind. Der betreffende Plan bietet nichts Bemerkenswertes und ist daher hier nicht mitgeteilt. Das Ergebnis desselben, nämlich die Drehbeschleunigungen aller Glieder und die Dehnungsbeschleunigung δ'_{34} des dehnbaren Gliedes 3, ist in der ersten Reihe der nachstehenden Tabelle zusammengestellt. Diese Bewegung IV ist zusammenzusetzen mit einer Anfangsbewegung V, deren Geschwindigkeiten also sämtlich null, und deren Drehbeschleunigungen den Drehgeschwindigkeiten der Bewegung I proportional sind:

$$\omega'_{05} = \omega'_{15} = 0, \quad \omega'_{25} = \alpha \omega_{21}, \quad \alpha'_{35} = \alpha \omega_{31} \text{ usf.}$$

In dieser Bewegung hat die Dehnungsbeschleunigung δ'_{35} des Stabes 3 die Größe:

$$\delta'_{35} = \alpha \delta_{31}.$$

Die Größe α ist so zu wählen, daß die Dehnungsbeschleunigung δ'_{33} der aus IV und V zusammengesetzten Bewegung III dem *starren* Stabe 3 entspricht:

$$\delta'_{33} = -\omega_{33}^2 = \delta'_{34} + \alpha \delta_{31}.$$

Mit Benutzung der Tabellenwerte erhält man

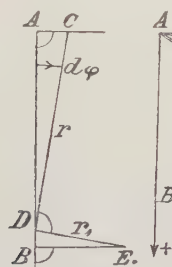
$$\alpha = -\frac{\omega_{33}^2 + \delta'_{34}}{\delta_{31}} = +\frac{0,21^2 + 0,08}{0,61} = +0,20.$$

Die in der letzten Tabellenreihe zusammengestellten Drehbeschleunigungen der von der Aufgabe geforderten Bewegung III ergeben sich demnach aus der Gleichung:

$$\omega'_3 = \omega'_4 + \alpha \omega_1 = \omega'_4 + 0,20 \omega_1.$$

	ω'_0	ω'_1	ω'_2	ω'_3	ω'_4	ω'_5	ω'_6	ω'_7	ω'_8	ω'_9	δ'_3
Bewegung IV	0	+0,20	0	-0,05	-0,06	+0,11	+0,26	+0,08	+0,24	+0,03	+0,08
Bewegung V	0	0	+1,00 α	+0,98 α	+1,08 α	-0,57 α	-0,43 α	-0,75 α	+0,37 α	+0,68 α	-0,61 α
Bewegung III	0	+0,20	+0,20	+0,15	+0,16	0,00	+0,17	-0,07	+0,31	+0,17	-0,044

12. Die Krümmung der Bahn eines Punktes und ihrer Evolute. Der bewegte Punkt befindet sich zur Zeit t in A , Abb. 51,



L. Abb. 51.

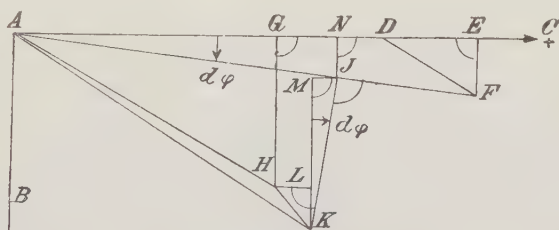


Abb. 52.

und zur Zeit $t + dt$ in C . Die Bahn AC hat den Krümmungshalbmesser

$$AB = r,$$

ihre Evolute BD hat den Krümmungshalbmesser

$$BE = r_1.$$

Der Strecke r wird der Sinn AB , der Strecke r_1 der Sinn BE beigelegt. Der Punkt A hat zur Zeit t die Geschwindigkeit v , die Beschleunigung erster Ordnung v' und die Beschleunigung zweiter Ordnung v'' . Die Beschleunigungen v' , v'' haben in den Richtungen der Bahnnormalen und der Bahntangente die Komponenten n' , u' und n'' , u'' . Auf der Bahnnormalen geben wir dem Sinn AB , auf der Tangente dem durch die Bedingung

$$(AC, AB) = 90^\circ$$

bestimmten Sinn AC das positive Vorzeichen. Um allgemein gültige algebraische Beziehungen zu erhalten, betrachten wir einen Fall, in dem alle Größen das positive Vorzeichen tragen. Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind in einer besonderen Abb. 52 dargestellt, ihre unendlich kleinen Änderungen natürlich in unendlich starker Verzerrung. In dem unendlich kleinen Zeitabschnitt von t bis $t + dt$ ändert sich

$$v (AD) \text{ in } v + dv (AF)$$

$$v' (AH) \text{ in } v' + dv' (AK)$$

$$u' (AG) \text{ in } u' + du' (AJ)$$

$$n' (GH) \text{ in } n' + dn' (JK).$$

Die Geschwindigkeitsstrecke AF ($v + dv$) bildet die geometrische Summe der zwei Geschwindigkeiten AD (v) und DF ($v' dt$) oder der drei Geschwindigkeiten AD (v), DE ($u' dt$) und EF ($n' dt$). Da

$$AE = AD + DE$$

$$(v + dv) \cos d\varphi = v + u' dt$$

ist, so folgt

$$u' = \frac{dv}{dt}. \quad (32)$$

Die Richtung der Geschwindigkeit v dreht sich in der Zeit dt in positivem Sinne um den Winkel

$$d\varphi = \frac{n' dt}{v} = \frac{v dt}{r}. \quad (33)$$

Daher hat der Krümmungshalbmesser der Bahn die Größe:

$$r = \frac{v^2}{n'}, \quad (34)$$

und die Strecke AB hat stets den Sinn von n' .

Aus der Zeichnung ist zu ersehen:

$$AN = AG + HL + MJ$$

oder:

$$(u' + du') \cos d\varphi = u' + u'' dt + (n' + dn') \sin d\varphi$$

oder:

$$u'' = \frac{du'}{dt} - n' \frac{d\varphi}{dt} = \frac{du'}{dt} - \frac{n'^2}{v}; \quad (35)$$

ferner:

$$GH + LK = NJ + MK$$

oder:

$$n' + n'' dt = (u' + du') \sin d\varphi + (n' + dn') \cos d\varphi$$

oder:

$$n'' = \frac{dn'}{dt} + \frac{n'u'}{v}. \quad (36)$$

Auch der Krümmungshalbmesser r_1 der Evolute durchläuft in der Zeit dt in positivem Sinne den Winkel $d\varphi$, wobei jedoch zu beachten ist, daß die Aenderung dr von r negativ ist, wenn r_1 , d. h. die Strecke BE , den positiven Sinn AC hat:

$$d\varphi = - \frac{dr}{r_1} = \frac{v dt}{r},$$

woraus folgt

$$\frac{r_1}{r} = - \frac{1}{v} \frac{dr}{dt}.$$

Aus Gleichung 34) ergibt sich durch Differenzieren:

$$\frac{dr}{dt} = 2 \frac{v}{n'} \frac{dv}{dt} - \frac{v^2}{n'^2} \frac{dn'}{dt}$$

und nach Gleichung 32) und 36):

$$\frac{dr}{dt} = 3 \frac{vu'}{n'} - \frac{v^2 n''}{n'^2}.$$

Daher ist:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{vn''}{n'^2} - \frac{3u'}{n'}. \quad (37)$$

Der Krümmungshalbmesser BE hat den positiven Sinn AC , wenn algebraisch

$$vn'' > 3u'n'$$

ist. Der Punkt A kann seine Bahn mit verschiedenen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen durchlaufen. Bei einer zwangsläufigen Bewegung, d. h. bei gegebener Bahn haben aber in jedem Bahnpunkte die Größen

$$\frac{v^2}{n'} \quad \text{und} \quad \left(\frac{vn''}{n'^2} - \frac{3u'}{n'} \right)$$

unveränderliche Werte.

13. Die Beschleunigungen zweiter Ordnung der ebenen Bewegung einer starren Punktgruppe. Wir wählen für die relative Bewegung des Punktes A gegen den starr mit ihm verbundenen Punkt B die Bezeichnungen des vorigen Abschnittes, und da bei dieser Bewegung A den Kreis vom Halbmesser

$$r = AB = a$$

um den ruhenden Punkt B beschreibt, so ist:

$$n' = \frac{v^2}{a} = a\omega^2, \quad (38)$$

wenn wie früher mit

$$\omega = \frac{v}{a}$$

die Drehgeschwindigkeit der Strecke BA im Sinne der Uhrzeigerbewegung bezeichnet wird. Ferner ist nach den Gleichungen 32), 35), 36):

$$u' = \frac{dv}{dt} = a \frac{d\omega}{dt} = a\omega', \quad (39)$$

$$u'' = \frac{du'}{dt} - \frac{n'^2}{v} = a \left(\frac{d^2\omega}{dt^2} - \omega^3 \right) = a \left(\frac{d\omega'}{dt} - \omega^3 \right) \quad (40)$$

und

$$n'' = \frac{dn'}{dt} + \frac{n'u'}{v} = 2a\omega \frac{d\omega}{dt} + a\omega\omega' = 3a\omega\omega'. \quad (41)$$

Die Tangentialbeschleunigung zweiter Ordnung u'' hat den positiven Sinn AC , wenn algebraisch

$$\frac{d\omega'}{dt} > \omega^3$$

ist, und die Normalbeschleunigung n'' hat den positiven Sinn AB , wenn ω und ω' gleiche Vorzeichen haben. Gleichung 41) folgt auch aus Gleichung 37), wenn r_1 gleich null gesetzt wird. In Uebereinstimmung mit den Abschnitten 1 und 6 nennen wir das Verhältnis

$$\omega'' = \frac{u''}{a} = \frac{d\omega'}{dt} - \omega^3 = \frac{d^2\omega}{dt^2} - \omega^3 \quad (42)$$

die *Drehbeschleunigung zweiter Ordnung* und das Verhältnis

$$\delta'' = -\frac{n''}{a} = -3\omega\omega' \quad (43)$$

die *Dehnungsbeschleunigung zweiter Ordnung* der starren Strecke a . Es ist hierbei zu beachten, daß die relative Dehnungsbeschleunigung $a\delta''$ des Punktes A gegen B den positiven Sinn BA hat, wenn n'' negativ ist.

Da die gleichzeitigen Werte der Drehgeschwindigkeit ω für alle Strecken $AB, BC, CA \dots$ der starren Punktgruppe $ABC \dots$ gleich groß sind, so haben auch die Größen $\frac{d\omega}{dt}, \frac{d^2\omega}{dt^2}, \omega'', \delta''$ für alle Strecken gleichzeitig dieselben Werte. Werden von einem Punkte B''' aus die Strecken $B'''A''', B'''C''', B'''D''' \dots$ aufgetragen, welche die nach Gleichung 40) und 41) bestimmten relativen Beschleunigungen zweiter Ordnung der Punkte $A, C, D \dots$ gegen den Punkt B darstellen, so entsteht, wie in den Abschnitten 2 und 7, eine Punktgruppe $A'''B'''C'''D''' \dots$, die der starren Gruppe $ABCD \dots$ des Lageplanes geometrisch ähnlich ist:

$$A'''B'''C'''D''' \dots \approx ABCD \dots \quad (44)$$

Der gemeinschaftliche Beschleunigungswinkel zweiter Ordnung:

$$\gamma'' = (AB, A'''B''') = (BC, B'''C''') = \dots$$

wird bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{\delta''}{\cos \gamma''} = \frac{\omega''}{\sin \gamma''} = \frac{A'''B'''}{AB} = \frac{B'''C'''}{BC} = \dots \quad (45)$$

Dieser Winkel kann alle Größen annehmen, da die Werte von δ'' und ω'' positiv und negativ sein können. Demgegenüber erinnern wir daran, daß der *Geschwindigkeitswinkel* γ einer starren Strecke gleich 90° oder gleich 270° ist, und daß der Winkel γ' der Beschleunigungen *erster* Ordnung an die Bedingung

$$90^\circ < \gamma' < 270^\circ$$

gebunden ist.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, daß der Plan der Beschleunigungen zweiter Ordnung $R'''A'''B'''C''' \dots$ für eine starre Punktgruppe $ABC \dots$ gebildet werden kann, wenn außer den

Größen $\omega, \frac{d\omega}{dt}, \frac{d^2\omega}{dt^2}$ noch die Beschleunigung zweiter Ordnung $R'''B'''$

irgend eines Punktes B der Gruppe bekannt ist. Denn die Beschleunigung zweiter Ordnung $R'''C'''$ irgend eines anderen Punktes C bildet die geometrische Summe aus $R'''B'''$ und der relativen Beschleunigung $B'''C'''$ des Punktes C gegen B . R''' ist also der Pol des Beschleunigungsplanes. Der im Lageplan durch die Bedingung

$$RABC \dots \approx R'''A'''B'''C''' \dots$$

bestimmte Pol R ist der einzige Punkt der bewegten Ebene ABC , dessen Beschleunigung zweiter Ordnung zur Zeit t gleich null ist.

Für jeden Punkt A ergibt sich die durch die Strecke AA_2 dargestellte Beschleunigung zweiter Ordnung aus den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} AA_2 \sin(RA, AA_2) &= \omega'' RA \\ AA_2 \cos(RA, AA_2) &= \delta'' RA. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

14. Der Plan der Beschleunigungen zweiter Ordnung eines ebenen Getriebes. Es erscheint zweckmäßig, an dieser Stelle die nahe Verwandtschaft hervorzuheben, die in betreff ihrer Entstehung zwischen dem Geschwindigkeitsplan und den Beschleunigungsplänen eines Getriebes zu bemerken ist.

Der *Geschwindigkeitsplan* kann gebildet werden, wenn außer dem festgestellten Gliede die Drehgeschwindigkeit *eines* Gliedes bekannt ist. Dem Bildungsgesetz liegt die Bedingung zugrunde, daß die Dehnungsgeschwindigkeit eines starren Stabes gleich null ist.

Der Plan der Beschleunigungen *erster* Ordnung kann gebildet werden, wenn außer dem Geschwindigkeitsplan noch die Drehbeschleunigung erster Ordnung für *ein* Glied gegeben ist. Dem Bildungsgesetz liegt eine ähnliche Bedingung zugrunde: Die Dehnungsbeschleunigung eines jeden Stabes im Getriebe ist gleich dem negativen Quadrat seiner Drehgeschwindigkeit; sie ist also bestimmt durch den Geschwindigkeitsplan.

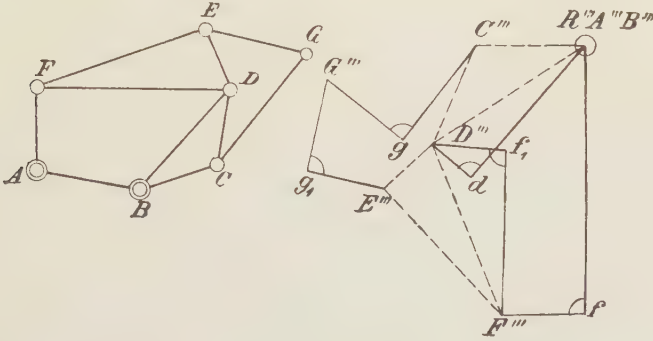
Um endlich die Beschleunigungen *zweiter* Ordnung bilden zu können, muß außer den Geschwindigkeiten und den Beschleunigungen *erster* Ordnung noch die Drehbeschleunigung zweiter Ordnung für *ein* Glied gegeben sein; dann ist für jeden Stab des Getriebes die Dehnungsbeschleunigung zweiter Ordnung bekannt: sie ist gleich dem negativen dreifachen Produkt aus der Drehgeschwindigkeit des Stabes und seiner Drehbeschleunigung erster Ordnung.

Es wird demnach genügen, die Bildung eines solchen Planes an einem Beispiel zu erklären.

Beispiel 9. Für das geführte Glied BCD des in den Abb. 41 und 53 dargestellten Getriebes möge gegeben sein:

$$\begin{aligned} \omega &= -1,17 \text{ sek}^{-1} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \omega' = -1,18 \text{ sek}^{-2} \\ \frac{d^2\omega}{dt^2} &= -2,64 \text{ sek}^{-3}. \end{aligned}$$

In den Abb. 42 und 43 sind die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen erster Ordnung in den normalen Maßstäben dargestellt. Das nachstehende Verzeichnis enthält die aus jenen Abbildungen



L. Abb. 53.

B. Abb. 54.

entnommenen Werte der Stablängen a , der Geschwindigkeiten $a\omega$, der Beschleunigungen $a\omega'$ und die hieraus berechneten Werte von

$$a\delta'' = -3a\omega\omega'.$$

Stab	a cm	$a\omega$ cm sek ⁻¹	$a\omega'$ cm sek ⁻²	$a\delta''$ cm sek ⁻³
BD	173	— 202	— 204	— 715
AF	108	— 156	— 246	— 1066
FD	250	— 132	— 175	— 277
CG	190	— 172	— 180	— 489
EG	140	— 106	— 132	— 300

Der in $\frac{1}{3}$ der normalen Größe, also in dem Maßstabe

$$1 \text{ cm} = 300 \text{ cm sek}^{-3}$$

dargestellte Beschleunigungsplan zweiter Ordnung, Abb. 54, ergibt sich aus den folgenden Bedingungen:

$$B'''d = -715 \text{ cm sek}^{-3}.$$

folglich wegen des negativen Vorzeichens:

$$(BD, B'''d) = 180^\circ.$$

$$dD''' = a \left(\frac{d\omega'}{dt} - \omega^3 \right) = 173 (-2,64 + 1,17^3) = -180 \text{ cm sek}^{-3},$$

folglich wegen des negativen Vorzeichens:

$$(BD, dD''') = 270^\circ.$$

$$A'''f = -1066 \text{ cm sek}^{-3},$$

daher

$$(AF, A'''f) = 180^\circ.$$

$$D'''f_1 = -277 \text{ cm sek}^{-3},$$

daher

$$(DF, D'''f_1) = 180^\circ.$$

$$fF''' \perp A'''f, \quad f_1F''' \perp D'''f_1.$$

$$B'''C'''D''' \approx BCD, \quad D'''E'''F''' \approx DEF.$$

$$C'''g = -489 \text{ cm sek}^{-3},$$

daher

$$(CG, C'''g) = 180^\circ.$$

$$E'''g_1 = -300 \text{ cm sek}^{-3},$$

daher

$$(EG, E'''g_1) = 180^\circ.$$

$$gG''' \perp C'''g, \quad g_1G''' \perp E'''g_1.$$

15. Die Krümmung der Bahn und der Bahnevolute eines mit einem Getriebegliede starr verbundenen Punktes.

Nachdem für irgend eine Bewegung des Getriebes, d. h. bei willkürlicher Wahl der Drehgeschwindigkeit und der Drehbeschleunigungen des geführten Gliedes, die Pläne der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen erster und zweiter Ordnung gebildet worden sind, können die Krümmungshalbmesser der Bahn und ihrer Evolute für jeden mit einem Getriebegliede starr verbundenen Punkt nach den Gleichungen 34) und 37) ermittelt werden, indem man die algebraischen Werte der vier Größen v, n', w', n'' aus den Plänen entnimmt. Ein Beispiel möge zur Erläuterung dienen.

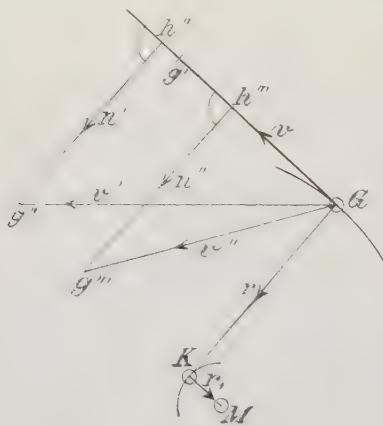


Abb. 55.

Beispiel 10. Das Gelenk G des Getriebes Abb. 41 und 53 hat die durch die Strecken $P'G'$ und Gg' dargestellte Geschwindigkeit

$$v = P'G' \perp Gg', \text{ Abb. 42 und 55,}$$

ferner die Beschleunigung erster Ordnung

$$v' = Q'' G'' \parallel G g'', \text{ Abb. 43 und 55,}$$

und die Beschleunigung zweiter Ordnung

$$v'' = R''' G''' \parallel G g''', \text{ Abb. 54 und 55.}$$

$$v \text{ ist in dem Maßstabe } 1 \text{ cm} = 100 \text{ cm sek}^{-1}$$

$$v' \text{ „ „ „ „ } 1 \text{ cm} = 100 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$v'' \text{ „ „ „ „ } 1 \text{ cm} = 300 \text{ cm sek}^{-3}$$

dargestellt. Mit Berücksichtigung dieser Maßstäbe entnimmt man aus Abb. 55:

$$G g' = v = -280 \text{ cm sek}^{-1}$$

$$G h'' = u' = -310 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$h'' g'' = n' = +270 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$h''' g''' = n'' = +850 \text{ cm sek}^{-3}.$$

v und u' sind negativ, weil die Winkel

$$(v, n') = (u', n') = 270^\circ$$

sind, n'' ist positiv, weil der Sinn von n'' mit dem von n' übereinstimmt. Nach den Gleichungen 34) und 37) ist also

$$G K = r = \frac{280^2}{270} = 290 \text{ cm}$$

und

$$KM = r_1 = 290 \left(-\frac{280 \cdot 850}{270^2} + 3 \frac{310}{270} \right) = +52 \text{ cm.}$$

Da r_1 positiv ist, so ist der Winkel

$$(KM, GK) = (r_1, r) = 90^\circ.$$

16. Die geometrische Bewegung einer Ebene. Die Krümmungen der Bahnen und der Bahnevoluten aller Punkte einer bewegten Ebene werden für einen gegebenen Zeitpunkt bestimmt durch die Lage der drei Pole P, Q, R und durch die drei Größen

$$\omega, \frac{d\omega}{dt}, \frac{d^2\omega}{dt^2}. \text{ Für eine zwangsläufige Bewegung, die z. B. von einem}$$

Getriebegliede und von der starr mit ihm verbundenen Ebene ausgeführt wird, sind die Bahnen der Punkte bestimmt und unabhängig von den genannten drei Größen. Zu jeder Gruppe von willkürlich

gewählten Werten $\omega, \frac{d\omega}{dt}, \frac{d^2\omega}{dt^2}$ gehört eine bestimmte Gruppe von drei Polen P, Q, R . Die hier in Betracht kommenden Beziehungen

nehmen ihre einfachste Form an, wenn man ω gleich der positiven Zahleneinheit und $\frac{d\omega}{dt}$ sowie $\frac{d^2\omega}{dt^2}$ gleich null wählt. Wir nennen diese Bewegung die *geometrische* Bewegung, weil die Zeit aus ihrer Betrachtung beseitigt wird. Nicht nur die Geschwindigkeiten, sondern auch alle Beschleunigungen werden lediglich durch die Längeneinheit gemessen und können im Maßstab des Lageplans dargestellt werden. Für die geometrische Bewegung ist also

$$\left. \begin{aligned} \omega &= +1 \\ \gamma &= 90^\circ \\ \delta' &= -\omega^2 = -1 \\ \omega' &= \frac{d\omega}{dt} = 0 \\ \gamma' &= 180^\circ \\ \delta'' &= -3\omega\omega' = 0 \\ \omega'' &= \frac{d^2\omega}{dt^2} = \omega^3 = -1 \\ \gamma'' &= 270^\circ \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Wenn die drei Pole P_0 , Q_0 , R_0 der geometrischen Bewegung bekannt sind, so bestimmt man für jeden Punkt A der Ebene die

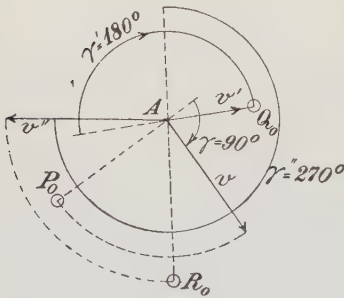


Abb. 56.

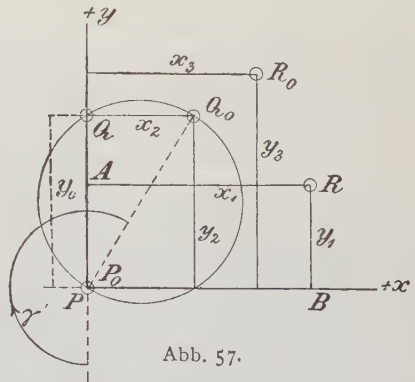


Abb. 57.

Geschwindigkeit v , die Beschleunigung erster Ordnung v' und die Beschleunigung zweiter Ordnung v'' durch folgende Bedingungen, Abb. 56:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= (P_0 A, v) = 90^\circ, & v &= P_0 A \\ \gamma' &= (Q_0 A, v') = 180^\circ, & v' &= Q_0 A \\ \gamma'' &= (R_0 A, v'') = 270^\circ, & v'' &= R_0 A \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Durch den Geschwindigkeitsplan und die beiden Beschleunigungspläne eines Getriebes sind für den Zeitpunkt der Betrachtung und für jedes Glied gegeben: die Lage der Pole P , Q , R und die algebraischen Werte der Größen ω , δ' , ω' , δ'' , ω'' . Es ergibt sich also die Aufgabe, hieraus die Pole P_0 , Q_0 , R_0 der geometrischen Bewegung zu bestimmen. Wir benutzen zu diesem Zweck ein rechtwinkliges Koordinatensystem, Abb. 57, dessen Anfangspunkt mit P , dessen y -Achse auch dem Sinne nach mit PQ zusammenfällt, und dessen x -Achse durch die Bedingung:

$$(y, x) = 90^\circ$$

bestimmt ist. Der Geschwindigkeitspol P_0 fällt auf den ruhenden Punkt der Ebene, also auf den Pol P . Wir bezeichnen die bekannten Koordinaten der Punkte Q und R mit x_0 , y_0 und x_1 , y_1 , ferner die unbekannten Koordinaten der Punkte Q_0 und R_0 mit x_2 , y_2 und x_3 , y_3 . Die Gleichungen zur Bestimmung dieser vier unbekannten Größen ergeben sich, indem man für zwei beliebige Punkte A , B der Ebene nach Abschnitt 12 die Bedingungen bildet, daß jede der beiden Größen $\frac{v^2}{n'}$ und $\left(\frac{vn''}{n'^2} - 3\frac{u'}{n'}\right)$ in der geometrischen Bewegung denselben Wert haben muß wie in der gegebenen Bewegung. Um diese Bedingungen tunlichst einfach zu gestalten, wählen wir für den Punkt A die Koordinaten

$$x = 0, \quad y = y_1$$

und für den Punkt B :

$$x = x_1, \quad y = 0.$$

Die Komponenten der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen dieser beiden Punkte haben die in dem nachstehenden Verzeichnis zusammengestellten Werte, deren Vorzeichen den Vorschriften des Abschnittes 12 entsprechen.

	Punkt A in der		Punkt B in der	
	gegebenen Bewegung	geometrischen Bewegung	gegebenen Bewegung	geometrischen Bewegung
v	$+ y_1 \omega$	$+ y_1$	$+ x_1 \omega$	$+ x_1$
n'	$(y_1 - y_0) \omega^2$	$y_1 - y_2$	$x_1 \omega^2 + y_0 \omega'$	$x_1 - x_2$
u'	$(y_1 - y_0) \omega'$	$+ x_2$	$x_1 \omega' - y_0 \omega^2$	$- y_2$
n''	$- x_1 \omega''$	$+ x_3$	$+ y_1 \omega''$	$- y_3$

endlich die Lage eines beliebigen Punktes Z der Ebene durch den Winkel

$$(P_0 Q_0, P_0 Z) = \xi$$

und den Vektor

$$P_0 Z = z.$$

Die Geschwindigkeit des Punktes Z hat, da ω gleich $\frac{1}{2}$ ist, die Größe

$$v = \frac{1}{2} z, \quad (50)$$

während Richtung und Sinn durch den Winkel

$$(z, v) = 90^\circ$$

bestimmt sind. Die Beschleunigung erster Ordnung des Punktes Z hat Größe, Richtung und Sinn der Strecke ZQ_0 , weil

$$\omega' = \frac{d\omega}{dt} = 0$$

und daher der Beschleunigungswinkel

$$\gamma' = 180^\circ$$

ist. Folglich ist:

$$\left. \begin{aligned} n' &= ZA = P_0 A - P_0 Z = q_0 \cos \xi - z \\ u' &= AQ_0 = -q_0 \sin \xi. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Hierbei ist zu beachten, daß auf der Bahnnormalen der Sinn des Vektors $P_0 Z$ und auf der Bahntangente der Sinn von v das positive Vorzeichen trägt. Die Beschleunigung zweiter Ordnung des Punktes Z hat, weil

$$\delta'' = -3\omega\omega' = 0$$

$$\omega'' = \frac{d^2\omega}{dt^2} - \omega^3 = -1$$

$$\gamma'' = 270^\circ$$

ist, die Größe

$$v'' = R_0 Z,$$

während Richtung und Sinn durch den Winkel

$$(R_0 Z, v'') = 270^\circ$$

bestimmt sind. Demnach ist

$$n'' = ZB = CR_0 = r_0 \sin (\xi - \varrho). \quad (52)$$

Nach den Gleichungen 34) und 37) ergeben sich die Krümmungshalbmesser r , r_1 der Bahnkurve und deren Evolute für den Punkt Z :

$$r = \frac{z^2}{q_0 \cos \xi - z} \quad (53)$$

$$r_1 = r \left(\frac{z r_0 \sin (\xi - \varrho)}{(q_0 \cos \xi - z)^2} + \frac{3 q_0 \sin \xi}{q_0 \cos \xi - z} \right). \quad (54)$$

Diese Formeln werden durch Abb. 59 geometrisch dargestellt. Man zieht im Kreise vom Durchmesser P_0Q_0 die Sehne Q_0X parallel zur Sehne P_0ZA , ferner die Gerade $ZCEG$ normal zu P_0Z . Die Gerade XC schneidet dann die Gerade P_0Z im Krümmungsmittelpunkt K der Bahnkurve des Punktes Z ; denn wegen Aehnlichkeit der Punktgruppen

$$CP_0ZK \sim CQ_0EX$$

ist

$$\begin{aligned} \frac{ZK}{P_0Z} &= \frac{XE}{EQ_0} = \frac{ZK}{z} \\ &= \frac{z}{q_0 \cos \zeta - z}, \end{aligned}$$

also

$$ZK = r.$$

Man macht ferner

$$P_0R_1 = \frac{1}{3} P_0R_0,$$

zieht im Kreise vom Durchmesser Q_0R_1 die Sehne R_1Y parallel zu P_0Z , dann XG parallel zu YZ , ZD parallel zu GA und macht KM gleich $3KD$; dann ist M der Krümmungsmittelpunkt der Bahnevolute des Punktes Z ; denn es ist:

$$\begin{aligned} AY &= \frac{1}{3} r_0 \sin(\zeta - \varrho), \quad ZA = q_0 \cos \zeta - z \\ ZG &= ZE + XE \frac{AY}{ZA} = q_0 \sin \zeta + z \frac{r_0 \sin(\zeta - \varrho)}{3(q_0 \cos \zeta - z)} \\ \frac{1}{3} KM &= KD = ZK \frac{ZG}{ZA} = r \left(\frac{z r_0 \sin(\zeta - \varrho)}{3(q_0 \cos \zeta - z)^2} + \frac{q_0 \sin \zeta}{q_0 \cos \zeta - z} \right) \\ KM &= r^1. \end{aligned}$$

Wir entnehmen aus den Gleichungen 53) und 54) die folgenden Sätze, wobei wir absehen von den Grenzfällen, in denen z. B. einer der drei Pole P_0 , Q_0 , R_0 unendlich fern liegt, oder zwei von ihnen zusammenfallen.

1. Der Pol P_0 ist der einzige Punkt der Ebene, dessen Bahn einen Krümmungshalbmesser von der Größe null hat.

2. Der Krümmungshalbmesser r der Bahn hat für alle Punkte innerhalb des Kreises P_0Q_0 einen positiven, für alle Punkte außerhalb dieses Kreises einen negativen Wert. Im ersten Falle hat also die Strecke ZK den Sinn P_0Z , im zweiten den Sinn ZP_0 . Für alle

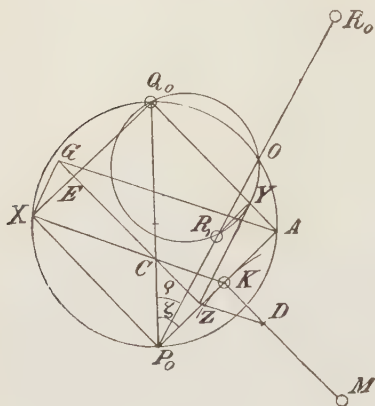


Abb. 59.

Punkte des Kreises $P_0 Q_0$ ist r unendlich groß; die Richtungen der Geschwindigkeiten aller dieser Punkte gehen durch den Pol Q_0 . Man hat den Kreis $P_0 Q_0$ den *Wendekreis* des Bewegungszustandes und den Punkt Q_0 den *Wendepol* genannt.

3. Für alle Punkte der zu $P_0 Q_0$ normal gerichteten Geraden $P_0 F$, Abb. 61, fällt der Krümmungsmittelpunkt der Bahn mit dem Pol P_0 zusammen.

4. Bezeichnet K , Abb. 60, den Krümmungsmittelpunkt der Bahn eines auf der Achse $P_0 Q_0$ liegenden Punktes Z , und sind KK_1 , $Q_0 Q_1$, ZZ_1 die von den Punkten K , Q_0 , Z auf eine durch P_0 gehende Gerade gefällten Lote, so ist K_1 der Krümmungsmittelpunkt der Bahn des Punktes Z_1 ; denn es ist

$$ZK = \frac{\overline{P_0 Z}^2}{\overline{Z Q_0}},$$

$$Z_1 K_1 : P_0 Z_1 : Z_1 Q_1 = ZK : P_0 Z : Z Q_0,$$

folglich

$$Z_1 K_1 = \frac{\overline{P_0 Z_1}^2}{\overline{Z_1 Q_1}}.$$

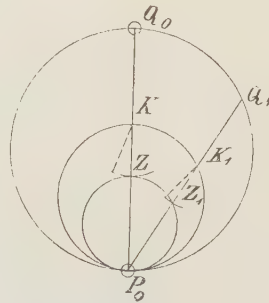


Abb. 60.

Die Bahnen aller Punkte des Kreises vom Durchmesser $P_0 Z$ haben ihre Krümmungsmittelpunkte also auf dem Kreise vom Durchmesser $P_0 K$.

5. Für alle Punkte des Wendekreises $P_0 Q_0$ mit Ausnahme des Punktes P_0 und des auf dem Kreise $Q_0 R_1$ liegenden Punktes O , Abb. 59, ist der Krümmungshalbmesser r_1 der Bahnevolute unendlich groß (Gleichung 54).

6. Die Punkte, deren Bahnevoluten einen Krümmungshalbmesser von der Größe null haben, liegen auf einer Kurve dritter Ordnung $P_0 O Z$, Abb. 61, von der Gleichung:

$$z = \frac{3q_0^2 \sin \zeta \cos \zeta}{3q_0 \sin \zeta - r_0 \sin(\zeta - \varrho)} \quad (55)$$

(vergl. Gleichung 54). Jede durch P_0 gelegte Gerade schneidet diese Kurve zweimal im Punkte P_0 ; den dritten Schnittpunkt Z ,

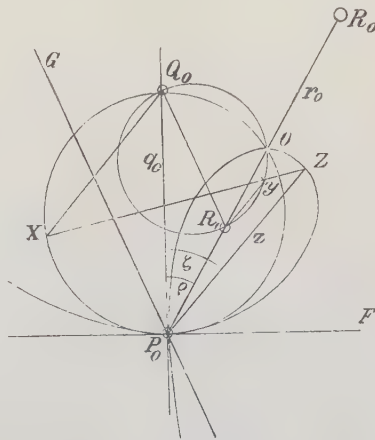


Abb. 61.

Wenn nicht die Pole der *geometrischen* Bewegung, sondern für irgend eine andere Wertgruppe ω , $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$ die Pole P , Q , R und also die zugehörigen Beschleunigungswinkel γ' , γ'' bekannt sind, so bestimmt man den Punkt O in folgender Weise (Abb. 63): Man zieht die beiden Geraden PA , PB , die durch die Bedingungen:

$$(QP, PA) = \gamma' \pm 90^\circ, \quad (RP, PB) = \gamma'' \pm 90^\circ$$

bestimmt sind; ferner den Kreis PQ , der die Gerade PA berührt, und den Kreis PR , der PB berührt. Der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise ist der Punkt O ; denn die Geschwindigkeit v dieses Punktes ist, ebenso wie seine beiden Beschleunigungen v' , v'' , normal zur Geraden PO gerichtet. Da der Pol R_0 auf der Geraden PP_0O liegt, so kann man zur Bestimmung dieses Pols die vorstehende Konstruktion in Verbindung mit *einer* der beiden nach Gleichung 49) zu berechnenden Koordinaten x_3 , y_3 anwenden.

8. Im Kurbelgetriebe (Abb. 64) bewegen sich zwei Punkte Z_1 und Z_2 auf Kreisen um die Mittelpunkte K_1 , K_2 und liegen also auf der Kurve P_0OZ der bewegten Ebene (Abb. 61). Daher ergeben sich die Pole P_0 , Q_0 , R_0 der geometrischen Bewegung in diesem Falle wie folgt. Der Pol P_0 ist der Schnitt der beiden Geraden K_1Z_1 , K_2Z_2 . Ferner wird der Pol Q_0 bestimmt durch die Bedingungen, daß die Projektionen Z_1A_1 , Z_2A_2 der Strecken Z_1Q_0 , Z_2Q_0 auf die Geraden Z_1K_1 , Z_2K_2 den Sinn dieser Strecken und die Größen:

$$Z_1A_1 = \frac{\overline{P_0Z_1}^2}{Z_1K_1}, \quad Z_2A_2 = \frac{\overline{P_0Z_2}^2}{Z_2K_2}$$

haben müssen.

Um darauf den Punkt R_1 zu bestimmen, zieht man in dem Kreise vom Durchmesser P_0Q_0 die Sehnen:

$$Q_0X_1 \parallel P_0Z_1, \quad Q_0X_2 \parallel P_0Z_2.$$

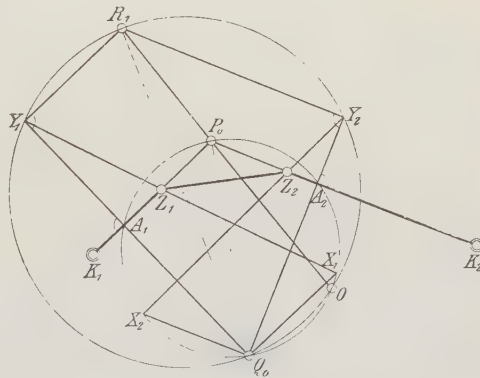


Abb. 64.

Die Punkte Y_1 und Y_2 sind die Schnitte der Geraden $Q_0 A_1$, $X_1 Z_1$ und $Q_0 A_2$, $X_2 Z_2$, und $Q_0 R_1$ ist der Durchmesser des Kreises $Q_0 Y_1 Y_2$.

Endlich wird der Pol R bestimmt durch die Bedingung

$$P_0 R_0 = 3 P_0 R_1$$

(vergl. Abb. 59 und 61).

Im Falle des Schubkurbelgetriebes (Abb. 65) vereinfacht sich die Konstruktion dadurch, daß die Punkte A_2 und Y_2 mit Z_2 zusammenfallen.

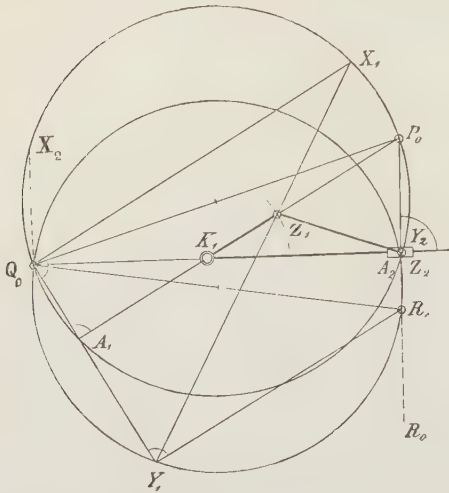


Abb. 65.

17. Die Krümmung der Bahnen des Geschwindigkeitspols. Zur Zeit t möge der Geschwindigkeitspol der mit einem Getriebegliede starr verbundenen Ebene die Lage P_0 haben.

Dieser Pol beschreibt in der ruhenden Ebene die ruhende Polbahn CP_0P_1D (Abb. 66) und zugleich in der bewegten Ebene die bewegte Polbahn EAA_1G . Zur Zeit t fällt der Punkt A der bewegten Ebene mit dem ruhenden Punkte P_0 zusammen; die unendlich kleine Strecke AA_1 dreht sich also um A . Zur Zeit $t + dt$ fällt der Punkt A_1 der bewegten Ebene mit dem festen Punkt P_1 zusammen, und AA_1 dreht sich in diesem Zeitpunkt um A_1 . Man ersieht hieraus, daß die mit der bewegten Ebene EG starr verbundene Polbahn EAA_1G auf der festen Polbahn CP_0P_1D rollt. In den Lehrbüchern werden diese Polbahnen benutzt, um die Bewegung darzustellen und insbesondere die Krümmungen der Bahnkurven zu bestimmen. Es kommt daher in Frage, welche Beziehungen zwischen den Bahnen des Geschwindigkeitspols und den im vorigen Abschnitt benutzten Polen P_0 , Q_0 , R_0 der geometrischen Bewegung bestehen. Wir nehmen an, es sei gegeben: der Geschwindigkeitspol P_0 , der Krümmungsmittelpunkt F der festen Polbahn und der Krümmungsmittelpunkt B der bewegten Polbahn. Das positive Vorzeichen trägt auf der Polbahnnormalen BFP_0 der Sinn BP_0 , auf der Polbahntangente der durch die Bedingung

$$(BP_0, P_0H) = 90^\circ$$

bestimmte Sinn P_0H . Der Krümmungshalbmesser der bewegten Polbahn

$$BP_0 = b$$

hat demnach stets einen positiven Wert, während der Krümmungshalbmesser

$$FP_0 = f$$

positiv oder negativ ist, je nachdem die beiden Polbahnen gleich oder entgegengesetzt gekrümmt sind. In der geometrischen Bewegung durchläuft die Ebene in der Zeit dt den Winkel

$$BA_1B_1 = dt.$$

Die Drehgeschwindigkeit τ des Halbmessers FP_0 der festen Polbahn ergibt sich demnach aus der Gleichung

$$\frac{P_0P_1}{FP_0} = \tau dt =$$

$$\frac{BB_1}{FB} = \frac{b dt}{b - f}$$

$$\tau = \frac{b}{b - f}. \quad (57)$$

Die Drehgeschwindigkeit τ hat den positiven Sinn der Uhrzeigerbewegung, wenn algebraisch b größer als f ist. Der Pol P_0 verschiebt sich mit der Geschwindigkeit

$$p = f\tau = \frac{bf}{b - f}, \quad (58)$$

und zwar im Sinne P_0H oder in dem negativen Sinne HP_0 , je nachdem f und τ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Der Pol der Beschleunigungen erster Ordnung fällt mit dem Punkte Q_0 der bewegten Ebene zusammen, dessen Geschwindigkeit zur Zeit t nach Größe, Richtung und Sinn mit der Verschiebungsgeschwindigkeit $f\tau$ von P_0 übereinstimmt, der also in der Zeit dt den Weg

$$Q_0Q_1 \parallel P_0P_1 = f\tau dt$$

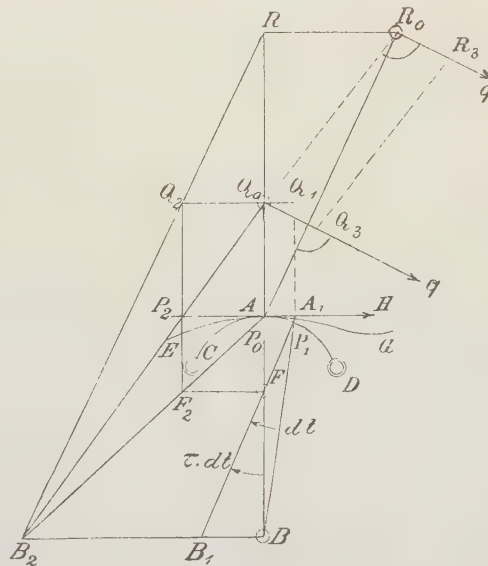


Abb. 66.

zurücklegt; denn die Geschwindigkeit dieses Punktes Q_0 ändert in der Zeit dt weder ihre Richtung noch ihre Größe, weil die Drehgeschwindigkeit der Ebene die *unveränderliche* Größe $+1$ hat. Der Pol Q_0 liegt daher auf der Polbahnnormalen, und die Strecke $P_0 Q_0$ hat die *algebraische* Größe

$$P_0 Q_0 = p = f\tau = \frac{bf}{b-f}. \quad (59)$$

Die Strecke $P_0 Q_0$ hat den positiven Sinn BP_0 , wenn f und τ gleiche Vorzeichen tragen.

Der Pol der Beschleunigungen *zweiter* Ordnung fällt mit dem Punkte R_0 der bewegten Ebene zusammen, dessen Geschwindigkeit zur Zeit t nach Größe, Richtung und Sinn mit der noch unbekannten Verschiebungsgeschwindigkeit q des Poles Q_0 übereinstimmt, der also in der Zeit dt den Weg

$$R_0 R_3 \parallel Q_0 Q_3 = q dt$$

zurücklegt; denn die Beschleunigung erster Ordnung von R_0 wird zur Zeit t nach Größe, Richtung und Sinn durch die Strecke $R_0 Q_0$ und zur Zeit $t + dt$ durch $R_3 Q_3$ dargestellt; sie ändert in dieser Zeit also weder ihre Größe noch ihre Richtung. Der Punkt R_0 wird demnach bestimmt durch die Bedingungen:

$$(P_0 R_0, q) = 90^\circ, \quad P_0 R_0 = q.$$

Der Punkt Q_0 verschiebt sich auf der Polbahnnormalen; seine Geschwindigkeit q setzt sich also zusammen aus der Geschwindigkeit $q \sin(b, q)$ des mit ihm zusammenfallenden Punktes der Polbahnnormalen und einer Verschiebungsgeschwindigkeit $q \cos(b, q)$ von der Richtung dieser Normalen. Die erstgenannte Komponente ist zur Polbahntangente parallel gerichtet und hat die algebraische Größe

$$q \sin(b, q) = FQ_0 \tau = f(1 + \tau) \tau.$$

Da der Winkel

$$(b, q) = (b, P_0 R_0) + 90^\circ$$

ist, so ist

$$q \sin(b, q) = P_0 R_0 \cos(b, P_0 R_0) = f(1 + \tau) \tau,$$

d. h. die Projektion $P_0 R$ der Strecke $P_0 R_0$ auf die Polbahnnormale hat die algebraische Größe

$$P_0 R = f\tau(1 + \tau).$$

Daher ist

$$Q_0 R = f\tau^2 = \frac{fb^2}{(b-f)^2}. \quad (60)$$

Die *zweite* Komponente der Geschwindigkeit q oder die Verschiebungsgeschwindigkeit des Punktes Q_0 auf der Polbahnnormalen P_0Q_0 hat die Größe

$$q \cos(b, q) = \frac{dp}{dt},$$

weil die veränderliche Strecke P_0Q_0 gleich p ist. Durch Differenzieren des Wertes von p aus Gleichung 59) folgt:

$$q \cos(b, q) = \frac{1}{(b-f)^2} \left(b^2 \frac{df}{dt} - f^2 \frac{db}{dt} \right).$$

Die Geschwindigkeiten $\frac{df}{dt}$ und $\frac{db}{dt}$, mit welchen die Krümmungshalbmesser der festen und der beweglichen Polbahn ihre Längen ändern, können bestimmt werden, wenn die Krümmungshalbmesser

$$f_1 = FF_1 \text{ und } b_1 = BB_1$$

(Abb. 67) der Evoluten dieser Bahnen gegeben sind. Wir legen den Strecken FF_1 und BB_1 das positive Vorzeichen bei, wenn sie den Sinn P_0H haben. Die Drehgeschwindigkeiten der beiden Halbmesser f und b haben in positivem Sinne die Werte $\frac{p}{f}$ und $\frac{p}{b}$;

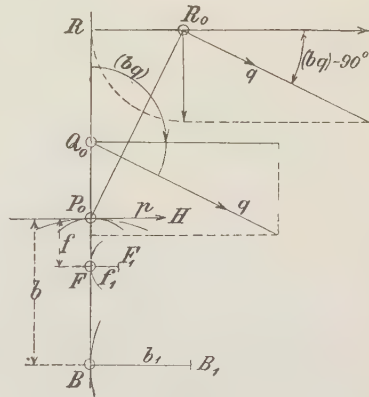


Abb. 67.

daher ist

$$df = -f_1 \frac{p}{f} dt = -\frac{bf_1}{b-f} dt \text{ und } db = -b_1 \frac{p}{b} dt = -\frac{fb_1}{b-f} dt$$

und

$$RR_0 = \dot{q} \cos(b, q) = \frac{f^3 b_1 - b^3 f_1}{(b-f)^3}. \quad (61)$$

Wir entnehmen aus den Gleichungen 57), 59), 60) die folgenden Beziehungen:

$$\tau = \frac{BP_0}{BF} = \frac{P_0Q_0}{FP_0} = \frac{Q_0R}{P_0Q_0} = \frac{BQ_0}{BP_0} = \frac{BR}{BQ_0} \quad (62)$$

und

$$BF : BP_0 : BQ_0 : BR = 1 : \tau : \tau^2 : \tau^3. \quad (63)$$

In dieser geometrischen Reihe sind je zwei aufeinanderfolgende Strecken dem Sinne nach gleich oder entgegengesetzt, je

nachdem τ positiv oder negativ ist. Die geometrische Bedeutung der vorstehenden Gleichungen wird durch Abb. 66 dargestellt. Trägt man die drei gleich großen und gleich gerichteten Strecken FF_2 , P_0P_2 , Q_0Q_2 auf, so schneiden sich die drei Geraden P_0F_2 , Q_0P_2 , RQ_2 in einem Punkte B_2 der zu FF_2 parallel gerichteten Geraden BB_2 .

Sind von den fünf Punkten B, F, P_0, Q_0, R entweder B, F, P_0 oder P_0, Q_0, R bekannt, so können hiernach die beiden anderen Punkte bestimmt werden. Es ist aber zu beachten, daß durch die drei Punkte B, F, P_0 wohl der Punkt R , nicht aber der Pol R_0 bestimmt wird. Zur Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte der Bahnevoluten genügen also nicht die drei Punkte B, F, P_0 , wohl aber die drei Pole P_0, Q_0, R_0 .

18. Beispiele zum Abschnitt 17.

Beispiel 1. Auf dem festen Kreise P_0H , Abb. 68, rollt die Gerade NP_0 , mit welcher der Punkt Z starr verbunden ist. Es sind die Krümmungshalbmesser ZK und KM der Bahnkurve des Punktes Z und ihrer Evolute zu bestimmen.

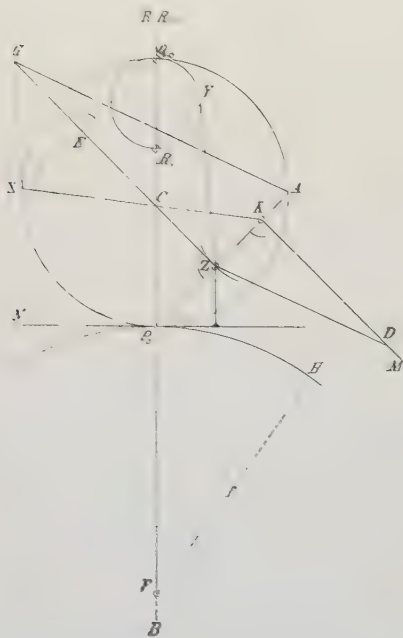


Abb. 68.

Durch vorstehende Angaben sind gegeben: Die Krümmungshalbmesser der Polbahnen und ihrer Evoluten:

$$b = P_0B = \infty, f = FP_0, \\ b_1 = f_1 = 0.$$

Nach den Gleichungen 57) bis 61) ist also

$$r = \frac{b}{b-f} = +1$$

$$P_0Q_0 = fr = +f = FP_0$$

$$Q_0R = fr^2 = +f = FP_0$$

$$RR_0 = \frac{f^3b_1 - b^3f_1}{(b-f)^3} = 0.$$

Folglich ist

$$P_0R_0 = 2f = 2FP_0$$

und

$$P_0R_1 = \frac{2}{3} FP_0.$$

Nachdem die Kreise P_0Q_0 , Q_0R_1 aufgetragen sind, zieht man nach Anleitung der Abb. 59:

$$Q_0X \quad R_1Y \quad P_0Z$$

$$ZCEG \perp P_0Z$$

$$XG \parallel ZY$$

Die Gerade XCK bestimmt den Krümmungsmittelpunkt K der Bahn des Punktes Z . Man zieht dann

$$KD \perp P_0Z, \quad ZD \parallel GA$$

und bestimmt nach der Bedingung

$$KM = 3 KD$$

den Krümmungsmittelpunkt M der Bahnevolute.

Beispiel 2. Die drei Punkte Z , Z_1 , Z_2 in Abb. 69 sind miteinander starr verbunden; Z_1 und Z_2 bewegen sich auf zwei zueinander recht-

winklig gerichteten Geraden FZ_1 , FZ_2 . Zu bestimmen sind die Krümmungshalbmesser KZ und MK der Bahn des Punktes Z und ihrer Evolute.

Der Pol P_0 ist der Schnitt der beiden Geraden

$$Z_1P_0 \perp Z_1F$$

$$Z_2P_0 \perp Z_2F.$$

Der Pol Q_0 fällt auf den festen Punkt F , weil die Beschleunigungen Z_1Q_0 , Z_2Q_0 der Punkte Z_1 , Z_2 die Richtungen ihrer geraden Bahnen FZ_1 , FZ_2 haben müssen.

Bei der Bewegung der Ebene ZZ_1Z_2 ändert sich weder die Länge

$$FP_0 = Z_1Z_2,$$

noch die Länge

$$FB = \frac{1}{2} Z_1Z_2.$$

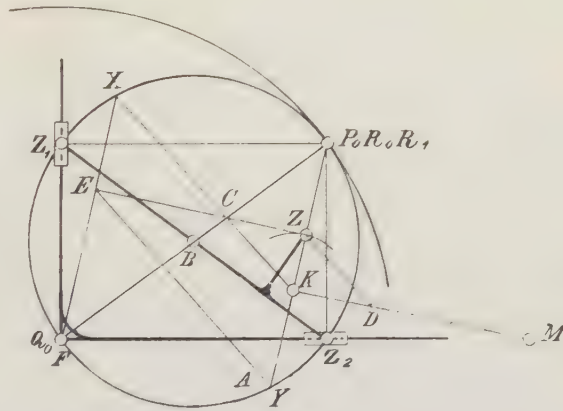


Abb. 69.

Daher ist der Kreis vom Halbmesser FP_0 die *feste*, und der Kreis vom Durchmesser FP_0 die *bewegte* Polbahn. Demnach ist

$$BP_0 = \frac{1}{2} FP_0 \text{ oder } b = \frac{1}{2} f$$

und

$$b_1 = f_1 = 0.$$

Die Gleichungen 57), 60), 61) ergeben hiernach:

$$i = \frac{b}{b-f} = 1$$

$$Q_0 R = f i^2 = + f$$

und

$$RR_0 = \frac{f^3 b_1 - b^3 f_1}{(b-f)^3} = 0.$$

Es fallen also zusammen: die Punkte R_0 und R_1 mit P_0 und der Kreis $Q_0 R_1$ mit dem Kreise $Q_0 P_0$. Die Konstruktion der Abb. 69 gestaltet sich nun, wie folgt:

$$Q_0 EX \mid P_0 ZKA$$

$$ZUE \perp P_0 Z.$$

Die Gerade XU bestimmt dann durch ihren Schnitt mit $P_0 Z$ den Krümmungsmittelpunkt K der Bahn des Punktes Z . Da die beiden Kreise $Q_0 R_1$ und $Q_0 P_0$ sich decken, so fällt der Punkt Y mit A und G mit E zusammen (vergl. Abb. 59). Um den Krümmungsmittelpunkt M der Bahnevolute zu bestimmen, ist also nur noch

$$KD \perp P_0 Z$$

$$ZD \mid EA$$

zu ziehen, und darauf

$$KM = 3 KD$$

aufzutragen.

Beispiel 3. Wenn für zwei Punkte Z_1, Z_2 der bewegten Ebene (Abb. 70) die Krümmungsmittelpunkte K_1, K_2, M_1, M_2 der Bahnen und der Bahnevoluten gegeben sind, so können unabhängig voneinander die Pole P_0, Q_0, R_0 der geometrischen Bewegung und die Krümmungsmittelpunkte B, F der bewegten und der festen Polbahn in folgender Weise bestimmt werden.

1. Die Pole P_0, Q_0, R_0 . Die Bestimmung der Punkte P_0, Q_0 wurde bereits im Abschnitt 16, 8 beschrieben: P_0 ist der Schnitt-

punkt der beiden Geraden $Z_1 K_1$, $Z_2 K_2$, und um Q_0 zu bestimmen sind die Strecken

$$Z_1 A_1 = \frac{P_0 Z_1^2}{K_1 Z_1} = \frac{216^2}{432} = 108 \text{ cm}$$

$$Z_2 A_2 = \frac{P_0 Z_2^2}{K_2 Z_2} = \frac{312^2}{468} = 208 \text{ cm}$$

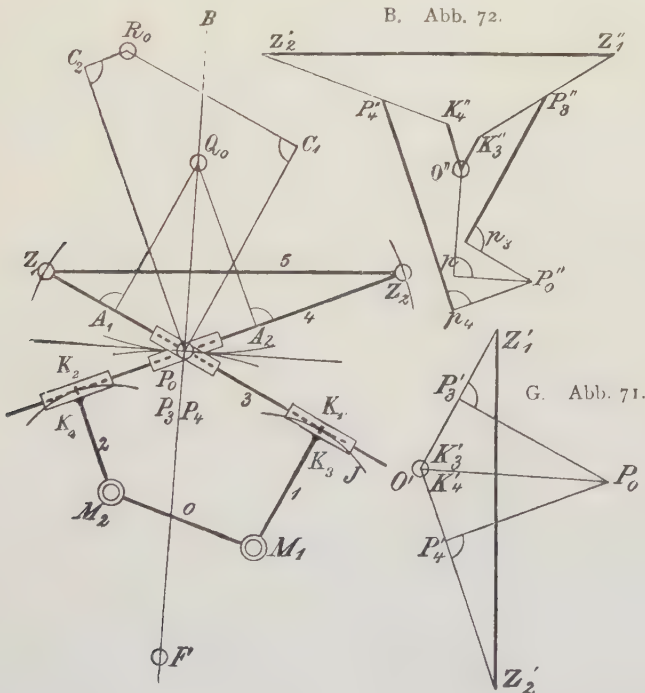
im Sinne von $Z_1 K_1$, $Z_2 K_2$ aufzutragen und darauf die Geraden

$$A_1 Q_0 \perp Z_1 K_1, \quad A_2 Q_0 \perp Z_2 K_2$$

zu ziehen.

Um den Pol R_0 zu bestimmen, berechnet man für jeden der beiden Punkte Z_1 , Z_2 nach Gleichung 54) die Strecke

$$r_0 \sin(\xi - \varrho) = \frac{3(q_0 \cos \xi - z)}{z} \left\{ \frac{r_1}{3r} (q_0 \cos \xi - z) - q_0 \sin \xi \right\},$$



L. Abb 70.

also die Abstände des Punktes R_0 von den beiden Geraden $P_0 Z_1$ und $P_0 Z_2$. Gegeben ist für den Punkt Z_1 :

$$\begin{aligned}
z &= P_0 Z_1 = + 216 \text{ cm} \\
r &= Z_1 K_1 \cos (P_0 Z_1, Z_1 K_1) = - 432 \text{ cm} \\
r_1 &= K_1 M_1 \sin (P_0 Z_1, K_1 M_1) = - 180 \text{ cm} \\
q_0 \cos \zeta &= P_0 Q_0 \cos (P_0 Q_0, P_0 Z_1) = + 108 \text{ cm} \\
q_0 \sin \zeta &= P_0 Q_0 \sin (P_0 Q_0, P_0 Z_1) = - 222 \text{ cm};
\end{aligned}$$

ferner für den Punkt Z_2 :

$$\begin{aligned}
z &= P_0 Z_2 = + 312 \text{ cm} \\
r &= Z_2 K_2 \cos (P_0 Z_2, Z_2 K_2) = - 468 \text{ cm} \\
r_1 &= K_2 M_2 \sin (P_0 Z_2, K_2 M_2) = + 144 \text{ cm} \\
q_0 \cos \zeta &= P_0 Q_0 \cos (P_0 Q_0, P_0 Z_2) = + 104 \text{ cm} \\
q_0 \sin \zeta &= P_0 Q_0 \sin (P_0 Q_0, P_0 Z_2) = + 224 \text{ cm}.
\end{aligned}$$

Setzt man diese gegebenen Werte ein, so ergibt sich für den Punkt Z_1 :

$$r_0 \sin (\zeta - \varrho) = - 312 \text{ cm}$$

und für Z_2 :

$$r_0 \sin (\zeta - \varrho) = + 406 \text{ cm}.$$

Da $r_0 \sin (\zeta - \varrho)$ für den Punkt Z_1 negativ und für Z_2 positiv ist, so liegt R_0 rechts von der Strecke $P_0 Z_1$ und links von der Strecke $P_0 Z_2$. Demnach wurden

$$\begin{aligned}
(P_0 Z_1, P_0 C_1) &= 90^\circ, \quad P_0 C_1 = 312 \text{ cm} \\
(P_0 Z_2, P_0 C_2) &= 270^\circ, \quad P_0 C_2 = 406 \text{ cm}
\end{aligned}$$

aufgetragen und dann die Geraden

$$C_1 R_0 \perp P_0 C_1, \quad C_2 R_0 \perp P_0 C_2$$

gezogen.

2. *Die Punkte B und F.* Man bildet das Getriebe $M_1 K_1 Z_1 Z_2 K_2 M_2$ aus den sechs Gliedern $M_1 M_2$, $M_1 K_1$, $M_2 K_2$, $K_1 Z_1$, $K_2 Z_2$, $Z_1 Z_2$, die in dieser Reihenfolge mit den Nummern 0 bis 5 bezeichnet sind. Das Glied 0 ruht; die Glieder 1, 3 und 2, 4 sind durch Schieber miteinander verbunden. Die Stäbe 3, 4 sind an ihrer Kreuzungsstelle durch zwei Schieber geführt, die durch ein Gelenk P_0 miteinander verbunden sind. Wenn die Gelenke Z_1, Z_2 auf ihren gegebenen Bahnen geführt werden, so beschreibt das Gelenk P_0 die feste Polbahn des Gliedes 5, also der Ebene $Z_1 Z_2$. Zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes F dieser Polbahn sind demnach nur die Geschwindigkeit p und die Normalbeschleunigung n' des Gelenkes P_0 erforderlich. Wir erteilen dem Gliede 5 die geometrische Bewegung, setzen also seine Drehgeschwindigkeit gleich $+ 1$, seine

Drehbeschleunigung gleich null. Im Geschwindigkeitsplan, Abb. 71, ist hierdurch die Strecke $Z'_1 Z'_2$ bestimmt durch die Bedingungen:

$$(Z_1 Z_2, Z'_1 Z'_2) = 90^\circ, \quad Z'_1 Z'_2 = Z_1 Z_2.$$

Die Punkte K_3, K_4 der Stäbe 3, 4, die zur Zeit t mit den Krümmungsmittelpunkten K_1, K_2 zusammenfallen, ruhen in diesem Zeitpunkt. Die Punkte K'_3, K'_4 fallen also mit dem Pol O' des Geschwindigkeitsplans zusammen und werden durch die Bedingungen:

$$Z'_1 O' \perp Z_1 K_3, \quad Z'_2 O' \perp Z_2 K_4$$

bestimmt. Die Geschwindigkeit $O' P'_0$ des Gelenkes P_0 kann zerlegt werden in die Geschwindigkeit $O' P'_3$ des vom Gelenk P_0 gedeckten Punktes P_3 des Stabes 3 und der Geschwindigkeit $P'_3 P'_0$, womit der Schieber auf dem Stabe 3 sich bewegt. Sie kann ferner zerlegt werden in die Geschwindigkeit $O' P'_4$ des vom Gelenk gedeckten Punktes P_4 des Stabes 4 und der Verschiebungsgeschwindigkeit $P'_4 P'_0$ des Schiebers auf diesem Stabe. Demnach wird die Polgeschwindigkeit

$$p = O' P'_0$$

bestimmt durch die Bedingungen:

$$K'_3 P'_3 Z'_1 \approx K_3 P_3 Z_1$$

$$K'_4 P'_4 Z'_2 \approx K_4 P_4 Z_2$$

$$P'_3 P'_0 \parallel K_1 Z_1, \quad P'_4 P'_0 \parallel K_2 Z_2.$$

Wie oben gezeigt ist (Gleichung 59), bestimmt die Polgeschwindigkeit p die Lage des Beschleunigungspols Q_0 im Lageplan:

$$(P_0 Q_0, O' P'_0) = 90^\circ, \quad P_0 Q_0 = O' P'_0 = p.$$

Im Beschleunigungsplan, Abb. 72, ist, da die Drehbeschleunigung des Gliedes 5 gleich null ist:

$$(Z''_1 Z''_2, Z_1 Z_2) = 180^\circ, \quad Z''_1 Z''_2 = Z_1 Z_2,$$

und der mit O'' bezeichnete Pol ergibt sich aus der Bedingung:

$$O'' Z''_1 Z''_2 \cong Q_0 Z_1 Z_2.$$

Die Beschleunigung des von K_1 gedeckten Punktes K_3 läßt sich nach dem zweiten Verfahren des Abschnittes 9, jedoch einfacher noch durch folgende Ueberlegung ermitteln. Zur Zeit t ruht der Punkt K_3 ; zur Zeit $t + dt$ ist der Punkt J des Stabes Berührungspunkt der Evolute, und die Strecke $K_3 J$ hat die Länge

$$K_3 J = M_1 K_1 \cdot \frac{O' Z'_1}{K_3 Z_1} dt,$$

da der Stab 3 in positivem Sinne mit der Drehgeschwindigkeit $\frac{O' Z'_1}{K_3 Z_1}$ sich bewegt. Die unendlich kleine Geschwindigkeit des Punktes K_3

hat zur Zeit $t + dt$ demnach Richtung und Sinn der Strecke $M_1 K_1$ und die Größe

$$K_3 J \frac{O' Z'_1}{K_3 Z_1} dt = M_1 K_1 \left(\frac{O' Z'_1}{K_3 Z_1} \right)^2 dt.$$

Daher hat die Beschleunigung $O'' K_3''$ des Punktes K_3 zur Zeit t Richtung und Sinn von $M_1 K_1$ und die Größe:

$$O'' K_3'' = M_1 K_1 \left(\frac{O' Z'_1}{K_3 Z_1} \right)^2 = 180 \left(\frac{216}{432} \right)^2 = 45 \text{ cm sek}^{-2}.$$

Ebenso hat die Beschleunigung $O'' K_4''$ des von K_2 gedeckten Punktes K_4 des Stabes 4 Richtung und Sinn von $M_2 K_2$ und die Größe:

$$O'' K_4'' = M_2 K_2 \left(\frac{O' Z'_2}{K_4 Z_2} \right)^2 = 144 \left(\frac{312}{468} \right)^2 = 64 \text{ cm sek}^{-2}.$$

Die Beschleunigung $O'' P_0''$ des Gelenkes P_0 wird nach Abschnitt 9 bestimmt:

$$K_3'' P_3'' Z_1'' \approx K_3 P_3 Z_1$$

$$K_4'' P_4'' Z_2'' \approx K_4 P_4 Z_2$$

$$(P'_3 P'_0, P''_3 p_3) = (P_3 Z_1, P'_3 Z'_1) = 90^\circ$$

$$P''_3 p_3 = 2 P'_3 P'_0 \frac{O' Z'_1}{K_1 Z_1} = 2 \cdot 222 \frac{216}{432} = 222 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$(P'_4 P'_0, P''_4 p_4) = (P_4 Z_2, P'_4 Z'_2) = 90^\circ$$

$$P''_4 p_4 = 2 P'_4 P'_0 \frac{O' Z'_2}{K_2 Z_2} = 2 \cdot 224 \frac{312}{468} = 299 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$p_3 P_0'' \perp P''_3 p_3, p_4 P_0'' \perp P''_4 p_4.$$

Die Projektion $O'' p$ der Beschleunigung $O'' P_0''$ des Gelenkes P_0 auf die Pohlbahnnormale BF hat die Größe:

$$n' = O'' p = 146 \text{ cm sek}^{-2}.$$

Der Krümmungshalbmesser $P_0 F$ der festen Polbahn hat den Sinn $O'' p$ und nach Gleichung 34) die Größe:

$$f = P_0 F = \frac{(O' P'_0)^2}{O'' p} = \frac{248^2}{146} = 421 \text{ cm sek}^{-2}.$$

Der Krümmungshalbmesser b der bewegten Polbahn ergibt sich darauf nach Gleichung 59):

$$b = P_0 B = \frac{p f}{p - f} = \frac{248 \cdot 421}{248 - 421} = -603 \text{ cm}.$$

Da die Vorzeichen von f und b verschieden sind, so sind die beiden Polbahnen entgegengesetzt gekrümmt; $P_0 B$ hat also den Sinn $F P_0$.

Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der beiden Glieder 1 und 2 brauchten für den vorliegenden Zweck nicht bestimmt zu werden.

Zweiter Teil.

Die Kinetik ebener Getriebe.

19. Das Gesetz der Bewegung eines Getriebes. Im Abschnitt 10 dieser Abhandlung wurde angegeben, wie die Beschleunigungen aller Teile eines Getriebes auf geometrischem Wege bestimmt werden, wenn für den betreffenden Zeitpunkt bekannt sind: der Lageplan, der Geschwindigkeitsplan und außerdem die Drehbeschleunigung *eines* Gliedes, das als das *geführte* Glied des Getriebes bezeichnet wurde. Die zuletzt genannte Größe ist aber in der Regel nicht gegeben, sondern sie ist aus den auf das Getriebe einwirkenden Kräften K zu bestimmen. Das Prinzip d'Alemberts, das in Verbindung mit dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten zu diesem Zwecke benutzt werden kann, spricht aus, daß die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte K ebenso groß ist wie die gleichzeitige Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte

$$V = m v'_1,$$

die allen Massenpunkten m des Getriebes ihre Beschleunigungen v'_1 erteilen. Unter Arbeitsgeschwindigkeit einer Kraft K versteht man das Produkt aus der Größe der Kraft und ihrer Schubgeschwindigkeit, d. h. der Projektion $v_1 \cos(v_1, K)$ der Geschwindigkeit v_1 irgend eines Punktes der Kraftachse auf die Krafrichtung (I, 12). Das Vorzeichen der Arbeitsgeschwindigkeit wird durch den Kosinus des Winkels (v_1, K) bestimmt. Jenem Prinzip zufolge ist also für jeden Zeitpunkt:

$$\sum K v_1 \cos(v_1, K) = \sum V v_1 \cos(v_1, V) \quad (64)$$

wenn diese Summen auf alle Kräfte K , V ausgedehnt werden, die bei der Bewegung des Getriebes Arbeit verrichten. Die Gleichung (64) enthält das Bewegungsgesetz eines jeden Getriebes.

20. Die Zerlegung der Bewegung des Getriebes. Die hier betrachtete und mit I bezeichnete Bewegung des Getriebes wird während zwei unendlich kleiner Zeiteilchen bestimmt durch die bekannte Drehgeschwindigkeit ω_{11} und durch die unbekannte Drehbeschleunigung ω'_{11} des geführten Gliedes I. Wir zerlegen diese Bewegung I in eine bekannte Bewegung II und eine unbekannte Be-

wegung III. In der Bewegung II hat das geführte Glied I dieselbe Drehgeschwindigkeit wie in der Bewegung I:

$$\omega_{12} = \omega_{11},$$

dagegen eine Drehbeschleunigung

$$\omega'_{12} = 0.$$

Daher erhält das geführte Glied in der Bewegung III die Drehgeschwindigkeit

$$\omega_{13} = 0$$

und die Drehbeschleunigung

$$\omega'_{13} = \omega'_{11}.$$

Wir bezeichnen in den drei Bewegungen I, II, III für einen Massenpunkt m des Getriebes die Geschwindigkeiten mit v_1, v_2, v_3 , die Beschleunigungen mit v'_1, v'_2, v'_3 und haben zu beachten, daß für jeden Punkt

$$v_2 \perp v_3 \quad v_1$$

und

$$v'_2 \perp v'_3 \quad v'_1$$

ist. Da die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte mv'_2 und mv'_3 zusammen so groß ist wie die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte mv'_1 , so erhält Gleichung 64) die Form:

$$\Sigma mv'_3 v_1 \cos(v_1, v'_3) = \Sigma K v_1 \cos(v_1, K) - \Sigma mv'_2 v_1 \cos(v_1, v'_2). \quad (65)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist durch die gegebenen Größen bestimmt; nur die linke Seite, d. h. die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte mv'_3 , ist abhängig von der unbekannten Drehbeschleunigung ω'_{11} des geführten Gliedes.

21. Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte mv'_3 . Die Bewegung III ist eine *Anfangsbewegung*, d. h. im Anfang des in Betracht gezogenen unendlich kleinen Zeitabschnittes dt ruht das Getriebe, weil ω_{13} gleich null ist. Am *Ende* dieses Zeitabschnittes hat das geführte Glied I die *Drehgeschwindigkeit*

$$\omega'_{13} dt = \omega'_{11} dt,$$

und ein Massenpunkt m , dessen Beschleunigung gleich v'_3 ist, erhält die Geschwindigkeit

$$v_3 = v'_3 dt.$$

Daher ist

$$v'_3 dt : v_1 = \omega'_{11} dt : \omega_{11}.$$

Für jeden Massenpunkt ist also

$$v'_3 = v_1 \frac{\omega'_{11}}{\omega_{11}}. \quad (66)$$

Die Beschleunigung v'_3 des Punktes m hat die *Richtung* seiner Geschwindigkeit v_1 in der Bewegung I und stimmt dem *Sinne* nach mit ihr überein, wenn die Drehgeschwindigkeit ω_{11} und die Drehbeschleunigung ω'_{11} des geführten Gliedes gleiche Vorzeichen haben. Sind diese Vorzeichen verschieden, so sind die Beschleunigungen v'_3 den Geschwindigkeiten v_1 dem Sinne nach entgegengesetzt. Demnach hat die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte mv'_3 den algebraischen Wert

$$\Sigma mv'_3 v_1 \cos(v_1, v'_3) = \frac{\omega'_{11}}{\omega_{11}} \Sigma mv_1^2. \quad (67)$$

Die unbekannte Drehbeschleunigung ω'_{11} des geführten Gliedes ergibt sich aus den Gleichungen 65) und 67):

$$\omega'_{11} = \omega_{11} \frac{\Sigma K v_1 \cos(v_1, K) - \Sigma mv'_2 v_1 \cos(v_1, v'_2)}{\Sigma mv_1^2}. \quad (68)$$

Die Summenwerte auf der rechten Seite dieser Gleichung müssen zunächst für jedes Glied des Getriebes und darauf durch Summierung für das ganze Getriebe berechnet werden.

22. Die Summe Σmv_1^2 für ein Getriebeglied. Durch den Geschwindigkeitsplan der Bewegung I des Getriebes ist die Drehgeschwindigkeit ω des Gliedes und der Geschwindigkeitspol P seines Lageplans bekannt. Bezeichnet z den Abstand eines Massenpunktes m von der durch den Pol P gelegten Drehachse, so ist

$$v_1 = z\omega,$$

also

$$\Sigma mv_1^2 = \omega^2 \Sigma mz^2.$$

Das Trägheitsmoment Σmz^2 des Getriebegliedes in bezug auf seine Polachse P wird man in der Regel vermittels des Trägheitsmomentes mi^2 in bezug auf die gleichgerichtete Schwerpunktsachse bestimmen. Bezeichnet man mit $\bar{z}$ den Abstand PS des Schwerpunktes S des Gliedes von seiner Polachse P und mit $\bar{m}$ die Masse des ganzen Gliedes, so ist nach Abhandlung III, 17:

$$\Sigma mz^2 = \bar{m} (i^2 + \bar{z}^2),$$

folglich

$$\Sigma mv_1^2 = \bar{m} (i^2 + \bar{z}^2) \omega^2. \quad (69)$$

23. Die Resultante V_2 der Kräfte mv'_2 für ein Getriebeglied. Durch den Geschwindigkeitsplan und den Beschleunigungsplan der Bewegung II ist für jedes Glied bekannt: die Drehgeschwindigkeit ω_2 , die Drehbeschleunigung ω'_2 und der Beschleunigungspol Q des Lageplans. Wir erinnern daran, daß die Ge-

schwindigkeitspläne der beiden Bewegungen I und II übereinstimmen, weil $\omega_{11} = \omega_{12}$

ist. Wir nehmen ferner an, daß das Getriebeglied in bezug auf die Bildebene symmetrisch geformt ist, so daß alle Massenpunkte des Gliedes in die Bildebene verlegt werden können. Die Lage der

Massenpunkte wird in Abb. 73 auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, dessen Anfangspunkt mit dem Schwerpunkt S des Gliedes, und dessen x -Achse auch dem Sinne nach mit der Strecke SQ von der Länge q zusammenfällt. Der Winkel (y, x) ist gleich 90 Grad. Der Abstand MQ des Massenpunktes M vom Beschleunigungspol Q wird mit z bezeichnet.

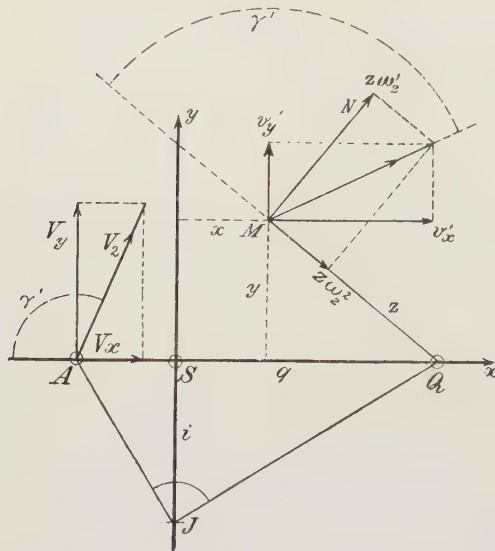


Abb. 73.

Nach Abschnitt 7 setzt sich die Kraft mv_2' zusammen aus zwei

Komponenten $mz\omega_2^2$ und $mz\omega_2'$. Die erste hat Richtung und Sinn der Strecke MQ , während die Richtung MN der zweiten Komponente mit der Strecke MQ den Winkel

$$(MN, MQ) = 90^\circ \text{ oder } (MN, MQ) = 270^\circ$$

einschließt, je nachdem die Drehbeschleunigung ω_2' des Gliedes einen positiven oder einen negativen Wert hat. Demnach ist, wenn die Projektionen der Kraft mv_2' auf die Koordinatenachsen mit mv_x' und mv_y' bezeichnet werden (Abb. 73):

$$\left. \begin{aligned} mv_x' &= m\omega_2^2(q-x) + m\omega_2'y \\ mv_y' &= -m\omega_2^2y + m\omega_2'(q-x) \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Die zu den Koordinatenachsen parallel gerichteten Komponenten V_x und V_y der Resultanten V_2 haben daher die Größen

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \Sigma mv_x' = \bar{m}\omega_2^2q \\ V_y &= \Sigma mv_y' = \bar{m}\omega_2'q \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

wobei man beachten muß, daß

$$\Sigma mx = \Sigma my = 0$$

ist, weil der Anfangspunkt der Koordinaten auf dem Schwerpunkt des Getriebegliedes liegt. Die Gleichungen 71) sprechen aus, daß die Resultante V_2 Richtung und Sinn der Beschleunigung v'_2 des Schwerpunktes S und die Größe

$$V_2 = m v'_2$$

hat. Die *Lage* dieser Kraft bestimmt man durch die Abszisse

$$SA = x_2$$

ihres Schnittpunktes A mit der x -Achse, und zwar vermittelt der Momentengleichung in bezug auf den Schwerpunkt:

$$\begin{aligned} -x_2 V_y &= -x_2 \overline{m \omega'_2 q} = \Sigma y m v'_x - \Sigma x m v'_y = \omega'_2 \Sigma m (x^2 + y^2) \\ &= \overline{m \omega'_2 i^2} \end{aligned}$$

oder

$$x_2 = -\frac{i^2}{q}. \quad (72)$$

Man hat also, um auf geometrischem Wege den Punkt A zu bestimmen, normal zu QS die Strecke

$$SJ = i$$

aufzutragen und JA normal zu QJ zu ziehen.

24. Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte K und mv'_2 bei reibungsloser Bewegung des Getriebes. Die auf ein starres Getriebeglied wirkenden Kräfte haben dieselbe Arbeitsgeschwindigkeit wie ihre Resultante. Da in Gleichung 68) die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte mv'_2 das *negative* Vorzeichen trägt, so sind für jedes Glied die äußeren Kräfte K mit der *gewendeten* Kraft V_2 zu ihrer Resultanten R zusammenzusetzen. Die Schubgeschwindigkeit r der Kraft R ist aus dem Geschwindigkeitsplan der Bewegung I zu entnehmen; sie ist positiv, wenn sie den Sinn von R hat. Die Summe der Produkte Rr für alle Glieder des Getriebes bestimmt die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte K und mv'_2 :

$$\Sigma K v_1 \cos(v_1, K) - \Sigma m v'_2 v_1 \cos(v_1, v'_2) = \Sigma R r. \quad (73)$$

Es ist zu beachten, daß bei reibungsloser Bewegung des Getriebes die Gelenkkräfte, d. h. die Kräfte, die in den Gelenken von den Gliedern aufeinander übertragen werden, keine Arbeit verrichten, und daß also diese Kräfte bei der obigen Zusammensetzung *nicht* in Betracht kommen.

Bei reibungsloser Bewegung ist die Beschleunigung ω'_{11} des geführten Gliedes nach den Gleichungen 68) und 73):

$$\omega'_{11} = \omega_{11} \frac{\Sigma R r}{\Sigma m v_1^2}. \quad (74)$$

25. Die Gelenkkräfte bei reibungsloser Bewegung eines Getriebes. Es möge zunächst an einem Beispiel der

Abb. 74.

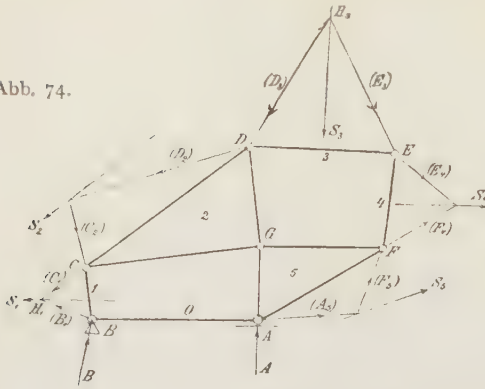


Abb. 75.

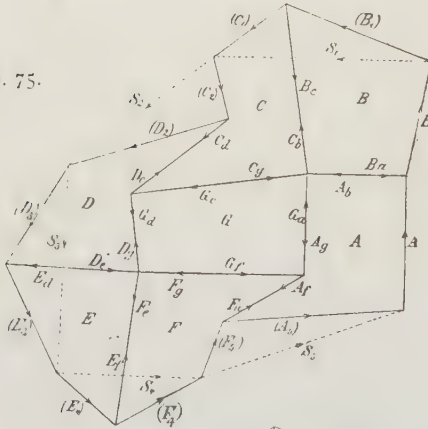
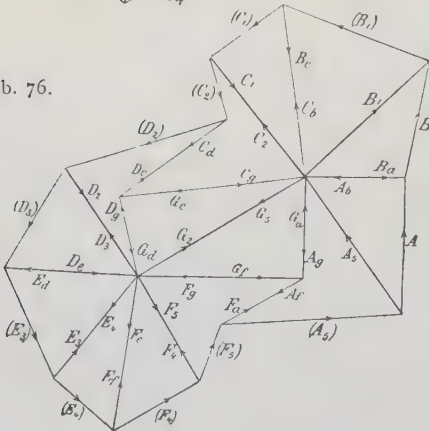


Abb. 76.



Rechnungsgang zur Bestimmung der Gelenkkräfte beschrieben werden. Das in Abb. 74 dargestellte Getriebe besteht aus sechs mit den Nummern 0 bis 5 bezeichneten Gliedern. Das ruhende Glied 0 hat bei B ein festes und bei A ein auf gegebener Bahn reibungslos bewegliches Auflager. Die Stützkraft A enthält, da ihre Lage gegeben ist, nur eine unbekannte Größe, die Stützkraft B dagegen zwei, etwa ihre Projektionen B_x und B_y auf zwei Koordinatenachsen. Nachdem die Drehbeschleunigung ω'_{11} des geführten Gliedes 1 nach Gleichung 74) bestimmt worden ist, kann der Beschleunigungsplan der Bewegung I gebildet werden. Darauf kann man für jedes Glied 1, 2, 3 . . . die gegebenen äußeren Kräfte K mit den gewendeten Kräften mv'_{11} zu ihrer Resultanten $S_1, S_2, S_3, \dots$ zusammensetzen. Für das ruhende Glied 0 besteht die Kraft S_0 nur aus dem Gewichte des Gliedes, das seiner Kleinheit wegen hier vernachlässigt worden ist.

Wir bezeichnen jede Gelenkkraft mit dem Buchstaben des Gelenkes und der Nummer des Gliedes: C_2 bezeichnet demnach die Kraft, die vom Gelenkbolzen C auf das Glied 2 übertragen wird.

Nach dem Prinzip d'Alemberts befindet sich jedes der fünf bewegten Glieder im Gleichgewicht unter Einwirkung der sämtlichen auf das starre Glied wirkenden äußeren Kräfte und der gewendeten Kräfte mv'_1 . Diese Kräftegruppe besteht aus der Kraft S und den auf das Glied übertragenen Gelenkkraften. Die fünf bewegten Glieder stehen also unter Einwirkung der folgenden fünf Gleichgewichtsgruppen:

$$\left. \begin{aligned} 0 &\equiv S_1 \mp B_1 \mp C_1 \\ 0 &\equiv S_2 \mp C_2 \mp D_2 \mp G_2 \\ 0 &\equiv S_3 \mp D_3 \mp E_3 \\ 0 &\equiv S_4 \mp E_4 \mp F_4 \\ 0 &\equiv S_5 \mp F_5 \mp A_5 \mp G_5. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Das ruhende Glied 0 befindet sich ferner im Gleichgewicht unter Einwirkung der Stützkkräfte A , B und der gewendeten Gelenkkräfte A_5 und B_1 , d. h. der Kräfte, die von den Gliedern 5 und 1 auf die Gelenke A und B übertragen werden:

$$0 \equiv A \mp B \mp A_5 \mp B_1. \quad (76)$$

Jede der sechs Gleichgewichtsbedingungen 75) und 76) wird ausgedrückt durch 3 Gleichungen, da die Gleichgewichtsgruppen aus Kräften bestehen, die in einer Ebene liegen und nicht in einem Punkte sich schneiden. Es ergeben sich demnach im vorliegenden Beispiel 18 Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Größen.

Wenn man die Massen der bewegten Gelenkbolzen C, D, E, F, G vernachlässigt, so steht nach dem d'Alembertschen Prinzip jeder dieser Bolzen im Gleichgewicht unter den auf ihn einwirkenden gewendeten Gelenkkraften:

$$\left. \begin{aligned} 0 &\equiv \mp C_1 \mp C_2 \\ 0 &\equiv \mp D_2 \mp D_3 \\ 0 &\equiv \mp E_3 \mp E_4 \\ 0 &\equiv \mp F_4 \mp F_5 \\ 0 &\equiv \mp G_2 \mp G_5. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Diese 5 Gleichgewichtsbedingungen ergeben 10 Gleichungen, weil jede Gleichgewichtsgruppe aus Kräften besteht, die in einer Ebene liegen und in einem Punkte sich schneiden. Die Bedingungen 75), 76) und 77) enthalten 12 Gelenkkräfte, jede mit zwei unbekannten Größen, ihren Projektionen auf zwei Achsen, und die Stützkkräfte A , B mit zusammen drei Unbekannten. Vorhanden

sind demnach 27 Unbekannte, denen 28 Gleichungen gegenüberstehen. Eliminiert man die Unbekannten aus den Gleichungen, so bleibt *eine* Bedingung übrig, die von den Kräften S erfüllt werden muß und in der Tat erfüllt wird; denn diese Bedingung ist identisch mit der Gleichung (64), welche bereits verwendet wurde, um die Kräfte S zu bestimmen. Sie drückt aus, daß das ruhende Getriebe unter Einwirkung der äußeren Kräfte S im Gleichgewicht sich befindet. Die folgende Untersuchung wird zeigen, daß die Berechnung der Gelenkkräfte nicht nur in dem vorliegenden Beispiel, sondern allgemein eine bestimmte Aufgabe ist, abgesehen von besonderen Lagen, den sogenannten Totlagen des Getriebes.

26. Die graphische Bestimmung der Gelenkkräfte bei reibungsloser Bewegung. Durch Anwendung der graphischen Statik kann die Bestimmung der Gelenkkräfte erheblich vereinfacht werden. Wir gehen aus von der Tatsache, daß das *ruhende* Getriebe im Gleichgewichte sich befinden würde unter Einwirkung der gegebenen Kräfte $S_1, S_2, S_3 \dots$, die von den Gliedern 1, 2, 3 ... aufgenommen werden, und den beiden unbekannten Stützkraften A und B . Man bestimmt zunächst diese beiden Stützkraften aus den Gleichgewichtsbedingungen der Gruppe

$$0 \equiv A \pm B \pm S_1 \pm S_2 \pm S_3 \pm S_4 \pm S_5 \quad (78)$$

entweder durch Rechnung oder in bekannter Weise durch die Zeichnung.

Man kann, *ohne das Gleichgewicht des Getriebes zu stören, und ohne die Gelenkkräfte zwischen den Gliedern zu ändern*, jede der Kräfte S durch zwei Kräfte ersetzen, die durch Gelenke des betreffenden Gliedes gehen. Diese Zerlegung:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &\equiv (B_1) \pm (C_1) \\ S_2 &\equiv (C_2) \pm (D_2) \\ S_3 &\equiv (D_3) \pm (E_3) \\ S_4 &\equiv (E_4) \pm (F_4) \\ S_5 &\equiv (F_5) \pm (A_5) \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

wird in den Abb. 74 und 75 dargestellt. Die Punkte H der Kräfte S , an denen die Zerlegung vorgenommen wird, können nach Belieben gewählt werden; die Wahl hat keinen Einfluß auf das Ergebnis der Konstruktion, d. h. auf die Größen der Gelenkkräfte.

Man kann ferner, *ohne das Gleichgewicht des Getriebes zu stören, und ohne die Gelenkkräfte zu ändern*, aus jedem Stabe des Getriebes ein Stück ausschneiden und dasselbe ersetzen durch die

beiden Stabkräfte, die von dem herausgeschnittenen Stück auf die beiden anderen Stabteile übertragen werden. Wir nehmen hierbei an, daß der Stab gewichtslos ist. Die beiden Stabkräfte, z. B. C_d und D_c des Stabes CD , fallen also mit der Stabachse zusammen, sind gleich groß und dem Sinne nach einander entgegengesetzt.

Auf diesem Wege entstehen die Gleichgewichtsgruppen der Gelenke, d. h. Gruppen von Kräften, die in je einem Gelenk sich schneiden:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \equiv B \nmid (B_1) \nmid B_c \nmid B_a \\ 0 \equiv C_b \nmid (C_1) \nmid (C_2) \nmid C_d \nmid C_g \\ 0 \equiv D_c \nmid (D_2) \nmid (D_3) \nmid D_e \nmid D_g \\ 0 \equiv E_d \nmid (E_3) \nmid (E_4) \nmid E_f \\ 0 \equiv F_e \nmid (F_4) \nmid (F_5) \nmid F_a \nmid F_g \\ 0 \equiv G_c \nmid G_d \nmid G_f \nmid G_a \\ 0 \equiv A \nmid A_b \nmid A_g \nmid A_f \nmid (A_5). \end{array} \right\} \quad (80)$$

Die Kräftepolygone B, C, D, E, F, G, A dieser sieben Gleichgewichtsgruppen sind in Abb. 75 gebildet worden. Das Polygon B besteht aus der Stützkraft B , der Gelenklast (B_1) und den beiden Stabkräften B_c und B_a . Nachdem die Stützkraft A, B bestimmt und die Kräfte S zerlegt worden, sind B und (B_1) gegeben. Die beiden Stabkräfte B_c und B_a werden durch das Kräftepolygon B bestimmt. Das Polygon C besteht aus der bekannten Stabkraft

$$C_b \equiv ++ B_c,$$

den beiden gegebenen Gelenklasten $(C_1), (C_2)$ und den beiden durch das Polygon zu bestimmenden Stabkräften C_d und C_g . Das Polygon D besteht aus der bekannten Stabkraft

$$D_c \equiv ++ C_d,$$

den gegebenen Gelenklasten $(D_2), (D_3)$ und den beiden durch das Polygon zu bestimmenden Stabkräften D_e und D_g . Das Polygon E enthält die bekannte Stabkraft

$$E_d \equiv ++ D_e,$$

die beiden gegebenen Gelenklasten $(E_3), (E_4)$ und nur die *eine* unbekannte Stabkraft E_f . Es ergibt sich hier die erste Probe für die Richtigkeit und Genauigkeit der Zeichnung. Wenn bei Bestimmung der Kräfte B, S_1, S_2, S_3, S_4 und beim Auftragen der Kräftepolygone B, C, D keine Fehler vorgekommen sind, so muß die Stabkraft E_f des Kräfteplans zum Stabe EF des Lageplans parallel gerichtet sein. Das Kräftepolygon F besteht aus der bekannten Stabkraft

$$F_e \equiv ++ E_f,$$

den gegebenen Gelenklasten (F_4) , (F_5) und den beiden durch das Polygon zu bestimmenden Stabkräften F_a und F_g . Das Kräftepolygon G enthält die drei bekannten Stabkräfte

$$G_c \equiv ++ C_g, G_d \equiv ++ D_g, G_f \equiv ++ F_g$$

und nur die *eine* unbekannte Stabkraft G_a . Hier ergibt sich die *zweite* Probe: die Stabkraft G_a des Kräfteplans muß zur Stabachse GA des Lageplans parallel gerichtet sein. Das Polygon A endlich besteht aus lauter bekannten und gegebenen Kräften: der Stützkraft A , den Stabkräften

$$A_b = ++ B_a, A_g = ++ G_a, A_f \equiv ++ F_a$$

und der Gelenklast (A_5) .

Nachdem die *Stabkräfte* durch den Kräfteplan, Abb. 75, bestimmt worden sind, können die *Gelenkkräfte* ermittelt werden. Man betrachtet zu diesem Zweck die unter 75) verzeichneten Gleichgewichtsgruppen der Getriebeglieder, schneidet aus jedem Stabe ein Stück heraus und bildet dadurch aus jedem Gliede ebensoviele Gleichgewichtsgruppen, wie das Glied Gelenke hat. Da jede dieser Gruppen nur *eine* unbekannte Kraft, die Gelenkkraft, enthält, so können die Kräftepolygone ohne weiteres in Abb. 75 gebildet werden. Um diese Abbildung nicht mit Linien zu überladen, sind die bezeichneten Kräftepolygone in einer besonderen Abb. 76 zusammengestellt worden. Zur Erklärung mögen folgende Bemerkungen dienen. Das Glied 1 befindet sich im Gleichgewicht unter Einwirkung der gegebenen Gelenklasten (B_1) , (C_1) und der beiden unbekannten Gelenkkräfte B_1 , C_1 , die von den Gelenken B und C auf das Glied 1 übertragen werden. Schneidet man aus dem

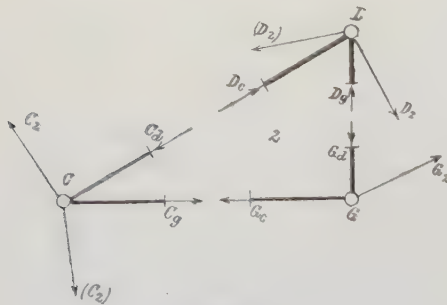


Abb. 77.

Stabe BC ein Stück heraus, so entstehen die beiden Gleichgewichtsgruppen (Abbildung 76)

$$0 \equiv (B_1) \mp B_c \mp B_1$$

$$0 \equiv C_b \mp (C_1) \mp C_1,$$

welche nur die beiden unbekannten Kräfte B_1 und C_1 enthalten.

Das Glied 2 ist im Gleichgewicht unter Einwirkung der zwei gegebenen

Gelenklasten (C_2) , (D_2) und der drei unbekannten Gelenkkräfte C_2 , D_2 , G_2 (Abb. 77). Wird aus jedem der drei Stäbe des

Gliedes ein Stück herausgeschnitten, so entstehen die drei Gleichgewichtsgruppen (Abb. 77)

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (C_2) \mp C_d \mp C_g \mp C_2 \\ 0 &\equiv D_g \mp D_c \mp (D_2) \mp D_2 \\ 0 &\equiv G_c \mp G_d \mp G_2, \end{aligned}$$

wodurch die drei Gelenkkräfte des Gliedes 2: C_2 , D_2 , G_2 bestimmt werden. In gleicher Weise entstehen zur Bestimmung der Gelenkkräfte D_3 , E_3 , F_3 , G_3 , A_3 die Gruppen:

$$\left. \begin{aligned} 0 &\equiv (D_3) \mp D_e \mp D_3 \\ 0 &\equiv E_d \mp (E_3) \mp E_3 \\ 0 &\equiv (E_4) \mp E_f \mp E_4 \\ 0 &\equiv F_e \mp (F_4) \mp F_4 \\ 0 &\equiv (F_5) \mp F_a \mp F_g \mp F_5 \\ 0 &\equiv G_f \mp G_a \mp G_5 \\ 0 &\equiv A_g \mp A_f \mp (A_5) \mp A_5. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Die Abb. 76 enthält die Kräftepolygone aller dieser Gleichgewichtsgruppen.

27. Die inneren Kräfte eines Getriebegliedes. Nach dem Prinzip d'Alemberts befindet sich jeder kleinste Teil eines bewegten Körpers von der Masse m und der Beschleunigung v'_1 im Gleichgewicht unter Einwirkung der von diesem Teile aufzunehmenden äußeren und inneren Kräfte in Verbindung mit der gewendeten Kraft mv'_1 . Um die inneren Kräfte eines Getriebegliedes in einem bestimmten Zeitpunkt der Bewegung zu ermitteln, versetzt man also das Glied in den Ruhezustand, läßt auf dasselbe einwirken: die gegebenen äußeren Kräfte K , zu denen auch die Gelenkkräfte gehören, ferner die gewendeten Kräfte mv'_1 der kleinsten Körperteile und verfährt im übrigen nach den Regeln der Festigkeitslehre.

28. Die Gelenkreibung und ihr Einfluß auf die Beschleunigung des Getriebes. In der Gleichung 74) für die Drehbeschleunigung des geführten Gliedes 1:

$$\omega'_{11} = \omega_{11} \frac{\Sigma R r}{\Sigma m v_1^2}$$

wurde die Arbeitsgeschwindigkeit der Gelenkreibungen vernachlässigt. Jeder Bewegungswiderstand vermindert die kinetische

Energie des Getriebes. Er bewirkt also stets eine Verminderung nicht des algebraischen, sondern des *numerischen* Wertes der Drehgeschwindigkeit ω_{11} des geführten Gliedes. Bezeichnet ΣA die Summe der *positiven* Werte aller Arbeitsgeschwindigkeiten der Bewegungswiderstände, so ist demnach der *berichtigte* Wert der Drehbeschleunigung:

$$(\omega'_{11}) = \omega_{11} \left(\frac{\Sigma Rr - \Sigma A}{\Sigma m v_1^2} \right). \quad (82)$$

Das Gesetz der Reibung ist nur unvollkommen bekannt. Gewöhnlich wird angenommen, daß der Reibungswiderstand das Produkt bildet aus der Gelenkkraft und dem durch Versuche zu ermittelnden Reibungskoeffizienten f . Die Arbeitsgeschwindigkeit des Widerstandes ergibt sich dann durch Multiplikation des Widerstandes mit der relativen Geschwindigkeit der beiden reibenden Flächen. Hierbei kommt ferner in Betracht, ob das Gelenk einfach oder doppelt ist.

Ein *einfaches* Gelenk, z. B. das Gelenk F im Getriebe Abb. 50, verbindet *zwei* Glieder 4 und 5 miteinander. Die beiden Gelenkkräfte sind von derselben positiven Größe

$$F_4 = F_5.$$

Sie erzeugen an der Oberfläche des Gelenkzapfens vom Durchmesser d einen Reibungswiderstand von der positiven Größe fF_4 . Ist die Drehgeschwindigkeit ω_4 des Gliedes 4 *algebraisch* größer als ω_5 , so ist $\frac{1}{2} d (\omega_4 - \omega_5)$ der positive Wert der relativen Geschwindigkeit der beiden reibenden Flächen gegeneinander. Demnach hat die Arbeitsgeschwindigkeit der Reibung für das einfache Gelenk F den positiven Wert:

$$A = \frac{1}{2} f F_4 d (\omega_4 - \omega_5). \quad (83)$$

Ein *Doppelgelenk*, z. B. das Gelenk K in Abb. 50, verbindet *drei* Glieder 6, 7, 9 miteinander. Der Gelenkzapfen ist mit *einem* Gliede starr verbunden, und für die Größe der Reibungsarbeit ist es *nicht* gleichgültig, welches Glied den Zapfen trägt; wir nehmen beispielsweise an, das Glied 7 trage den Zapfen, und algebraisch sei

$$\omega_6 > \omega_9 > \omega_7.$$

Das Doppelgelenk besteht also in diesem Falle aus zwei einfachen Gelenken zwischen den Gliedern 6, 7 und 7, 9. Die Arbeits-

geschwindigkeit hat, wenn K_6 und K_9 die Gelenkkräfte der Glieder 6 und 9 bezeichnen, folglich den positiven Wert:

$$A = \frac{1}{2} f d (K_6 (\omega_6 - \omega_7) + K_9 (\omega_9 - \omega_7)). \quad (84)$$

Gelenke mit mehr als *drei* Gliedern kommen in den gebräuchlichen Getrieben nicht vor und brauchen daher hier nicht berücksichtigt zu werden.

29. Beziehungen zwischen der Anzahl der Glieder eines Getriebes, der Anzahl der Gelenke und der Stäbe. Wir bezeichnen mit e die Anzahl der einfachen Gelenke eines Getriebes, mit d die Anzahl der Doppelgelenke, mit s die Anzahl der Stäbe, mit g die Anzahl der Glieder und nehmen an, daß etwaige Schieberverbindungen nach Anleitung des Abschnittes 5 durch Gelenke ersetzt worden sind.

Um $(e + d)$ Gelenke *starr* miteinander zu verbinden, sind $2(e + d) - 3$ Stäbe erforderlich. Wenn *ein* Stab einer solchen starren Verbindung beseitigt und ein zweiter festgehalten wird, so entsteht ein Getriebe. Daher ist

$$s = 2(e + d) - 4 = 2(e + d - 2). \quad (85)$$

Die Anzahl s der Stäbe ist also stets *gerade*. In dieser Anzahl sind, wie aus den vorstehenden Angaben hervorgeht, auch die Stäbe enthalten, die zur starren Verbindung der *ruhenden* Gelenke erforderlich sind.

In den Betrachtungen des Abschnittes 26 dienten die $2(e + d)$ Gleichgewichtsbedingungen der $(e + d)$ Gelenke dazu, um die $2(e + d) - 4$ Stabkräfte und die 3 Komponenten der Stützkkräfte, zusammen also $2(e + d) - 1$ unbekannte Größen aus den gegebenen Kräften S zu berechnen. Diese Kräfte S waren nicht unabhängig voneinander, sondern mußten die von der Gleichung 64) ausgedrückte Gleichgewichtsbedingung erfüllen, so daß $2(e + d) - 3$ Gleichungen zur Bestimmung der $2(e + d) - 3$ Stabkräfte zur Verfügung standen. Aus den Stabkräften und den bekannten Gelenklasten ergaben sich ohne weiteres die Gelenkkräfte. Es geht hieraus hervor, daß die Berechnung der Gelenkkräfte im allgemeinen, d. h. abgesehen von besonderen Lagen des Getriebes, eine *bestimmte* Aufgabe ist.

Jedes der e einfachen Gelenke nimmt *zwei* und jedes der d Doppelgelenke *drei* Gelenkkräfte auf, und da jede Gelenkkraft *zwei* Unbekannte enthält, etwa die Projektionen auf zwei feste Achsen, so enthalten die Gelenkkräfte $2(2e + 3d)$ unbekannte Größen. Außerdem enthalten die Stützkkräfte *drei* unbekannte Komponenten.

Die Gesamtzahl der Unbekannten ist sonach $4e + 6d + 3$. Zur Bestimmung dieser unbekannten Größen stehen folgende Bedingungen zur Verfügung:

1. Ein jedes Glied befindet sich im Gleichgewicht unter Einwirkung der Kraft S und der vom Gliede aufzunehmenden Gelenkkräfte. Diese Bedingung ergibt für jedes Glied 3, für g Glieder also $3g$ Gleichungen.

2. Jedes Gelenk befindet sich im Gleichgewicht unter Einwirkung der von ihm aufzunehmenden Gelenk- und Stützkkräfte. Da diese Bedingung durch *zwei* Gleichungen ausgedrückt wird, so ergeben sich daraus $2(e + d)$ Gleichungen. Die Gesamtanzahl der Gleichungen beträgt sonach $3g + 2e + 2d$. Wie aber schon dargestellt worden ist, muß eine mit Gleichung 64) identische Bedingung sich ergeben, wenn aus den $3g + 2e + 2d$ Gleichungen die $4e + 6d + 3$ Unbekannten eliminiert werden. Folglich muß

$$(3g + 2e + 2d) - (4e + 6d + 3) = 1$$

oder

$$g = 2 \frac{e + 2d + 2}{3} \quad (86)$$

sein. Die Anzahl der Glieder eines Getriebes mit Einschluß des ruhenden Gliedes ist demnach ebenfalls stets *gerade* und die Zahl $(e + 2d + 2)$ ist teilbar durch 3. Aus den Gleichungen 85) und 86) folgt noch:

$$4e + 6d = s + 3g. \quad (87)$$

Demnach ist $(4e - s)$ teilbar durch 6 und $(s + 3g - 6d)$ teilbar durch 4.

Beispiel 1. Für das Getriebe in Abb. 74 ist

$$e = 7, d = 0, s = 10, g = 6$$

und gemäß den Bedingungen 85), 86) und 87):

$$s = 2(e + d - 2) = 10 = 2 \cdot 7 - 4$$

$$g = 2 \frac{e + 2d + 2}{3} = 6 = 2 \frac{7 + 2}{3}$$

$$4e + 6d = s + 3g = 4 \cdot 7 = 10 + 3 \cdot 6.$$

Beispiel 2. In dem durch Abb. 50 dargestellten Getriebe ist

$$e = 9, d = 2, s = 18, g = 10$$

und in Uebereinstimmung mit den Gleichungen 85) bis 87):

$$s = 2(e + d - 2) = 18 = 2(9 + 2 - 2)$$

$$g = 2 \frac{e + 2d + 2}{3} = 10 = 2 \frac{9 + 4 + 2}{3}$$

$$4e + 6d = s + 3g = 4 \cdot 9 + 6 \cdot 2 = 18 + 3 \cdot 10.$$

30. Literarische Notizen. Der Inhalt der vorstehenden Abhandlung ist folgenden Aufsätzen entnommen:

1. *Die geometrische Konstruktion der Beschleunigungen der ebenen Bewegung einer starren Punktgruppe*; Zivilingenieur 1879, S. 613.
2. *Notiz, betreffend die Konstruktion der Beschleunigungen am Kurbelgetriebe*; Zivilingenieur 1880, S. 75.
3. *Ueber Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne*; Zivilingenieur 1887, S. 631.
4. *Die Trägheitskräfte einer Schubstange*; Zivilingenieur 1895, S. 591.
5. *Beiträge zur Geometrie der Bewegung und zur Kinetik ebener Getriebe*; Zeitschrift für Mathematik und Physik 1903 und 1904. Zusätze sind in den Abschnitten 16, 17 und 18 enthalten.

Eine sehr ausführliche Darstellung der Geschwindigkeiten der Getriebe gibt *Burmester* in seinem *Lehrbuch der Kinematik*, Leipzig 1888. Von den Abhandlungen, welche die Vorarbeiten zu diesem Lehrbuch enthalten, kommt hier hauptsächlich die folgende in Betracht: *Ueber die momentane Bewegung ebener kinematischer Ketten*; Zivilingenieur 1880. Das Verfahren von *Burmester* weicht wesentlich von dem unsrigen ab. Es beruht auf der Verwendung der Geschwindigkeitspole der relativen Bewegungen der Getriebeglieder gegeneinander. Aus der Lage der Pole ergeben sich die Verhältnisse der Drehgeschwindigkeiten der Glieder. Bei der graphischen Bestimmung der Geschwindigkeiten der Gelenke stellt es sich als zweckmäßig heraus, dieselben um 90° zu drehen, also die sogenannten *senkrechten Geschwindigkeiten* darzustellen.

Die wesentlichen Eigenschaften der Geschwindigkeitspole wurden bereits von *Aronhold* in seinen *Grundzügen der kinematischen Geometrie* mitgeteilt; Zeitschrift des Vereins zur Beförderung des Gewerbflusses in Preußen, 1872.

Die in den Abschnitten 2, 7 und 13 abgeleiteten Beziehungen zwischen dem Lageplan einer starren ebenen Punktgruppe, ihrem Geschwindigkeitsplan und den beiden Beschleunigungsplänen:

$$\begin{aligned}PABC \dots &\approx P'A'B'C' \dots \\QABC \dots &\approx Q''A''B''C'' \dots \\RABC \dots &\approx R'''A'''B'''C''' \dots\end{aligned}$$

folgen aus einem Satze von *Schell*, *Theorie der Bewegung und der Kräfte*; Leipzig 1879, Bd. I, S. 564. Sie werden ausdrücklich ausgesprochen von *Mehmke*, *Ueber die Geschwindigkeiten beliebiger*

Ordnung eines in seiner Ebene bewegten ähnlich veränderlichen ebenen Systems; Zivilingenieur 1883, S. 495.

Die im Abschnitt 6 dargelegte Auffassung der Beschleunigung eines Punktes als die Geschwindigkeit des Endpunktes seiner Geschwindigkeitsstrecke findet sich bei Schell S. 462 und, offenbar unabhängig davon, bei Mehmke S. 425.

Die Formeln für die Tangentialbeschleunigung u'' und die Normalbeschleunigung n'' eines Punktes, Gleichungen 40) und 41) des Abschnitts 13, wurden zuerst richtig abgeleitet von *Somoff*, *Mémoire sur les accélérations de divers ordres* in den *Mémoires de l'académie des sciences de St. Petersburg* 1864.

Einige Gegenstände meiner Mitteilungen finden sich, in anderer Form behandelt, ferner in folgenden Arbeiten:

Rittershaus: 1. Ueber die kinematische Kette. 2. Ueber die Beschleunigungen der ebenen Bewegung; Zivilingenieur 1876 und 1877.

Mehmke: Ueber die Bewegung eines starren Systems in seiner Ebene; Zeitschrift für Mathematik und Physik 1890.

Grübler: 1. Ueber die Krümmung der Polbahnen. 2. Ueber die Kreisungspunkte einer kompl. bewegten Ebene; Zeitschrift für Mathematik und Physik 1884, 1889, 1892.

Rodenberg: 1. Die Bestimmung der quadratischen Verwandtschaft der Krümmungsmittelpunkte zweier Glieder einer ebenen kinematischen Kette; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1890. 2. Ueber die Kreispunktkurve eines ebenen Gelenkvierseits; Zeitschrift für Mathematik und Physik 1891. 3. Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten und seine konstruktive Ermittlung; Zivilingenieur 1896.

R. Müller: Ueber die Krümmung der Bahnevoluten im starren ebenen System; Zeitschrift für Mathematik und Physik 1891.

Wittenbauer: 1. Ueber die Wendepole der kinematischen Kette. 2. Ueber den Beschleunigungspol der zusammengesetzten Bewegung. 3. Ueber die Beschleunigungspole der kinematischen Kette; Zeitschrift für Mathematik und Physik 1895. 4. Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten und seine konstruktive Ermittlung; Zivilingenieur 1896.

Hartmann: Ueber die Krümmung der Polbahnen einer Vierzylinderkette; Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1902.

Burmester: Konstruktion der Beschleunigungen bei zusammengesetzten Mechanismen; Sitzungsberichte der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften 1911, S. 463.

Sehr ausführliche Angaben über die Literatur der Kinematik enthält die Abteilung IV, 3 der *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, bearbeitet von *A. Schönflies* und *M. Grübler*.

Von Abhandlungen über die Kinetik der Getriebe nennen wir:

Radinger: Ueber Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit, Wien 1892.

Pröll: Versuch einer graphischen Dynamik, Leipzig 1874.

Heun: Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik; Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 1901. Diese Abhandlung enthält weitere Literaturangaben.

Abhandlung V.

Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenzen und den Bruch eines Materials?

Der entwerfende Ingenieur hat in der Regel die Aufgabe, allen Teilen seines Bauwerkes eine möglichst gleichmäßige Sicherheit gegen Zerstörung und schädliche Formänderungen zu geben. Zu den wichtigsten Grundlagen der Festigkeitslehre gehört daher die Kenntnis der Umstände, von welchen die Elastizitätsgrenzen und die Bruchgrenzen der Baustoffe abhängig sind. Unzählige Versuche wurden angestellt, um diese Grenzen kennen zu lernen, aber zu einwandfreien Ergebnissen ist man bis heute nicht gelangt. Es hat dies seinen Grund hauptsächlich darin, daß es mit großen Schwierigkeiten verbunden ist, bestimmte und beabsichtigte Spannungszustände oder Formänderungszustände der kleinsten Körperteile durch den Versuch hervorzurufen. Man ist daher in den meisten Fällen im unklaren darüber, welcher Zustand des Körpers den Bruch oder die Ueberschreitung der Elastizitätsgrenze herbeiführte. Vielleicht wird es in Zukunft gelingen, die bezeichneten Schwierigkeiten durch vollkommenere Versuchsanordnungen zu überwinden; bis dahin wird man genötigt sein, den bisherigen Weg zu verfolgen und Annahmen zu suchen, die imstande sind, eine möglichst große Anzahl zuverlässiger Ergebnisse zu erklären.

Die älteren Hypothesen stammen aus einer Zeit, in der nur wenige und unsichere Erfahrungen vorlagen. Sie weichen stark voneinander ab, und keine von ihnen läßt sich den neueren Erfahrungen gegenüber aufrecht erhalten. Das Bedürfnis nach einer neuen Annahme, die sich dem jetzigen Stande der Erfahrung möglichst anschließt, kann daher nicht in Zweifel gestellt werden. Die nachfolgende Abhandlung enthält einen Versuch.

1. Der Spannungszustand eines Körperpunktes. Wir bezeichnen mit A einen Punkt des Körpers, dessen Zustand in Be-

tracht gezogen werden soll, und denken uns zu diesem Zweck eine unendlich kleine Kugel vom Mittelpunkt A aus dem Körper herausgeschnitten. Die Gesamtheit der Spannungen aller Oberflächenelemente dieser Kugel, die in unendlicher Vergrößerung in Abb. 1 dargestellt ist, bildet den *Spannungszustand des Körperpunktes A* . Ein Oberflächenelement kann durch seinen Halbmesser bestimmt und bezeichnet werden. Die Fläche r ist daher im folgenden die abgekürzte Bezeichnung für eine unendlich kleine ebene Fläche, die im Endpunkte des Halbmessers r die Kugel A berührt. Den folgenden Gleichgewichtsbetrachtungen liegt nur die eine Voraussetzung zugrunde, daß die Spannungen im Körper stetig sich ändern, daß also die Spannungen ϱ der beiden Oberflächenelemente, die zu einem Kugeldurchmesser gehören, nach Größe und Richtung verschwindend wenig voneinander abweichen.

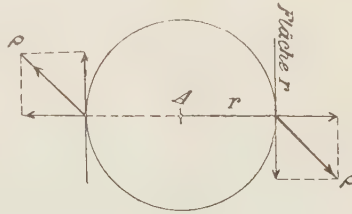


Abb. 1.

2. Die Beziehung zwischen den Spannungen ϱ_1 , ϱ_2 zweier Flächen r_1 , r_2 . Wir begrenzen in Abb. 2 ein unendlich kleines Prisma durch drei Paare von Ebenen, welche die Kugel A berühren und rechtwinklig zu den Halbmessern r_1 , r_2 , r_3 gestellt sind; r_1 und r_2 liegen in der Bildebene, r_3 steht rechtwinklig zu derselben. Die sechs Seitenflächen des Prismas sind von gleicher Größe, die hier gleich eins gesetzt wird. Das Gewicht des Prismas ist von unendlich kleiner Größe dritter Ordnung und verschwindet also gegen die Kräfte ϱ_1 , ϱ_2 , ϱ_3 , die von den Seitenflächen aufgenommen werden und von unendlich kleiner Größe zweiter Ordnung sind. Von den Gleichgewichtsbedingungen des Prismas kommt hier nur die Momentengleichung in bezug auf den Halbmesser r_3 , der die Bildebene im Punkte A rechtwinklig schneidet, in Betracht. Die

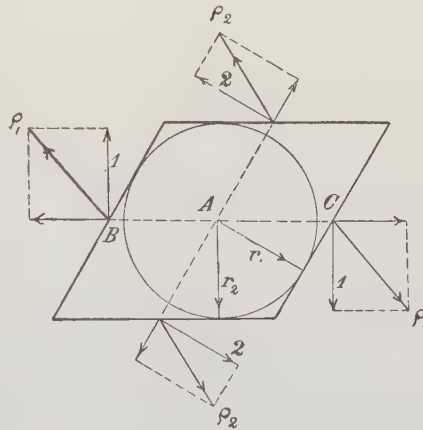


Abb. 2.

beiden Kräfte q_3 werden von der Momentenachse geschnitten und haben also Momente gleich null. Wenn die Strecke BC gleich eins gesetzt wird, so haben die beiden Kräfte q_1 das Moment $q_1 \cos(q_1 r_2)$, während das Moment der beiden Kräfte q_2 die Größe $q_2 \cos(q_2 r_1)$ hat. Das Gleichgewicht fordert, daß die beiden Momente der Größe nach gleich, dem Sinne nach einander entgegengesetzt sind, oder daß die Projektion der Spannung q_1 auf den Halbmesser r_2 nach Größe und Vorzeichen gleich ist der Projektion der Spannung q_2 auf den Halbmesser r_1 :

$$q_1 \cos(q_1 r_2) = q_2 \cos(q_2 r_1). \quad (1)$$

Diese Beziehung zwischen je zwei Oberflächenelementen r_1, r_2 bildet die Grundlage der folgenden Betrachtungen.

Wir geben derselben zunächst eine für die meisten Anwendungen bequemere Form und zerlegen zu dem Zweck jede der Spannungen

q_1, q_2 in drei Komponenten: die Normalspannung und zwei Schubspannungskomponenten, von denen eine in die Bildfläche fällt, während die andere zur Bildfläche rechtwinklig gerichtet ist. Die zuletztgenannten Schubspannungskomponenten kommen hier nicht in Betracht, weil ihre Projektionen auf die Kugelhalbmesser r_1, r_2 gleich null sind. Die Normalspannungen σ_1, σ_2 erhalten das

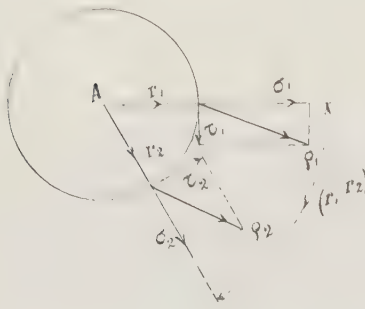


Abb. 3.

positive Vorzeichen, wenn sie *Zugspannungen* bezeichnen. Die in die Bildfläche fallenden Schubspannungen τ_1, τ_2 sollen das positive Vorzeichen erhalten, wenn sie die Kugel *im Sinne der Uhrzeigerbewegung* zu drehen suchen. Im vorliegenden Beispiel (Abb. 3) sind also die Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1$ positiv, während τ_2 negativ ist. Mit $(r_1 r_2)$ bezeichnen wir ferner den Winkel, den ein Zeiger im Sinne der Uhrzeigerbewegung zu durchlaufen hat, um von r_1 nach r_2 zu gelangen. Bildet man nun die Gleichung 1), indem man die Spannungen σ_1, τ_1 auf den Halbmesser r_2 und die Spannungen σ_2, τ_2 auf den Halbmesser r_1 projiziert und *hierbei den Sinn der Halbmesser berücksichtigt*, so nimmt die Bedingung folgende Form an:

$$\sigma_1 \cos(r_1 r_2) + \tau_1 \sin(r_1 r_2) = \sigma_2 \cos(r_1 r_2) - \tau_2 \sin(r_1 r_2) \quad (2)$$

oder

$$\sigma_2 - \sigma_1 = (\tau_1 + \tau_2) \operatorname{tg}(r_1 r_2). \quad (3)$$

Die beiden nächstliegenden und wichtigsten Anwendungen dieser Gleichung ergeben sich in den besonderen Fällen, wenn die beiden Halbmesser einen rechten Winkel bilden, und wenn der Winkel $(r_1 r_2)$ unendlich klein ist. Im ersten Falle wird

$$\tau_1 = -\tau_2, \quad (4)$$

weil $\operatorname{tg} (r_1, r_2)$ unendlich groß ist. Die beiden in die Bildfläche fallenden Schubspannungskomponenten sind also in diesem Falle von gleicher Größe, dem Drehsinn nach aber einander entgegengesetzt.

Im zweiten Falle bezeichnen wir (Abb. 4) die Winkel, die ein Halbmesser im Sinne der Uhrzeigerbewegung durchlaufen muß, um von einem gegebenen festen Halbmesser r_0 nach r_1 und r_2 zu gelangen, mit φ und $\varphi + d\varphi$, ferner die Spannungskomponenten der Fläche r_1 mit σ, τ und diejenigen der Fläche r_2 mit $\sigma + d\sigma$ und $\tau + d\tau$. Die Bedingung nimmt alsdann die Form an:

$$d\sigma = 2\tau d\varphi. \quad (5)$$

Die Normalspannung σ wächst also von r_1 nach r_2 in positivem oder in negativem Sinne, je nachdem τ einen positiven oder einen negativen Wert hat.

Es ist ferner der besondere Fall zu erwähnen, in welchem die Spannung σ_1 zum Kugelhalbmesser r_2 *rechtwinklig* gerichtet, ihre Projektion auf r_2 also gleich null ist. Die Gleichung 1) fordert dann, daß auch die Spannung σ_2 zum Halbmesser r_1 rechtwinklig gerichtet sein muß. Zwei solche Oberflächenelemente r_1, r_2 nennt man *konjugierte* Flächen, weil eine dieser beiden Flächen durch die andere bestimmt wird. Da nach Gleichung 2):

$$\sigma_1 \cos (r_1 r_2) + \tau_1 \sin (r_1 r_2) = 0$$

und

$$\sigma_2 \cos (r_1 r_2) - \tau_2 \sin (r_1 r_2) = 0$$

ist, so besteht für zwei konjugierte Flächen r_1, r_2 die Bedingung:

$$\frac{\sigma_1}{\tau_1} = -\frac{\sigma_2}{\tau_2} = -\operatorname{tg} (r_1 r_2) = \operatorname{tg} (r_2 r_1). \quad (6)$$

3. Die Hauptspannungen des Körperpunktes A. Wir bezeichnen mit x und z die beiden Durchmesser der Kugel A, in deren Oberflächenelementen die Normalspannung σ ihr algebraisches

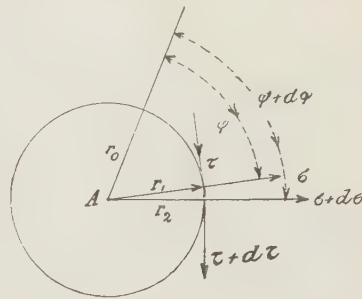


Abb. 4.

Minimum σ_x und ihr Maximum σ_z erreicht. Zuzufolge Gleichung 5) sind die Schubspannungen dieser Flächen gleich null, und Gleichung 3) fordert, daß sich die Durchmesser x, z *rechtwinklig* schneiden. Wir bezeichnen ferner mit y den zur Ebene x, z senkrechten Kugeldurchmesser und folgern aus Gleichung 4), daß auch die beiden Oberflächenelemente y keine Schubspannungen aufnehmen. x, y und z heißen die *Hauptachsen* des Körperpunktes A , ferner xy, xz, yz die *Hauptebenen* und $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ die *Hauptspannungen*. Es ist hervorzuheben, daß nach der hier eingeführten Bezeichnung algebraisch stets

$$\sigma_x < \sigma_y < \sigma_z$$

ist, während der numerische Wert von σ_x selbstverständlich auch größer sein kann als σ_z . Es empfiehlt sich, je einem der mit den Hauptachsen zusammenfallenden beiden Kugelhalbmesser das positive, dem anderen das negative Vorzeichen beizulegen. Die positiven Halbmesser bezeichnen wir mit r_x, r_y, r_z .

4. Die Bestimmung des Spannungszustandes eines Körperpunktes A durch seine Hauptspannungen. Zwischen der Spannung q irgend eines Oberflächenelementes r der Kugel A und den Hauptspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ bestehen nach Gleichung 1) die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} q \cos(qr_x) &= \sigma_x \cos(rr_x) \\ q \cos(qr_y) &= \sigma_y \cos(rr_y) \\ q \cos(qr_z) &= \sigma_z \cos(rr_z) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

woraus folgt:

$$q^2 = \sigma_x^2 \cos^2(rr_x) + \sigma_y^2 \cos^2(rr_y) + \sigma_z^2 \cos^2(rr_z). \quad (8)$$

Ferner wird die Normalspannung σ der Fläche r durch die Gleichung:

$$\sigma = q \cos(qr) = q \left\{ \begin{aligned} &\cos(qr_x) \cos(rr_x) + \cos(qr_y) \cos(rr_y) \\ &+ \cos(qr_z) \cos(rr_z) \end{aligned} \right\}$$

bestimmt, die in Verbindung mit den Gleichungen 7) zu der Beziehung führt:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2(rr_x) + \sigma_y \cos^2(rr_y) + \sigma_z \cos^2(rr_z). \quad (9)$$

Endlich ergibt sich die Schubspannung τ der Fläche r aus der Gleichung

$$\tau^2 = q^2 - \sigma^2. \quad (10)$$

Die vorstehenden Gleichungen lassen erkennen, daß sich die Spannungen der Oberflächenelemente zu jeder der drei Hauptebenen der Kugel *symmetrisch* verteilen: Die Spannungen q_1, q_2 zweier Flächen r_1, r_2 , die zu einer Hauptebene symmetrisch liegen, sind also nach Größe und Sinn einander gleich und schneiden sich in

einem Punkte der Symmetrieebene. Die Spannung ρ der Fläche r bestimmt demnach zugleich die Spannungen von sieben anderen, auf den übrigen Oktanten der Kugel symmetrisch belegenen Oberflächenelemente.

5. Die Spannungen der in einer Hauptebene liegenden Oberflächenelemente der Kugel A . In vielen Fällen kommen nur die Spannungen der Flächen r in Betracht, welche die Kugel in einer Hauptebene, z. B. in der Ebene xz , berühren. Alle diese Flächen sind der Fläche r_y konjugiert, weil die Spannung σ_y zu den Halbmessern r der xz -Ebene rechtwinklig gerichtet ist. Daher liegen die Spannungen σ, τ aller dieser Flächen r in der xz -Ebene. Ihre Größen ergeben sich aus den Gleichungen 9) und 3):

$$\sigma = \sigma_x \sin^2 (rr_z) + \sigma_z \cos^2 (rr_z)$$

$$\tau = \frac{\sigma - \sigma_x}{\cotg (rr_z)} = \frac{\sigma_z - \sigma}{\tg (rr_z)},$$

woraus folgt:

$$\sigma = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cos 2 (rr_z) \quad (11)$$

$$\tau = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \sin 2 (rr_z). \quad (12)$$

Diese Beziehungen können zur Anschauung gebracht werden, indem man jeder Fläche r in der graphischen Darstellung (Abb. 5) einen Punkt R zuordnet, dessen rechtwinklige Koordinaten in einem willkürlich gewählten Maßstabe nach Größe und Vorzeichen die Spannungskomponenten σ und τ der Fläche r angeben. In Abb. 5 ist O der Anfangspunkt der Koordinaten σ, τ ; die wagerechte σ -Achse zeigt nach rechts, die lotrechte τ -Achse zeigt nach oben. Die den beiden Hauptflächen r_x, r_z zugeordneten Punkte X, Z sind durch ihre Koordinaten

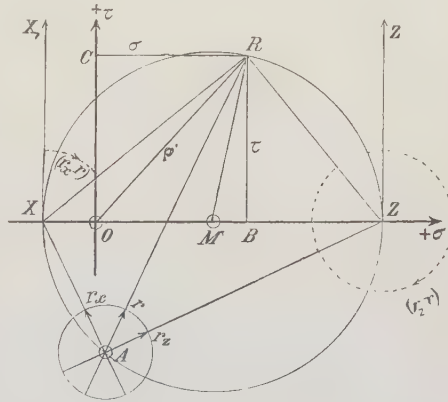


Abb. 5.

$$OX = \sigma_x, \quad \tau_x = 0, \quad OZ = \sigma_z, \quad \tau_z = 0$$

Auf dem Kreise vom Durchmesser XZ wird der Punkt A bestimmt durch eine der beiden Geraden

$$XA \parallel r_x, \quad ZA \parallel r_z.$$

Die beiden *positiven* Halbmesser r_x, r_z der Kugel A erhalten den Sinn AX, AZ . Der erste Pol Q wird durch den Durchmesser AMQ und der zweite Pol P durch die Tangente DP oder durch die Bedingung:

$$\frac{PX}{PZ} = \frac{XO}{OZ}$$

bestimmt. Für jeden Halbmesser r des xz -Kreises der Kugel A , dessen Richtung durch die Sehne AR gegeben ist, bestimmt:

QR die Stellung der Fläche r ,

CR Größe und Vorzeichen der Normalspannung σ ,

BR Größe und Vorzeichen der Schubspannung τ ,

OR die Größe der Spannung ϱ ,

QR_1 die Richtung der Spannung ϱ .

6. Die vollständige graphische Darstellung des Spannungszustandes eines Körperpunktes. Die Spannungen *aller* Oberflächenelemente der Kugel A können in ähnlicher Weise auf

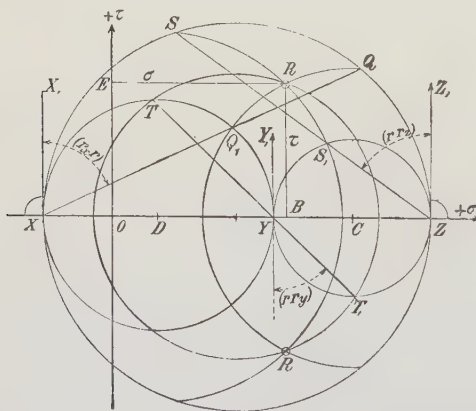


Abb. 8.

geometrischem Wege bestimmt und graphisch dargestellt werden, wie es im vorigen Abschnitt für die Flächen des xz -Kreises beschrieben worden ist. In Abb. 8 bezeichnen die Strecken OX, OY, OZ Größe und Sinn der Hauptspannungen des Körperpunktes A ; die Punkte der Kreise XY, XZ, YZ bestimmen also in der beschriebenen Weise die Spannungen der Flächen, welche

die Kugellkreise xy, xz, yz berühren. Um für irgend ein anderes Oberflächenelement r der Kugel A die Spannungen σ, τ auf geometrischem Wege zu bestimmen, trägt man in Abb. 8 wie in Abb. 5 die Winkel $X_1 X Q$ und $Z_1 Z S$ gleich den gegebenen Winkeln $(r_x r)$ und $(r_z r)$ auf. Die zu den Kreisen YZ und XY konzentrischen

Kreise QQ_1 und SS_1 schneiden sich in dem Punkte R , dessen Koordinaten die Spannungen σ und τ der Fläche r darstellen. Man kann zur Probe noch einen dritten zu XZ konzentrischen Kreis TT_1 auftragen, dessen Punkte T , T_1 durch den Winkel

$$Y_1 I T = (rr_y)$$

bestimmt sind. Auch dieser Kreis muß durch den Punkt R gehen. Die beschriebene Konstruktion beruht auf der folgenden Eigenschaft der graphischen Darstellung: *Allen Oberflächenelementen r der Kugel A , welche auf einer zu einer der Hauptebenen, z. B. yz , parallel gestellten Ebene liegen, entsprechen in der graphischen Darstellung Punkte R eines zu YZ konzentrischen Kreises.* Diese Eigenschaft ergibt sich aus der folgenden Ueberlegung. Der Punkt R von den Koordinaten σ , τ hat von dem Mittelpunkt C des Kreises YZ eine Entfernung, die durch die Gleichung

$$\overline{CR}^2 = r^2 + \left(\frac{(\sigma_z + \sigma_y)}{2} - \sigma \right)^2 = \varrho^2 + \frac{(\sigma_z + \sigma_y)^2}{4} - \sigma(\sigma_z + \sigma_y)$$

bestimmt wird. Setzt man in diese Gleichung die Werte von ϱ^2 und σ aus den Gleichungen 8) und 9) ein und beachtet, daß

$$\cos^2(rr_x) + \cos^2(rr_y) + \cos^2(rr_z) = 1$$

ist, so erhält man:

$$\overline{CR}^2 = \frac{1}{4} (\sigma_z - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_x) (\sigma_z - \sigma_x) \cos^2(rr_x).$$

Die Länge CR ist demnach *unabhängig* von den Winkeln (rr_y) und (rr_z) und hat für einen gegebenen Winkel (rr_x) , also für alle Oberflächenelemente des entsprechenden Kugelkreises, eine *unveränderliche* Größe, die durch die Längen CQ und CQ_1 bestimmt ist; denn Q ist der Punkt auf dem XZ -Kreise, der dem Winkel (rr_x) entspricht.

Die beiden Kreise von den Halbmessern CQ und DS schneiden sich in *zwei* zur σ -Achse symmetrisch liegenden Punkten R . Es entspricht dies dem Umstande, daß durch die drei Winkel (rr_x) , (rr_y) , (rr_z) auf der Kugel *acht* Oberflächenelemente bestimmt werden, die in oben beschriebener Weise nur durch den Sinn ihrer *Schubspannungen* sich voneinander unterscheiden. Da die Summe der beiden spitzen Winkel $(r_x r)$ und $(r_z r)$ größer oder mindestens gleich 90° ist, so bedecken die Punkte R die von den Kreisen XY , XZ , YZ eingeschlossenen Bogendreiecke. Indem man für eine Reihe von eingeschriebenen Werten der Winkel $(r_x r)$ und $(r_z r)$ die Kreisbogen QQ_1 und SS_1 aufträgt, ergibt sich in Abb. 9 eine Uebersicht über den Spannungszustand des Punktes A . Es ist daran zu er-

innern, daß in der Geometrie der Massen eine graphische Darstellung genau von der Form der Abb. 9 vorkommt (vergl. Abhandlung III, 16).

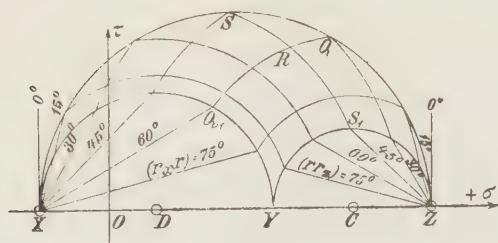


Abb. 9.

Der Kreis XZ enthält nicht allein die Punkte, in welchen σ und τ ihre Größtwerte erreichen, sondern auch alle Punkte, in denen bei konstanter Abszisse σ die Ordinaten τ ihre Größtwerte annehmen. Da diese Punkte hauptsächlich in Betracht kommen, so wird

im folgenden XZ der *Hauptkreis* der graphischen Darstellung des Spannungszustandes genannt.

7. Die graphische Darstellung der Formänderung eines isotropen Körpers innerhalb der Elastizitätsgrenzen. Wenn die Elastizitätseigenschaften des Materials nach allen Richtungen einander gleichen, so werden sie innerhalb der Elastizitätsgrenzen bestimmt durch *zwei* konstante Größen: den Elastizitätsmodul ε und die Poissonsche Zahl m . Die Kanten eines unendlich kleinen Würfels A von den Richtungen der Hauptspannungen dieses Körperelements und der ursprünglichen Länge *eins* erleiden durch jene Spannungen keine Richtungsänderungen, dagegen Längenänderungen von den Größen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x - m(\sigma_y + \sigma_z)}{\varepsilon} &= \frac{\sigma'_x}{\varepsilon} \\ \frac{\sigma_y - m(\sigma_z + \sigma_x)}{\varepsilon} &= \frac{\sigma'_y}{\varepsilon} \\ \frac{\sigma_z - m(\sigma_x + \sigma_y)}{\varepsilon} &= \frac{\sigma'_z}{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Man nennt σ'_x , σ'_y , σ'_z die *reduzierten* Hauptspannungen des Körperpunktes A .

Die Koordinaten des Oberflächenelements r der Kugel A , deren unendlich kleiner Halbmesser gleich *eins* gesetzt werden möge, haben in bezug auf die Hauptachsen im spannungslosen Zustande der Kugel die Größen

$$\cos(rr_x), \cos(rr_y), \cos(rr_z),$$

und diese verwandeln sich durch die elastische Formänderung in die Größen:

$$\cos (r r_x) \left(1 + \frac{\sigma'_x}{\varepsilon}\right), \cos (r r_y) \left(1 + \frac{\sigma'_y}{\varepsilon}\right), \cos (r r_z) \left(1 + \frac{\sigma'_z}{\varepsilon}\right).$$

Bezeichnet man mit $\frac{\varrho'}{\varepsilon}$ den Deformationsweg des Oberflächenelements r , so ist demnach:

$$\left. \begin{aligned} \varrho' \cos (\varrho' r_x) &= \sigma'_x \cos (r r_x) \\ \varrho' \cos (\varrho' r_y) &= \sigma'_y \cos (r r_y) \\ \varrho' \cos (\varrho' r_z) &= \sigma'_z \cos (r r_z). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Man nennt ϱ' die *reduzierte* Spannung des Oberflächenelements r und erkennt aus der Uebereinstimmung der Gleichungen 14) und 7), daß zwischen den *reduzierten* Spannungen ϱ' , σ'_x , σ'_y , σ'_z genau dieselben Beziehungen bestehen, wie zwischen den wirklichen Spannungen ϱ , σ_x , σ_y , σ_z . Es kann daher die oben beschriebene graphische Darstellung ohne weiteres auch auf die reduzierten Spannungen angewandt werden. Die reduzierte Spannung ϱ' kann zerlegt werden in die *Normal*komponente

$$\varrho' \cos (\varrho' r) = \sigma'$$

und in die *Schub*komponente

$$\varrho' \sin (\varrho' r) = \tau'.$$

Die Größe $\frac{\sigma'}{\varepsilon}$ bezeichnet die *Dehnung* des Radius r , während

die Größe $\frac{\tau'}{\varepsilon}$ die *Schiebung* des Oberflächenelements r in der Richtung der Kugeltangente angibt.

Die Anwendung der vorstehenden Beziehungen ist großen Beschränkungen unterworfen. Die Gleichungen 13) gelten nur innerhalb der Elastizitätsgrenzen, und diese Grenzen sind für manche Baustoffe, z. B. Steine und Gußeisen, so eng, daß für solche Stoffe jene Beziehungen ihre praktische Bedeutung fast ganz verlieren. Jenseits der Elastizitätsgrenzen sind die Größen ε und m veränderlich, und das Gesetz der Aenderungen ist nur sehr unvollkommen bekannt. Nur soviel ist bekannt, daß selbst von einer annähernden Gültigkeit jener Gleichungen, wenigstens in der Nähe der Bruchgrenze, nicht die Rede sein kann.

8. Die älteren Hypothesen über die Ursachen der Elastizitätsgrenzen und des Bruches. Im folgenden ist wiederholt von einer Reihe von Spannungszuständen die Rede, die der kürzeren Bezeichnung wegen numeriert werden sollen. Die Zu-

stände I bis III liegen an der *Bruchgrenze* und können durch ihre Hauptspannungen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\text{I: } \sigma_x &= 0, & \sigma_y &= 0, & \sigma_z &= +\kappa_1 \\ \text{II: } \sigma_x &= -\kappa_2, & \sigma_y &= 0, & \sigma_z &= 0 \\ \text{III: } \sigma_x &= -\kappa_3, & \sigma_y &= 0, & \sigma_z &= +\kappa_3.\end{aligned}$$

Man nennt κ_1 die *Zugfestigkeit*, κ_2 die *Druckfestigkeit* und κ_3 die *Drehungsfestigkeit* des Materials. Der ebenfalls an der Bruchgrenze liegende Spannungszustand IV ist dadurch bestimmt, daß die Schubspannung desjenigen Oberflächenelements, dessen Normalspannung gleich null ist, seinen größtmöglichen Wert κ_4 erreicht. Man nennt κ_4 die *Schubfestigkeit* des Materials. Die Spannungszustände V, VI und VII berühren die *Elastizitätsgrenzen* des Materials und können wiederum durch ihre Hauptspannungen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\text{V: } \sigma_x &= 0, & \sigma_y &= 0, & \sigma_z &= +\kappa_5 \\ \text{VI: } \sigma_x &= -\kappa_6, & \sigma_y &= 0, & \sigma_z &= 0 \\ \text{VII: } \sigma_x &= -\kappa_7, & \sigma_y &= 0, & \sigma_z &= +\kappa_7.\end{aligned}$$

Man nennt κ_5 die Elastizitätsgrenze der *Zugspannungen*, κ_6 die Elastizitätsgrenze der *Druckspannungen* und κ_7 die Elastizitätsgrenze der *Drehungsspannungen*. Die folgenden Bemerkungen sollen nur die wichtigsten Punkte hervorheben, in welchen die älteren Annahmen mit der Erfahrung in Widerspruch sich befinden.

Erste Hypothese. Die ältesten Versuche bezogen sich auf die Bestimmung der Zugfestigkeit κ_1 und der Druckfestigkeit κ_2 , und hieran knüpfte sich die nächstliegende Annahme, daß diese Grenzen auch für alle anderen Spannungszustände gültig seien. Nach dieser Annahme kann die Bruchgrenze dargestellt werden durch zwei zur τ -Achse parallel gerichtete gerade Linien $B_1 C_1$, $B_2 C_2$ (Abb. 10), deren Abszissen die Größen

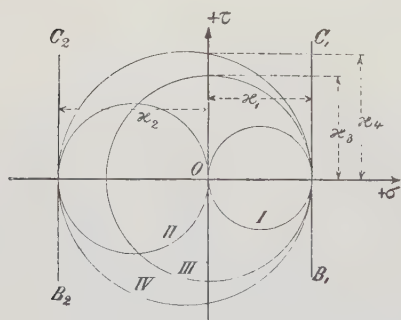


Abb. 10.

$\sigma = +\kappa_1$ und $\sigma = -\kappa_2$ haben. Die Hauptkreise der Spannungszustände I, II, III, IV

erhalten die in Abb. 10 angegebenen Lagen. Demnach wäre die Drehungsfestigkeit κ_3 gleich dem numerisch kleineren Werte der

beiden Spannungen κ_1 und κ_2 , in dem Beispiel der Abb. 10 also gleich κ_1 , und die Schubfestigkeit κ_4 würde die Größe

$$\kappa_4 = \sqrt{\kappa_1 \kappa_2}$$

annehmen. Diese einfachen Beziehungen werden durch die Erfahrung keineswegs bestätigt. Auch widerspricht die Tatsache, daß die Hauptspannung σ_x die Grenze $-\kappa_2$ weit überschreiten kann, wenn die beiden anderen Hauptspannungen σ_y und σ_z *negative* Werte annehmen, wie es z. B. in tiefliegenden Gebirgsschichten ohne Zweifel der Fall ist.

Zweite Hypothese. Da die Elastizitätsgrenzen Formänderungszustände bezeichnen, nämlich diejenigen Zustände, bei deren Ueberschreitung *bleibende* Formänderungen eintreten, so lag die Annahme nahe, daß für diese Zustände nicht *Grenzspannungen*, sondern *Grenzdehnungen* maßgebend seien. Man nahm demgemäß an, die Elastizitätsgrenze eines isotropen Körpers werde jedesmal überschritten bei einem bestimmten, von der Materialbeschaffenheit abhängigen *Grenzwerte der positiven Dehnung*. Da für alle isotropen Stoffe nahezu übereinstimmend

$$m = \frac{1}{4}$$

ist, so wird für jeden durch seine Hauptspannungen gegebenen Zustand die größte positive Dehnung durch die Zahl

$$\frac{\sigma_z - \frac{1}{4}(\sigma_y + \sigma_x)}{\varepsilon} = \frac{4\sigma_z - \sigma_y - \sigma_x}{4\varepsilon} \quad (15)$$

bestimmt. Für die an der Elastizitätsgrenze liegenden Spannungszustände V, VI, VII nimmt diese Zahl die Werte an:

$$\frac{\kappa_5}{\varepsilon}, \quad \frac{\kappa_6}{4\varepsilon}, \quad \frac{5\kappa_7}{4\varepsilon}.$$

Wenn der Hypothese gemäß diese drei Dehnungen gleich groß wären, so müßte sich für jedes gleichartige Material das Verhältnis

$$\kappa_5 : \kappa_6 : \kappa_7 = 1 : 4 : 0,8$$

ergeben. Die Erfahrung bestätigt weder die Unveränderlichkeit dieser Verhältniszahlen, noch deren Größen. Die zuverlässigsten Ergebnisse, die hier zum Vergleich herangezogen werden können, verdanken wir *Bauschinger*, der mit einer Reihe von Stahl- und Flußeisensorten vergleichende Versuche zur Bestimmung der Grenzwerte

$\kappa_5, \kappa_6, \kappa_7$ angestellt hat. Die unten ausführlicher mitgeteilten Ergebnisse zeigen, daß für jene Materialien nahezu

$$\kappa_5 : \kappa_6 : \kappa_7 = 1 : 1 : 0,5$$

ist, daß also die Verhältniszahlen auch nicht annähernd die aus der Hypothese sich ergebenden Werte haben.

Man hat sich noch weiter von der Wirklichkeit entfernt, indem man die obigen, auf die Elastizitätsgrenzen, also auf elastische Formänderungen sich beziehenden Folgerungen ohne weiteres auf die Zustände an der Bruchgrenze übertrug. Auf solche Weise ist z. B. die unhaltbare Behauptung entstanden, die Drehungsfestigkeit κ_3 betrage für jedes isotrope Material das 0,8-fache der Zugfestigkeit κ_1 . Ebenso wenig läßt sich die oft ausgesprochene Behauptung, beim

Druckversuch werde der Bruch durch die positive Querdehnung herbeigeführt, durch irgend eine bestimmte Erfahrungstatsache begründen.

Man kann den Inhalt der Hypothese vermittle unserer graphischen Darstellung veranschaulichen, indem man für die beiden Grenzfälle

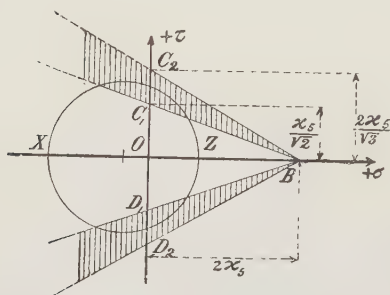


Abb. 11.

$$\sigma_y = \sigma_x \quad \text{und} \quad \sigma_y = \sigma_z$$

die Gesamtheit der Hauptkreise

der an der Elastizitätsgrenze liegenden Spannungszustände in Betracht zieht. Im ersten Grenzfalle hat die größte positive Dehnung nach Gleichung 15) den konstanten Wert

$$\frac{\kappa_5}{\varepsilon} = \frac{2 \sigma_z - \sigma_x}{2 \varepsilon}.$$

Die zugehörigen Hauptkreise, deren Durchmesser XZ die Bedingung

$$\sigma_x = 2 \sigma_z - 2 \kappa_5$$

erfüllen, berühren zwei Gerade BC_1, BD_1 , welche auf den Koordinatenachsen die Strecken

$$OB = 2 \kappa_5 \quad \text{und} \quad OC_1 = OD_1 = \frac{\kappa_5}{\sqrt{2}}$$

abschneiden (Abb. 11).

Im zweiten Grenzfalle hat die größte positive Dehnung nach Gleichung 15) die konstante Größe

$$\frac{\kappa_5}{\varepsilon} = \frac{3 \sigma_z - \sigma_x}{4 \varepsilon};$$

die Hauptkreise dieser Spannungszustände berühren die beiden Geraden BC_2 , BD_2 , die auf der τ -Achse die Strecken

$$OC_2 = OD_2 = \frac{2\kappa_5}{\sqrt{3}}$$

abschneiden. In jedem Zwischenfalle, wenn also

$$\sigma_x < \sigma_y < \sigma_z$$

ist, schneidet der einen Spannungszustand an der Elastizitätsgrenze darstellende Hauptkreis XZ (Abb. 11) die Schenkel des Winkels C_1BD_1 , liegt aber innerhalb des Winkels C_2BD_2 .

Die Abweichungen von den Erfahrungstatsachen konnten ermäßigt werden, indem man die Bedingung hinzufügte, daß auch die größte *negative* Dehnung einen durch Versuche zu bestimmten Grenzwert $-\frac{\kappa_6}{\varepsilon}$ nicht überschreiten dürfe. Man nahm also an, daß für jeden an der Elastizitätsgrenze liegenden Spannungszustand entweder

$$\sigma_z - \frac{1}{4}(\sigma_y + \sigma_x) = \kappa_5,$$

oder

$$\sigma_x - \frac{1}{4}(\sigma_y + \sigma_z) = -\kappa_6$$

sein müsse. Um diese Annahme in der Zeichensprache der graphischen Darstellung auszudrücken, ist in Abb. 12:

$$\begin{aligned} OB &= 2\kappa_5, & OC_1 = OD_1 &= \frac{\kappa_5}{\sqrt{2}}, & OC_2 = OD_2 &= \frac{2\kappa_5}{\sqrt{3}}, \\ OE &= -2\kappa_6, & OF_1 = OG_1 &= \frac{\kappa_6}{\sqrt{2}}, & OF_2 = OG_2 &= \frac{2\kappa_6}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

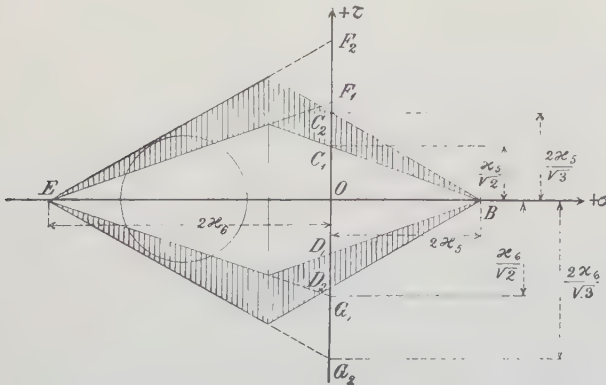


Abb. 12.

aufzutragen. Der Hauptkreis eines jeden Spannungszustandes an der Elastizitätsgrenze soll nach der vorliegenden Hypothese die *innere* Umgrenzung der schraffierten Fläche, *nicht* aber die *äußere* schneiden.

Im Spannungszustande VII:

$$\sigma_x = -\kappa_7, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = +\kappa_7$$

haben die Grenzwerte der positiven und der negativen Dehnungen die Größen $+\frac{5}{4}\frac{\kappa_7}{\varepsilon}$ und $-\frac{5}{4}\frac{\kappa_7}{\varepsilon}$. Der Hypothese zufolge müßte also die Drehungsspannung an der Elastizitätsgrenze κ_7 dem *kleineren* der beiden Werte $\frac{4}{5}\kappa_5$ und $\frac{4}{5}\kappa_6$ gleich sein. Nach den vorliegenden Erfahrungen ist es sehr unwahrscheinlich, daß die kleinere der beiden Verhältniszahlen $\frac{\kappa_7}{\kappa_5}$ und $\frac{\kappa_7}{\kappa_6}$ einen für alle gleichartigen Stoffe *konstanten* Wert habe, und das oben angeführte Beispiel von Eisen und Stahl zeigt nicht das Verhältnis $\frac{4}{5}$, sondern $\frac{1}{2}$. Es ist ferner außerordentlich unwahrscheinlich, daß der durch den Punkt *E* (Abb. 12) dargestellte Spannungszustand:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -2\kappa_6$$

an der Elastizitätsgrenze liege.

Dritte Hypothese. Die Erscheinungen, welche beim Bruche durch Druck und beim Fließen plastischer Stoffe beobachtet werden, haben zu der Annahme geführt, daß für die *Bruchgrenze* und für die *Fließgrenze* nicht die Größe der Hauptspannungen selbst, sondern ihre *größte Differenz* ($\sigma_z - \sigma_x$) maßgebend sei. Man nimmt hierbei an, daß beim Brechen und Fließen die Körperteile in denjenigen Flächen sich gegeneinander verschieben, welche die größten *Schubspannungen*

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}$$

aufzunehmen haben, und die gegen die Richtungen der beiden Hauptspannungen σ_x und σ_z um 45° geneigt sind. Bekanntlich geraten alle Körper, auch die spröden, bei *allseitig hohem Druck* in den *plastischen* Zustand, in welchem sie, ohne zu brechen, große Formänderungen erleiden können. Es ist möglich, daß die Hypothese für diesen plastischen Zustand annähernd zutrifft, daß also bei *hohen negativen* Werten von σ_z die Durchmesser der Hauptkreise für die Spannungszustände auch der spröden Stoffe an der Fließgrenze annähernd konstante Werte annehmen. Sie trifft ferner zu bei allen

plastischen Stoffen, zu denen z. B. das weiche *Schmied-* und *Fluß-**eisen* zu zählen ist. Dagegen kann sie eine *allgemeine* Gültigkeit nicht in Anspruch nehmen; denn sie steht in Widerspruch mit der allgemein bekannten Tatsache, daß die Hauptkreise der drei Spannungszustände I, II, III für die meisten gleichartigen Stoffe und Baumaterialien Durchmesser von sehr verschiedenen Größen haben.

9. Begründung einer neuen vierten Hypothese für isotrope Stoffe. Die zuletzt besprochene Hypothese scheint der Wahrheit insofern näher zu kommen, als sie die Spannungen der Gleit- und Bruchflächen als die maßgebenden Größen in Betracht zieht; denn das Gleiten und Brechen wird doch wohl zunächst abhängig sein von den Spannungen derjenigen Flächen, in welchen diese Bewegungen wirklich stattfinden. Dagegen berechtigt keine Erfahrungstatsache zu der Annahme, der Eintritt der Bewegungen sei allein abhängig von der *Schubspannung* und *unabhängig* von der *Normalspannung* jener Flächen. Die Unzulässigkeit dieser Annahme tritt schon zutage, wenn man ein Material sich vorstellt, dessen Schubfestigkeit sehr klein oder gleich null ist. Der Verschiebung zweier Körperteile gegeneinander würde in einem solchen Falle die *Reibung* sich entgegensetzen, die von der Größe des *Normaldruckes* wesentlich abhängt. Wir halten es daher für zweckmäßig, der Annahme die allgemeinere und vorsichtigere Fassung zu geben: *Die Elastizitätsgrenze und die Bruchgrenze eines Materials werden bestimmt durch die Spannungen der Gleit- und Bruchflächen.* Diese Annahme würde auch dann noch zutreffen, wenn für gewisse, bei der dritten Hypothese besprochene Fälle sich ergeben sollte, daß *nur* die Schubspannung maßgebend sei. Vielleicht wäre es vorzuziehen, anstatt der wirklichen die *reduzierten* Spannungen der Gleitflächen als die maßgebenden Größen in Betracht zu ziehen. Bei dem gegenwärtigen Stande unserer Erfahrungen, besonders über die Zustände in der Nähe der Bruchgrenze, ist dies jedoch untunlich, und wahrscheinlich würden sich auch die Ergebnisse nicht erheblich ändern.

Wir betrachten nun einen Körperpunkt, der in einem Grenzzustande, z. B. an der Elastizitätsgrenze, sich befindet, und bezeichnen mit σ_1 , τ_1 die Spannungen einer in diesem Punkte sich bildenden Gleitfläche unmittelbar vor Ueberschreitung der Grenze. Wir lassen die Normalspannung σ_1 dieser Fläche unverändert und stellen die Frage: Durch *welche Aenderung der Schubspannung* τ_1 wird die Grenzüberschreitung herbeigeführt werden können? Mit sehr großer Wahrscheinlichkeit wird anzunehmen sein, daß hierzu

eine *Vergrößerung* von τ_1 erforderlich ist, weil eine *Verschiebung* nicht wohl durch eine *Verminderung* der Schubspannung veranlaßt werden kann. Durch diese Ueberlegung gelangen wir zu der folgenden Erweiterung der Hypothese: *Die Schubspannung der Gleitfläche erreicht an der Grenze einen von der Normalspannung und von der Materialbeschaffenheit abhängigen Größtwert.*

In der graphischen Darstellung eines Grenzzustandes, Abb. 13, muß der einer Gleitfläche entsprechende, durch die Koordinaten σ_1, τ_1 bestimmte Punkt G_1 auf dem *Hauptkreise* XZ liegen; denn dieser Kreis enthält innerhalb des dargestellten Spannungszustandes alle

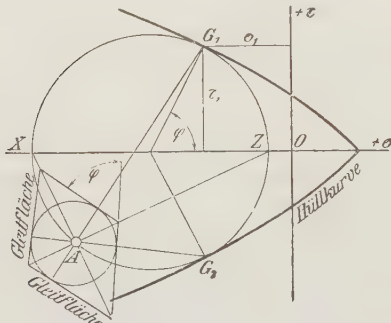


Abb. 13.

Punkte, die bei gegebener Abszisse σ_1 die *größtmögliche* Ordinate τ_1 haben. Wir schließen hieraus: *Jede in einem Körperpunkte entstehende Gleitfläche oder Bruchfläche geht durch die y-Achse dieses Punktes, also durch die Richtung der mittleren Hauptspannung σ_y .* Wenn die mittlere Hauptspannung σ_y gleich einer der beiden anderen, z. B. gleich σ_x ist, so wird die

Richtung der y -Achse unbestimmt und kann mit jeder Richtung in der xy -Ebene zusammenfallen.

Der einer Gleitfläche entsprechende Punkt G_1 muß ferner der Kurve angehören, von der die Hauptkreise aller an der Grenze liegenden Spannungszustände eingehüllt werden; denn diese Hüll- oder Grenzkurve bildet den geometrischen Ort desjenigen Punktes, dessen Ordinate, innerhalb der an der Grenze liegenden Spannungszustände, bei gegebener Abszisse σ_1 ihren größten Wert τ_1 erreicht. Die Hüllkurve ist *symmetrisch* zur σ -Achse geformt, weil die Mittelpunkte aller Hauptkreise auf dieser Achse liegen. Sie berührt also jeden an der Grenze liegenden Hauptkreis in *zwei* Punkten G_1, G_2 , durch die für den betreffenden Körperpunkt *zwei* Gleitflächen bestimmt werden: *In jedem Körperpunkte, in welchem die Elastizitätsgrenze oder die Bruchgrenze überschritten wird, bilden sich zwei Gleitflächen; dieselben schneiden sich in der y-Achse des Körperpunktes und schließen mit der Richtung einer jeden der Hauptspannungen σ_x und σ_z gleich große Winkel ein.* Bei gleicher Größe zweier Haupt-

spannungen, z. B. σ_x und σ_y , ist zwar die zur Hauptspannung σ_z normal gestellte Ebene xy bestimmt, aber die Achsen x und y können in dieser Ebene jede Richtung annehmen. Von der Stellung der Gleitflächen kann in diesem Falle nur ausgesagt werden, daß sie sich in einer Geraden der xy -Ebene schneiden und mit der Hauptspannung σ_z gleiche Winkel einschließen.

Zur Bestimmung der Hüllkurven, durch welche die Elastizitätsgrenze und die Bruchgrenze eines Materials dargestellt werden, liefert die Erfahrung leider nur wenige und unsichere Anhaltspunkte; insbesondere ist uns über die Elastizitätsgrenze bei verschiedenen Spannungszuständen nur wenig bekannt. Die folgenden Bemerkungen beziehen sich daher zunächst auf die *Bruchgrenzkurve*. Die Kurve schneidet wahrscheinlich die *positive* σ -Achse. Die unbekannte Abszisse des Schnittpunktes bezeichnet den Spannungszustand, durch den bei gleicher positiver Größe aller drei Hauptspannungen der Bruch herbeigeführt wird. Ein solcher Spannungszustand kann zwar durch den Versuch nicht hergestellt werden; es ist jedoch kaum zu bezweifeln, daß es möglich sein würde, durch allseitig gleich große Zugspannungen den Bruch herbeizuführen. Dagegen ist es wahrscheinlich unmöglich, einen gleichartigen Körper durch gleichmäßigen *Druck* von allen Seiten zu zerbrechen. *Föppl* ist es zwar gelungen, Probekörper aus Zementmörtel und aus Sandstein durch einen starken Flüssigkeitsdruck zum Bruch zu bringen; er nimmt jedoch an, daß mangelhafte Gleichartigkeit des Materials mitgewirkt habe, und wahrscheinlich wird auch das ungleichmäßige Eindringen der Flüssigkeit in die Poren der Versuchskörper nicht ohne Einfluß geblieben sein. Jedenfalls wird der Schnittpunkt der Grenzkurve mit der negativen σ -Achse, wenn nicht unendlich fern, so doch sehr fern liegen.

In der Regel ist die Druckfestigkeit des Materials *größer* als die Zugfestigkeit; in der Nähe der τ -Achse vermindert sich daher die Ordinate der Grenzkurve bei positiver Zunahme der Abszisse σ .

Es ist ferner wahrscheinlich, daß jedes Material bei allseitig hohem *Druck* in den plastischen Zustand versetzt wird, in dem die Schubspannung der Gleitflächen nahezu konstant und also unabhängig von der großen negativen Normalspannung wird. Hieraus ist zu schließen, daß die Grenzkurve ihre konkave Seite der σ -Achse zukehrt, und daß die Tangentenrichtung mit wachsender negativer Abszisse des Berührungspunktes der Richtung der σ -Achse sich nähert.

In Abb. 15 wird ein Spannungszustand an der Bruchgrenze innerhalb des hier in Betracht gezogenen Gebietes dargestellt. Die zu AG_1 und AG_2 normal gestellten Bruchflächen des Körperpunktes A bilden zwei Winkel φ und $(180^\circ - \varphi)$, welche durch die Gleichung

$$\cos \varphi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} \quad (18)$$

(vergl. Abb. 14) bestimmt werden. Der spitze Winkel φ wird durch die Richtung AX von σ_x , der stumpfe $(180^\circ - \varphi)$ durch die Richtung AZ von σ_z halbiert.

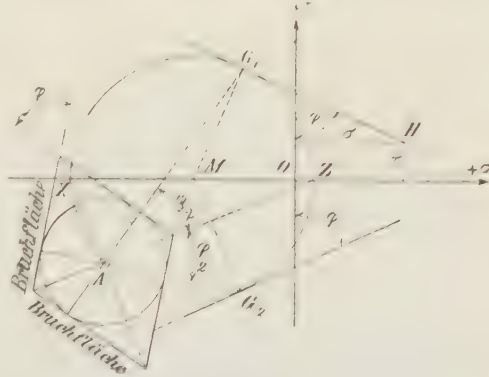


Abb. 15.

In allen Spannungszuständen an der Bruchgrenze ist die Größe des Winkels φ , also die Stellung der Gleitflächen gegen die Hauptebenen der Körperpunkte unverändert dieselbe.

Man ersieht aus den Abb. 14 und 15, daß mit Berücksichtigung der Vorzeichen:

$$OM = -\frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}, \quad MX = MZ = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2},$$

folglich

$$\frac{\sigma_x - \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \cos \varphi = x_3 = \frac{x_1}{2} (1 + \cos \varphi) \quad (19)$$

ist. Zwischen den beiden Hauptspannungen σ_x , σ_z eines Zustandes an der Bruchgrenze ergibt sich hieraus die Beziehung:

$$\sigma_z x_2 - \sigma_x x_1 = x_1 x_2. \quad (20)$$

Die Koordinaten σ , τ irgend eines Punktes H (Abb. 15) der Tangente G_1H sind voneinander abhängig durch die Gleichung:

$$\tau = x_4 - \sigma \cotg \varphi.$$

Daher ist die Gleichung der beiden Geraden, welche die Bruchgrenze darstellen:

$$\pm \tau = \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{2} - \sigma \frac{x_2 - x_1}{2 \sqrt{x_1 x_2}}. \quad (21)$$

Ganz ähnliche Beziehungen bestehen für die Elastizitätsgrenze; um dieselben zu bilden, ist x_1 mit x_5 , x_2 mit x_6 und x_3 mit x_7 zu vertauschen.

II. Prüfung der neuen Hypothese durch die Erfahrung.

a) *Die Fließfiguren.* Die Oberfläche eines blank polierten Metallstabes bekommt, sobald beim Zugversuch die Elastizitätsgrenze überschritten wird, ein mattes Aussehen, als wenn sie von einem

feinen Hauch oder Tau bedeckt wäre. Im weiteren Verlauf des Versuches wird der Hauch allmählich gröber, und es entwickelt sich in manchen Fällen aus diesen Unebenheiten der Oberfläche ein Liniennetz von auffallender Regelmäßigkeit. Die Abb. 16, 17 und 18



Abb. 16.

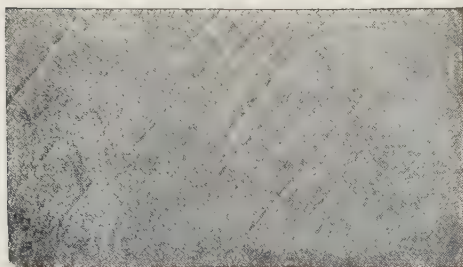


Abb. 17.

geben einige Beispiele, die dem Handbuch der Materialienkunde von *Martens* entnommen sind. Man kann, wie zuerst von *Pohlmeyer* geschehen ist, diese Erscheinung an Eisenstäben besonders deutlich sichtbar machen, indem man durch Glühen die polierte Oberfläche

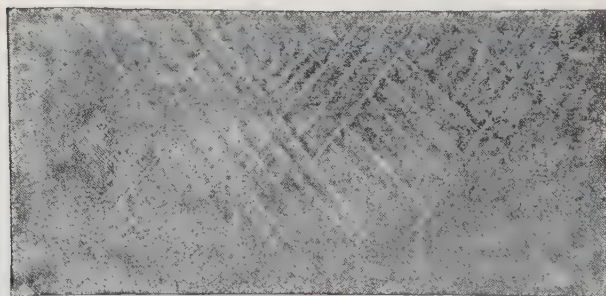


Abb. 18.

des Stabes mit einer dünnen Oxydschicht bedeckt. Die Linien erscheinen dann auf der blauschwarzen Fläche als helle Adern. Die Regelmäßigkeit der Erscheinung ist in empfindlicher Weise von der Gleichartigkeit der Oberflächenschicht abhängig. Jede Störung dieser Gleichartigkeit, die bei der Bearbeitung

des Probestücks durch Schlag, Druck oder andere äußere Einwirkungen entstanden ist, macht sich durch Unregelmäßigkeiten des Liniennetzes erkennbar; in manchen Fällen zeigt sich daher ein ziemlich verworrenes Gefüge. Auf diese Fließfiguren wurde zuerst im Jahre 1860 in Dinglers Journal von *Lüders* aufmerksam gemacht. Eingehende Mitteilungen enthält das Handbuch der Materialienkunde von Martens, in dem besonders auf eine Abhandlung von *Kirsch* in den Mitteilungen aus den technischen Versuchsanstalten zu Berlin, 1887, 1888 und 1889 Bezug genommen wird.

Die ausführlichsten und bestimmtesten Angaben enthält das im Jahre 1896 erschienene Buch des französischen Offiziers *L. Hartmann*: „*Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts*“. Dieses Buch gibt Beschreibungen und zahlreiche Abbildungen von Fließfiguren, welche an Probestäben aus Eisen, Stahl, Kupfer, Zinn, Zink, Blei und anderen Metallen bei sehr verschiedenen Beanspruchungen durch Zug, Druck, Biegung, Stoß usw. beobachtet worden sind. Aus diesem reichhaltigen Material zieht der Verfasser folgende Schlüsse, die mit den Ergebnissen unserer Hypothese in bemerkenswerter Weise übereinstimmen:

Die an einem gleichartigen Körper nach Ueberschreiten der Elastizitätsgrenze zu beobachtenden Formänderungen erstrecken sich nicht auf die kleinsten Teile des Körpers. Sie bestehen vielmehr darin, daß Körperteile von endlicher Ausdehnung in *zwei* Gruppen von Gleitschichten sich gegeneinander verschieben. Die Spuren dieser Gleitschichten an der Oberfläche des Körpers bilden die Fließfiguren. *Bei gleichbleibender Art und wachsender Größe der Inanspruchnahme bleibt die Stellung der Gleitschichten unverändert bis zum Bruch.* Oft fallen die Bruchflächen zusammen mit einzelnen Gleitschichten. Die benachbarten Gleitschichten *einer* Gruppe sind parallel zueinander gestellt. Beide Gruppen kreuzen sich unter einem Winkel φ , dessen *konstante Größe nur von der Materialbeschaffenheit, also nicht von dem Spannungszustande der betreffenden Körperpunkte und nicht von der Größe der Spannungen abhängig ist.* *Bei gleicher Gattung, aber wechselnder Beschaffenheit des Materials weicht der Schnittwinkel φ desto mehr von 90° ab, je härter und spröder das Material ist, je mehr also die Druckfestigkeit α_2 die Zugfestigkeit α_1 überwiegt* (vergl. Gleichung 18). Die Abweichung ist z. B. größer für harten Stahl als für weichen. In Prismen, die in ihrer Achsenrichtung gezogen oder gedrückt werden, wird der Gleitschichtenwinkel von der Achsenrichtung halbiert. Dieser von der Achsenrichtung halbierte Winkel ist in einem gezogenen Prisma

stets größer, in einem gedrückten Prisma stets kleiner als 90° , mit anderen Worten: *der spitze Winkel φ wird durch die Richtung von σ_x , der stumpfe ($180 - \varphi$) durch die Richtung von σ_z halbiert* (vergl. Abb. 15). Für ein und dasselbe Material ergänzen sich die oben bezeichneten, bei Zug und Druck von der Achsenrichtung halbierten Winkel zu 180° . *Sie ändern sich nicht, wenn ein gerades Prisma in einer Achsenrichtung gezogen und gleichzeitig rechtwinklig zu dieser Richtung gedrückt wird.* In betreff der Einzelheiten muß auf das Buch von Hartmann verwiesen werden, da sie ohne zahlreiche Abbildungen nicht wiederzugeben sind.

Die in den deutschen Versuchsanstalten von Kirsch, Martens und anderen gemachten Beobachtungen widersprechen den vorstehenden Angaben nicht; sie sind aber weniger bestimmt als die Mitteilungen Hartmanns. Vielleicht ist dieser Unterschied dadurch begründet, daß Hartmann außer dem oben beschriebenen, auch von Pohlmeier angewandten Verfahren noch ein zweites Hilfsmittel entdeckt hat, um die Fließfiguren deutlicher sichtbar zu machen. Das Material in unmittelbarer Nähe der Gleitschichten wird nämlich, vielleicht infolge einer Lockerung des Gefüges, von Säuren stärker angegriffen als die übrigen Körperteile. Wenn also der Probestab *während des Versuches* in ein Säurebad eingetaucht und der Einwirkung desselben eine Zeitlang ausgesetzt wird, so zeigen sich die Spuren der Gleitschichten an der Oberfläche als feine, vertiefte Linien. Es ist Hartmann gelungen, das Bestehen der Gleitflächen bereits *vor* dem Ueberschreiten der Elastizitätsgrenze nachzuweisen, und er schließt hieraus mit Recht, daß die elastischen Formänderungen auf demselben Wege zustande kommen wie die bleibenden.

b) Die Bruchflächen plastischer Materialien, insbesondere des Flußeisens. Ein Rundstab aus Flußeisen zeigt, wenn er beim Zugversuche bricht, die bekannte Einschnürung und darin eine *trichterförmige* Bruchfläche. Die Abb. 19 und 20 zeigen Beispiele aus dem Handbuch von Martens. Aus der Richtung der Kräfte, die auf den Stabteil in der Einschnürung von den benachbarten Körperteilen übertragen werden (Abb. 21), läßt sich erkennen, daß alle drei Hauptspannungen der Körperpunkte in diesem Stabteile *positiv* sind. Man kann die Hauptspannungen ihrer ungefähren Richtung nach durch die Bezeichnungen *achsial*, *radial* und *tangential* voneinander unterscheiden. Die *achsiale* Hauptspannung ist jedenfalls die größte und daher mit σ_z zu bezeichnen. Am *Rande der Bruchfläche* nähert sich die *radial* gerichtete Haupt-

spannung notwendig der Größe null und trägt daher die Bezeichnung σ_x . Für die Körperpunkte am Rande geht daher die Bruchfläche durch die mit der y -Achse zusammenfallende Tangente, und da für weiches Flußeisen annähernd

$\kappa_1 = \kappa_2$ und also $\varphi = 90^\circ$ ist, so muß der Hypothese gemäß die Bruchfläche mit der Achse ungefähr einen Winkel von 45° einschließen. Dieser Bedingung entspricht der aus der Erfahrung bekannte Randtrichter (Abb. 19).

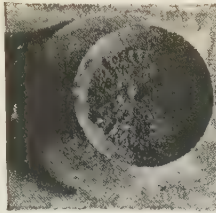


Abb. 19.



Abb. 20.

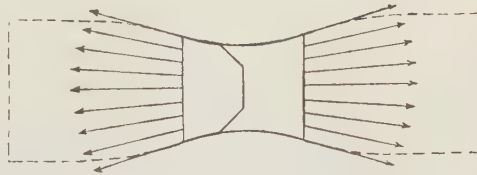


Abb. 21.

In den Körperpunkten des mittleren Teils

der Bruchfläche kann die radiale Hauptspannung gleich, größer oder kleiner als die tangentialie sein, und es läßt sich aus theoretischen Gründen nicht entscheiden, welcher dieser drei Fälle der wahrscheinlichere ist. Nur im Mittelpunkt der Bruchfläche muß der *Symmetrie wegen* σ_x gleich σ_y sein. Nach den Mitteilungen des Handbuches von Martens scheinen in Wirklichkeit alle drei Fälle vorzukommen, also von Zufälligkeiten abhängig zu sein.

Wenn σ_x gleich σ_y ist, so wird die Lage der y -Achse in der zur Stabachse rechtwinklig gestellten Ebene unbestimmt. Beachtet man nun, daß die Körperpunkte, welche in der Mitte der Einschnürung dem Bruchzustande sich nähern, eine Schicht von nur geringer Höhe bilden, so ist der Hypothese gemäß anzunehmen, daß der mittlere Teil der Bruchfläche aus einer großen Anzahl von Flächenelementen besteht, die gegen die Stabachse ungefähr um 45° geneigt, im übrigen aber unregelmäßig gestellt sind. Wenn im Grenzfall die bezeichnete Schicht unendlich dünn wird, so geht die beschriebene Bruchfläche in die zur Stabachse rechtwinklig gestellte Ebene über. Die Erfahrungstatsache, daß der mittlere Teil der Bruchfläche in manchen Fällen mit dieser Ebene nahezu zusammenfällt, widerspricht also keineswegs der Hypothese.

Die beiden anderen Fälle scheinen weniger häufig vorzukommen. Ist die radiale Hauptspannung größer als die tangentialie,

so fällt die y -Achse des betreffenden Körperpunktes mit seinem Halbmesser zusammen. Bei geringer Höhe der oben bezeichneten Schicht muß die Bruchfläche alsdann aus einer Anzahl von radial gerichteten Rücken und Tälern bestehen, die in den ebenfalls dem Handbuch von Martens entnommenen Beispielen in Abb. 22 u. 23 deutlich zu erkennen sind.

Ist endlich die *tangentiale* Haupt-

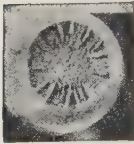


Abb. 22.



Abb. 23.

spannung die größere, so muß auch der mittlere Teil der Bruchfläche aus einer oder aus mehreren Kegelflächen oder Pyramiden bestehen, wie die Abb. 24 und 25 zeigen.

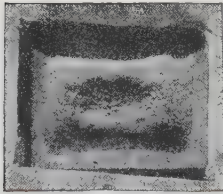


Abb. 24.



Abb. 25.

c) Die Bruchflächen spröder Körper beim Druckversuche. Wenn ein Zylinder oder ein Prisma A (Abb. 26) durch Druck in der

Achsenrichtung zum Bruche gebracht wird, so beginnt derselbe an den Kanten der Druckfläche. Infolge des Reibungswiderstandes, welchen die Druckplatten B, B der Querdehnung des Probestückes A entgegensetzen, bildet die Hauptspannung σ_x an den bezeichneten Stellen mit der Richtung des Druckes P einen Winkel α ,

der sich dem Reibungswinkel mehr oder weniger nähert. Die Bruchflächen schließen mit der Richtung von σ_x Winkel von der Größe $\frac{1}{2} \varphi$ ein. Der Kegel oder die Pyramide über der Druck-

fläche hat daher an der Spitze einen Winkel von der Größe $2\alpha + \varphi$. Beide Winkel α und φ sind unbekannt, und ihre Schätzung ist sehr unsicher. Unter sonst gleichen Umständen wird der Winkel α der geringeren Querdehnung wegen desto kleiner sein, je härter und spröder das Material ist. Auch der Winkel φ ist für hartes Material kleiner als für weiches. Die Hypothese führt also zu der Folgerung, daß die sogenannten *Bruchpyramiden unter sonst gleichen Umständen desto spitzer sein müssen, je härter und spröder das Material ist*. Diese Folgerung wird von der Erfahrung durchaus bestätigt (vergl. *Bauschingers* Mitteilungen, Heft 6, S. 7).

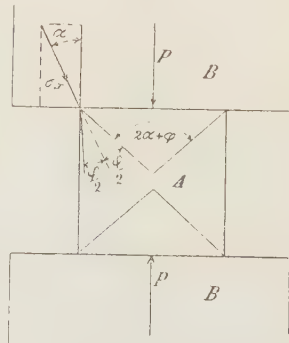


Abb. 26.

d) Die Elastizitätsgrenzen der Spannungszustände V, VI, VII. *Bauschinger* beschreibt im dritten Hefte seiner Mitteilungen Versuche mit neun verschiedenen Sorten Bessemereisen, durch die er die oben mit κ_5 , κ_6 , κ_7 bezeichneten Elastizitätsgrenzen der Zug-, Druck- und Drehungsspannungen bestimmt hat.

k	κ_5	κ_6	κ_7	$\frac{\kappa_5 \kappa_6}{\kappa_5 + \kappa_6}$
0,19	33	30	15	16
0,46	35	34	15	17
0,54	35	34	15	17
0,57	33	34	16	17
0,66	37	38	17	19
0,78	37	38	18	19
0,80	40	44	20	21
0,87	43	39	20	20
0,96	49	50	27	25

Die erste Reihe der vorstehenden Tabelle gibt den Kohlenstoffgehalt k des Probestückes in Hundertteilen an, die drei folgenden Reihen enthalten die Versuchswerte in kg/qmm, und in der letzten Reihe sind aus den Versuchswerten von $\varkappa_5$ und $\varkappa_6$ die Werte $\frac{\varkappa_5 \varkappa_6}{\varkappa_5 + \varkappa_6}$ berechnet, die $\varkappa_7$ unserer Hypothese gemäß nach Gleichung 16) annehmen müßte. Der Vergleich mit den Versuchswerten von $\varkappa_7$ ergibt eine sehr befriedigende Uebereinstimmung, während die ältere Annahme

$$\varkappa_7 = 0,8 \varkappa_5$$

auch nicht annähernd bestätigt wird.

e) In *The Philosophical Magazine*, 1900 berichtet *James Guest* über sehr ausgedehnte und mit vollkommenen Hilfsmitteln angestellte Versuche zur Bestimmung der Elastizitätsgrenzen von Stahl, Flußeisen, Kupfer und Messing, insbesondere zur Feststellung des Einflusses der zweiten Hauptspannung σ_y . Als Versuchskörper kamen Rohre von 32 mm Durchmesser, 0,6 bis 0,9 mm Wandstärke und 300 mm Länge zur Verwendung. Diese Rohre konnten zugleich oder gesondert den Einwirkungen einer Zugkraft in der Achsenrichtung, eines Drehmomentes und eines inneren Flüssigkeitsdruckes ausgesetzt werden. Mit verhältnismäßig großer Bestimmtheit ließen sich hierdurch alle Spannungszustände an der Elastizitätsgrenze herstellen, die zwischen den von uns mit V und VII bezeichneten Zuständen

$$\begin{aligned} \text{V: } \sigma_x &= 0, & \sigma_z &= + \varkappa_5 \\ \text{VII: } \sigma_x &= - \varkappa_7, & \sigma_z &= + \varkappa_7 \end{aligned}$$

liegen. Selbstverständlich war es wegen der Knickgefahr nicht möglich, den Spannungszustand

$$\text{VI: } \sigma_x = - \varkappa_6, \quad \sigma_z = 0$$

in den dünnwandigen Rohren hervorzurufen. Leider wurde auch an Versuchskörpern von anderer Form dieser Zustand nicht beobachtet; die Ergebnisse würden durch eine solche Ergänzung noch erheblich an Wert gewonnen haben. Innerhalb der bezeichneten Grenzen ergab sich, daß die mittlere Hauptspannung σ_y keinen Einfluß auf die Größen der beiden Grenzspannungen σ_x und σ_z ausübt. Wenn demnach z. B. der Spannungszustand

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 20$$

an der Elastizitätsgrenze liegt, so berührt auch der Zustand

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 20, \quad \sigma_z = 20$$

die Grenze. Dieses Ergebnis widerlegt die Hypothese 2, bestätigt

dagegen unsere Annahmen; denn die soeben als Beispiele angeführten beiden Spannungszustände werden durch einen und denselben Hauptkreis dargestellt.

Es ergab sich ferner in Uebereinstimmung mit Bauschinger, daß für die Zustände an der Elastizitätsgrenze der genannten plastischen Metalle die größte Schubspannung

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}$$

einen nahezu konstanten Wert hat. Für *Flußeisen* konnte die Beziehung noch genauer dargestellt werden durch die Angabe, daß der Wert $(0,52 \sigma_z - 0,48 \sigma_x)$ von konstanter Größe ist. Für dieses Material ist demnach (Gleichung 18)

$$\cos \varphi = \frac{52 - 48}{52 + 48} = \frac{1}{25}.$$

Auch diese Ergebnisse stehen mit unseren Annahmen durchaus im Einklange; denn in der Zeichensprache unserer graphischen Darstellung haben die vorstehenden Angaben die Bedeutung, daß die Hüllkurve der Hauptkreise innerhalb der hier in Betracht kommenden Grenzen, wie es von uns geschehen ist, durch zwei gemeinschaftliche Tangenten ersetzt werden darf.

Die Versuche von *Bauschinger* und *Guest* bieten unseres Erachtens die schärfste Probe für die Brauchbarkeit der neuen Hypothese, weil die Elastizitätsgrenze weit genauer und bestimmter sich beobachten läßt als die Bruchgrenze. Man vergleiche hierüber die Angaben von Bauschinger, Heft 3.

f) Die Bruchgrenzen der Spannungszustände I, II, III, IV. Wenn die mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ bezeichneten Spannungsgrenzen für irgend ein isotropes Material mit einiger Genauigkeit bekannt wären, so würden die Gleichungen 16) und 17) Gelegenheit zur Prüfung der neuen Hypothese bieten. Leider ist dies nicht der Fall. Es ist unmöglich, die Spannungszustände, welche beim Bruche wirklich eintreten, mit einiger Bestimmtheit, d. h. durch ihre Hauptspannungen anzugeben. Hierzu kommt, daß der Bruch keine Erscheinung ist, die scharf bestimmt und beobachtet werden kann. Weiche und plastische Materialien entziehen sich durch Fließen ganz dem Bruche, während bei harten und spröden Körpern lange vor der vollständigen Zertrümmerung einzelne Risse und Sprünge eintreten. Was als „Bruch“ zu bezeichnen ist, darüber besteht unter den Experimentatoren keineswegs Einigkeit. Aus diesen Gründen sind die meisten Versuchsergebnisse über die Bruchgrenzen höchst unsicher und ungenau.

Am größten ist die Unsicherheit beim Schubversuche, weil die Verteilung der Schubkraft über die Bruchfläche und außerdem die Normalspannungen dieser Fläche ganz unbekannt sind. Das Versuchsergebnis, Schubkraft dividiert durch Bruchfläche, kann daher weit abweichen von der Schubspannung σ_4 , die in Verbindung mit der Normalspannung null den Bruch herbeiführt.

Nicht weniger unsicher sind die Ergebnisse der *Druck*versuche mit manchen Baustoffen, insbesondere mit Steinen und Mörtelarten, weil die Reibung zwischen den Druckplatten der Maschine und dem Probekörper einen sehr großen und schwer bestimmbaren Einfluß ausübt. Schon *Vicat* berichtete 1833 in den *Annales des ponts et chaussées*, daß Probekörper aus Stein- und Mörtelmaterialien, die von den harten Druckplatten der Maschine unmittelbar berührt werden, eine weit größere Tragfähigkeit zeigen als unter sonst gleichen Umständen in dem Falle, wenn zwischen Druckplatte und Probekörper eine weiche Zwischenlage, z. B. aus Pappe gelegt wird. Diese Erfahrung wurde später vielfach bestätigt, und man neigte zu ihrer Erklärung der Annahme zu, daß das seitwärts gequetschte Material der Zwischenlage eine *sprengende Wirkung* auf den Versuchskörper ausübe. Man hielt hieran auch dann noch fest, als sich zeigte, daß bereits eine ganz dünne Schicht von Schmiermaterial dieselbe und sogar eine noch stärkere Wirkung ausübt.

Um diese Frage zu entscheiden, führte *Föppl* vergleichende Versuche mit Zementwürfeln aus, indem er die mittlere Bruchspannung, d. h. die Bruchlast dividiert durch den Querschnitt des Probekörpers, unter *vier* verschiedenen Umständen ermittelte. Im *ersten* Falle berührten, wie es beim Druckversuche die Regel ist, die Druckplatten unmittelbar den Probekörper; im *zweiten* Falle wurden die Druckflächen mit einer dünnen Schmierschicht aus Stearin überzogen, und im *dritten* Falle lag zwischen der Schmierschicht und dem Probekörper ein dünnes Messingblatt von 0,1 mm Stärke, welches die Berührung des Stearins mit dem Probekörper, also das Eindringen der Schmiere in die Poren, vollständig verhinderte. Endlich wurde im *vierten* Falle die Schmierschicht fortgelassen und das Messingblatt trocken zwischen Druckplatte und Probekörper gelegt. Die mittlere Bruchspannung in kg/qcm war

im Falle 1 : 92

„ „ 2 : 48

„ „ 3 : 52

„ „ 4 : 85.

Die Vermutung von der Sprengwirkung der Schmiere bestätigte sich also nicht; denn es war für die Wirkung des Schmierens fast gleichgültig, ob der Zutritt des Schmiermaterials zu den Poren des Probekörpers möglich war oder nicht. Es kann hiernach kaum bezweifelt werden, daß die sehr großen Unterschiede in den Werten der mittleren Bruchspannung lediglich durch die Reibung in den Druckflächen verursacht werden, wie ich dies in meiner ersten Abhandlung über diesen Gegenstand (Zivilingenieur 1882, S. 138) bereits ausgesprochen und näher dargelegt habe.

Etwas größere Sicherheit bieten die Ergebnisse der Bruchversuche mit harten und spröden Metallen, weil diese Materialien nicht fließen, und weil die Reibung an den Druckplatten beim Druckversuche wegen der größeren Härte des Probekörpers von geringerem Einfluß ist. *Bach* berichtet in seinem Buche *Elastizität und Festigkeit* über vergleichende Versuche mit gleichartigen Probestäben aus Gußeisen, für die er in kg/qmm

$$\alpha_1 = 16, \quad \alpha_2 = 75, \quad \alpha_3 = 13$$

fand. Diese Zahlen bestätigen die neue Hypothese, weil die Gleichung 16)

$$\alpha_3 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{16 \cdot 75}{16 + 75} = 13$$

genau den beobachteten Wert ergibt.

Neuerdings hat *Voigt* aus einigen Bruchversuchen, die er mit Steinsalz und mit einem aus Paraffin und Stearinsäure zusammengesetzten Material anstellen ließ, den Nachweis zu führen versucht, daß nicht nur die dritte Hypothese, der er auf Grund jener Versuche anfangs sich angeschlossen hatte, sondern auch die neue vierte Hypothese unbrauchbar sei. Ob ihm dies gelungen ist, überlasse ich dem Urteil derjenigen Leser, welche von dem betreffenden Meinungs Austausch in den *Annalen der Physik* 1901, S. 567 und in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1901, S. 140 und 1033 Kenntnis nehmen wollen.

g) Einfluß der mittleren Hauptspannung σ_y auf die Bruchgrenze. *Föppl* beschreibt im 27. Hefte der Mitteilungen aus dem Münchener Laboratorium einen Apparat, das *Druckkreuz*, den er herstellen ließ, um auf vier Seitenflächen des würfelförmigen Probekörpers gleich große Druckkräfte zu übertragen und dadurch einen Spannungszustand an der Bruchgrenze zu erzeugen, in dem σ_x und σ_y gleich große negative Werte annehmen, während σ_z gleich null ist. Es ergab sich, daß die beiden Hauptspannungen σ_x und

σ_y denselben Wert $-\alpha_2$ annehmen, wie σ_x in dem Spannungszustand II:

$$\sigma_x = -\alpha_2, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0,$$

dass also die mittlere Hauptspannung σ_y , ebenso wie Guest für die Elastizitätsgrenze feststellte, auch auf die Bruchgrenze keinen Einfluss ausübt. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit der neuen Hypothese, weil die beiden hier in Rede stehenden Spannungszustände durch ein und denselben Hauptkreis dargestellt werden.

h) Versuche unter allseitigem Druck. Von besonderer Wichtigkeit sind die Versuche, die in den letzten Jahren in dem unter Leitung des Prof. Dr. Prandtl stehenden Göttinger Laboratorium mit spröden Materialien, insbesondere mit Marmor und Sandstein angestellt worden sind. Ueber die bisherigen Ergebnisse berichtet Prof. Dr. v. Kármán in der Zeitschrift deutscher Ingenieure 1911, S. 1749 und im Forschungsheft Nr. 118. Wir entnehmen diesem Bericht, der zugleich eine Uebersicht über den Stand der Frage vor Anstellung jener Versuche bietet, den folgenden Auszug.

„Versuche zugunsten der Mohrschen Theorie. Hier kommen in erster Linie die seit 1900 in England und in den Vereinigten Staaten zahlreich unternommenen Untersuchungen über zusammengesetzte Beanspruchung in Betracht. J. Guest hat als Versuchsgegenstand Rohre aus Flußeisen und Kupfer gewählt und bestimmte die Fließgrenze, indem er Zug mit Verdrehung, Zug mit Innendruck und Innendruck mit Verdrehung verband. Diese Versuche wiederholte Mason mit weichen Stahlrohren. E. L. Hancock und M. A. Scoble unterwarfen massive Stäbe aus Kupfer, Flußeisen und weichem Stahl gleichzeitig der Biegung und der Verdrehung. Schließlich ist eine ausgedehnte Versuchsreihe von Smith zu erwähnen, der Zug und Druck mit Verdrehung verband und ebenfalls Probestäbe aus weichem Stahl benutzte. Alle diese Versuche ergaben sehr stark veränderliche Werte sowohl für die größte Spannung als für die größte Dehnung an der Elastizitätsgrenze, dagegen einen annähernd konstanten Wert für die größte Schubspannung oder — was auf dasselbe herauskommt — für den Unterschied der äußersten Hauptspannungen, und zwar unabhängig von der dritten Hauptspannung. Es sei bemerkt, daß nach diesen Versuchen das Verhältnis der zulässigen Schubspannung bei einer Verdrehung zu der zulässigen Zugspannung bei einem Zuge 0,5 beträgt, statt 0,7 nach der St. Venantschen und 1,0 nach der Rankineschen Formel. Dieses Verhältnis 1:2 der zulässigen Schub- und

Zugspannung wurde für plastische Stoffe durch zahlreiche Versuche ebenfalls bestätigt. Die soeben erwähnten Versuche sprechen entschieden für die Mohrsche Auffassung, namentlich für die Annahme, daß die mittlere Hauptspannung unwesentlich sei. Da aber bei den untersuchten ausgesprochen plastischen Stoffen augenscheinlich stets der einfachste Fall vorlag, der Fall der konstanten größten Schubspannung, so kann gerade der wesentlichste Punkt der Mohrschen Theorie: die Abhängigkeit der Schubspannung von der Normalspannung im Grenzzustand, offenbar erst bei spröden Körpern hervortreten. Nun liegen bedauerlicherweise vergleichende Versuche von spröden Körpern nur in geringer Anzahl vor, und die vorhandenen Versuchsergebnisse sind infolge der Schwierigkeiten des Versuchs weit unsicherer.

Von grundsätzlicher Bedeutung sind die Versuche von Prof. Föppl an Steinen und Zement über den Einfluß der Art des Spannungszustandes auf die Bruchgrenze. Der Vergleich der gewöhnlichen Druckfestigkeit ($\sigma_x < 0, \sigma_y = \sigma_z = 0$) mit der von ihm untersuchten „Umschlingungsfestigkeit“ ($\sigma_x = \sigma_y < 0, \sigma_z = 0$) liefert unmittelbar Aufschluß über den Einfluß der mittleren Hauptspannung, da man die beiden Versuche so auffassen kann, daß die mittlere Hauptspannung einmal der kleinsten, dann der größten Hauptspannung gleichkommt. Nun ergaben die Versuche, daß die Umschlingungsfestigkeit und die gewöhnliche Druckfestigkeit ungefähr gleich groß ausfallen, wenn man zwischen Versuchskörper und Druckplatte Schmiermittel einführt, um die Reibung zu vermeiden; bei ungeschmierten Druckflächen ist dagegen die Umschlingungsfestigkeit bis zweimal so groß wie die Druckfestigkeit. Ob nun tatsächlich mit Recht angenommen werden kann, daß man zu richtigen Werten der Druck- bzw. Umschlingungsfestigkeit gelangt, wenn man zwischen Probekörper und Druckplatten Schmiermittel einführt, erscheint wenigstens zweifelhaft. Wäre dies der Fall, so würde dies bedeuten, daß die mittlere Hauptspannung tatsächlich ohne Einfluß ist.

Versuche gegen die Mohrsche Theorie. Als Versuche, die entschieden gegen die allgemeine Gültigkeit der Mohrschen Theorie sprechen, kommen lediglich die auf Anregung und unter Leitung von Prof. W. Voigt am Physikalischen Institut der Universität Göttingen durchgeführten Versuchsreihen in Betracht. Es wurden Zerreißversuche unter allseitigem Druck an spröden Körpern vorgenommen, und zwar in der Weise, daß der zwischen Zugköpfen eingefasste Probekörper zuerst einem allseitig gleichen Druck unter-

worfen und dann die achsiale Spannung durch Federkraft so lange vermindert wurde, bis der Probekörper zerriß. Die Versuche ergaben für die Bruchgrenze stets denselben Unterschied der Hauptspannungen (d. h. der achsialen Spannung und des auf die Mantelfläche wirkenden Drucks), und zwar war dieser Unterschied annähernd gleich der Zugfestigkeit bei gewöhnlichen Zugversuchen. Dies Ergebnis würde an und für sich der Mohrschen Theorie noch nicht widersprechen; zieht man aber in Betracht, daß die Druckfestigkeit der untersuchten Körper die Zugfestigkeit derselben vier- bis fünffach übertrifft, so ist es klar, daß die Bruchgrenze nicht nur von den beiden äußersten Hauptspannungen abhängen kann. Wenn die Voigtschen Versuche die Mohrsche Theorie auch nicht widerlegen, so erscheint es doch sehr wahrscheinlich, daß nicht alle Bruchvorgänge durch die Mohrschen Annahmen erklärt werden können. Es ist überhaupt fraglich, ob so qualitativ verschiedene Vorgänge, wie der Bruch spröder Körper bei Zug und Verdrehung einerseits und bei Druck andererseits, sich einer einfachen Gesetzmäßigkeit fügen können. Prof. Prandtl hat in einem vor der Versammlung der Naturforscher und Aerzte in Dresden 1908 gehaltenen Vortrage vorgeschlagen, zwei Arten des Bruches zu unterscheiden: den Gleitungs- (Verschiebungs-)bruch und den Trennungsbruch. In der Tat lassen sich beide schon an der Verschiedenheit der Bruchflächen leicht erkennen: beim Trennungsbruch entstehen harte glänzende Bruchflächen, beim Gleitungsbruch sind dagegen die Bruchflächen mit feinem Mehl bedeckt. Es ist wohl möglich, daß die Mohrsche Theorie auf den Gleitungsbruch beschränkt werden muß, so daß Druckversuche und Zugversuche nicht unmittelbar verglichen werden können.

Strittige Punkte. Aus den obigen Darlegungen geht hervor, daß die Frage nach der Richtigkeit der Mohrschen Theorie keineswegs hinreichend geklärt ist. Den heutigen Stand der Frage können wir etwa folgendermaßen zusammenfassen:

a) Erstens erscheint es fraglich, wie weit sämtliche Bruchvorgänge sich der Mohrschen Theorie fügen? Namentlich entsteht die Frage, unter welchen Umständen Gleitungsbruch und unter welchen Trennungsbruch erfolgt. Und zugegeben, daß für den Gleitungsbruch die Mohrschen Annahmen zutreffen, welche Gesetzmäßigkeit ist für den Trennungsbruch maßgebend?

b) Zweitens ist auch für diejenigen Fälle, in welchen zweifelsohne Gleitungsbruch oder bleibende Formänderung durch Gleitung entsteht, fraglich, wie weit die Annahme eines mit der Normal-

spannung wachsenden Grenzwertes der Schubspannung zutreffend ist. Namentlich hatte man bisher in allen Fällen, wo die Mohrsche Theorie unbestreitbar richtig dasteht, d. h. bei bildsamen Stoffen, stets den Grenzfall der konstanten größten Schubspannung beobachtet. Da sind also Versuche mit spröden Körpern notwendig.

c) Drittens ist es fraglich, wie es mit dem Einfluß der mittleren Hauptspannung steht? Für bildsame Stoffe ist gezeigt worden, daß die Elastizitätsgrenze von der mittleren Hauptspannung unabhängig ist. Für spröde Stoffe sprechen die Föppl'schen Versuche dafür, die Voigt'schen Zerreißversuche unter allseitigem Druck dagegen. Hier ist also ebenfalls weitere Klärung notwendig.“

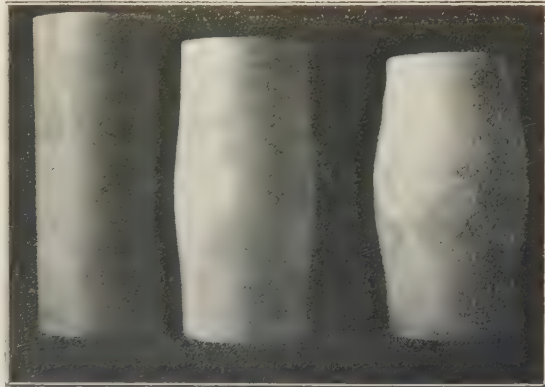


Abb. 27.

Marmorkörper von ursprünglich gleicher Gestalt, plastisch zusammengedrückt unter 685 und 500 at Manteldruck; links ein Probekörper vor dem Versuch.

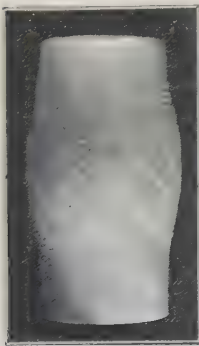


Abb. 28. Gleitlinien an Marmorkörpern (500 at Manteldruck).



Abb. 29. Gleitlinien an Marmorkörpern (685 at Manteldruck).

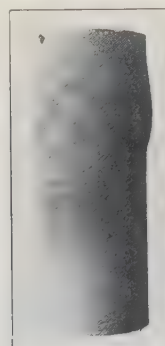


Abb. 30. Gleitlinien an Sandsteinkörpern (555 at Manteldruck).

In dem Bericht folgt hierauf eine Beschreibung der Versuchseinrichtungen und der Ausführung der Versuche. Die Probekörper waren Zylinder aus Marmor und Sandstein von 40 mm Durchmesser

und 100 bis 110 mm Länge. Dieselben wurden einem allseitigen hydrostatischen Manteldruck und einem größeren achsialen Druck ausgesetzt, wobei starke plastische Deformationen eintraten. Die Abb. 27 bis 30 zeigen deutlich die Fließfiguren an den Mantelflächen. In der Beschreibung der Versuchsergebnisse heißt es dann wörtlich weiter:

„Beschränken wir uns zunächst auf die Versuche, bei welchen ein Höchstwert der Belastung oder eine ausgeprägte Fließgrenze beobachtet wurde, so gelangen wir zu den Zahlentafeln 1 und 2, die die Elastizitätsgrenze ($\sigma_x - \sigma_y$) als Funktion des Manteldrucks angeben.

Nummer des Probekörpers	Manteldruck $\sigma_y = \sigma_z$	Elastizitätsgrenze $\sigma_x - \sigma_y$
	at	at

Zahlentafel 1. Marmor.

1 und 2	0	1360
3	235	2100
4	500	2650
5	685	2880
6	845	3210
7	1650	3900

Zahlentafel 2. Sandstein.

1	0	690
2	280	2040
3	555	2580
4	1550	3300
5	2475	4000

Man kann auch die entsprechenden Grenzkurven nach der Mohrschen Darstellung zeichnen, wie dies z. B. in der Abb. 31 für Marmor geschehen ist. Es zeigt sich — wie dies von Mohr angenommen wurde —, daß der Elastizitätsgrenze ein mit der Normalspannung wachsender Grenzwert der Schubspannung entspricht, der dann bei großen Werten des Normaldrucks (bei großem, allseitigem Druck) einem Höchstwert zustrebt. Die Feststellung dieses Höchstwertes stößt allerdings auf die Schwierigkeit, daß unter hohem, allseitigem Druck keine ausgeprägte Fließgrenze mehr beobachtet werden kann. Vergleicht man aber die Belastungszustände, die derselben bleibenden Längenänderung entsprechen, und zeichnet die Umhüllenden der entsprechenden Spannungskreise, so sieht man

(vergl. Abb. 32), daß diese Umhüllenden in der Tat in wagerechte Gerade ($\tau = \text{konst.}$) übergehen; d. h. unter sehr hohem, allseitigem Druck hängen Auftreten und Maß von bleibenden Formänderungen nur von dem Unterschied der Hauptspannungen ($\sigma_x - \sigma_z$) ab; Belastungszustände, bei denen dieser Unterschied derselbe bleibt, sind dann sozusagen gleichwertig. So fügen sich die von uns untersuchten spröden Stoffe unter hohem, allseitigem Druck derselben Gesetzmäßigkeit, die für zähe Stoffe, wie Metalle usw., bei gewöhnlichen Druckverhältnissen maßgebend ist.

Da bei sämtlichen Versuchen zwei Hauptspannungen, und zwar stets die kleineren, gleich groß waren, so lassen sich aus diesen Versuchen auf die Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Grundhypothese der Mohrschen Theorie, ob die mittlere Hauptspannung tatsächlich belanglos ist und die Elastizitätsgrenze nur von den äußersten Hauptspannungen abhängt, keine Folgerungen ziehen; für den besonderen Fall zweier gleicher Hauptspannungen wurde aber die Mohrsche Theorie durch die Versuche sehr schön bestätigt.

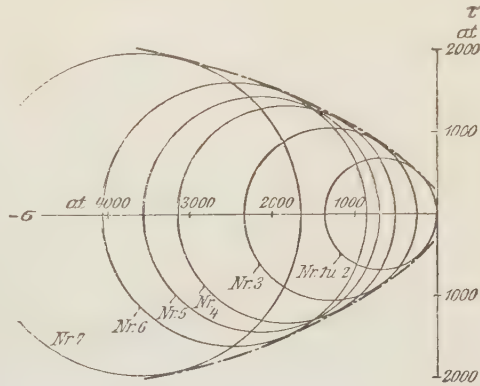


Abb. 31.

Elastizitätsgrenze des Marmors in der Mohrschen Darstellung.

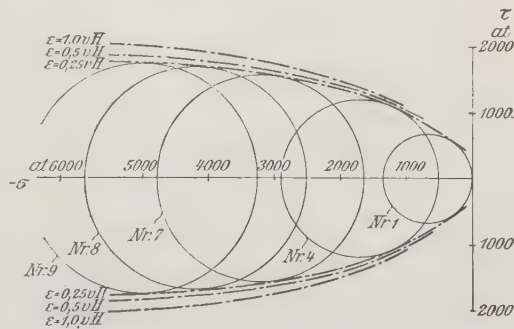


Abb. 32.

Kurven gleicher bleibender Dehnung in der Mohrschen Darstellung (Marmor).

Eine weitere Bekräftigung der Mohrschen Auffassung liefern die Risse und Faltungen, die an der Oberfläche der namentlich unter niedrigem Manteldruck beanspruchten Probekörper erscheinen und offenbar an die an Metallen beobachteten Fließfiguren erinnern. Diese sollen nach der Mohrschen Auffassung die Spuren derjenigen zur Oberfläche normalen Ebenen darstellen, längs deren die ersten bleibenden Gleitungen erfolgen. Auf dieser Grundlage kann man

den Winkel, den die an den Probekörpern beobachteten und zu der Druckrichtung symmetrischen Linienscharen einschließen, mit den durch die Theorie gelieferten Werten vergleichen. In der Mohrschen Darstellung wird nämlich der spitze Winkel φ zwischen zwei Gleitflächen durch den Winkel zwischen der Normalen der Grenzkurve und der σ -Achse gegeben (vergl. Abb. 13), so daß er aus den durch Versuche festgestellten Grenzkurven entnommen werden kann. Der Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung führt zu den Zahlentafeln 3 und 4, und zwar sind dabei die beiden

Manteldruck at	φ gemessen		φ beobachtet
	ohne Reduktion	reduziert	

Zahlentafel 3. Marmor.

0	54°	54°	53°
235	59°	58°	58°
500	72°	65°	63°
685	83°	70°	73°

Zahlentafel 4. Sandstein.

0	38°	38°	40°
280	70°	69°	63°
555	82°	73°	70°

letzten Spalten einander gegenüberzustellen, da die an den Probekörpern unmittelbar gemessenen Winkel erst auf die Gestalt der Probekörper bei Ueberschreitung der Elastizitätsgrenze — die sich übrigens von der ursprünglichen Gestalt nur unwesentlich unterscheidet — reduziert werden mußten. Zu dem Zweck wurden die Probekörper vor dem Versuch mit Skaleneinteilung versehen. Die Uebereinstimmung zwischen den berechneten und gemessenen Werten darf mit Rücksicht auf die durch die Umrechnung bedingte Unsicherheit als recht befriedigend bezeichnet werden. Man ist dabei auf die Versuche unter niedrigem Manteldruck beschränkt, da diese Oberflächenerscheinungen überhaupt nur dann auftreten, wenn die Formänderung unter abnehmender Belastung vor sich geht

Zusammenfassung und Schlußfolgerungen. Durch die Versuche unter allseitigem Druck wurde die Mohrsche Vorstellung von der Elastizitätsgrenze sehr schön bestätigt. Die Versuche ergaben, so wie dies die Mohrsche Theorie erfordert, eine Zunahme der

Elastizitätsgrenze mit wachsendem allseitigen Druck. Man darf die Annahme als bestätigt betrachten, daß die Elastizitätsgrenze durch einen Grenzwert der Schubspannung festgelegt ist, der mit der auf die Gleitfläche wirkenden Normalspannung zunimmt und bei sehr hohen Werten des Normaldrucks einem konstanten Höchstwert zustrebt, so daß sich die Theorie der größten Schubspannung oder die Theorie der größten Unterschiede der Hauptspannungen als Grenzfall ergibt.

Die Grundannahme der Mohrschen Theorie, daß die mittlere Hauptspannung belanglos ist, konnte, wie schon oben erwähnt, durch die Druckversuche allein nicht entschieden werden. Allerdings zeigen die ersten Zugversuche, die ich in neuester Zeit durchführte, daß sie kaum auf unbegrenzte Gültigkeit Anspruch erheben kann. So ergab ein Zugversuch unter allseitigem Druck mit einem Marmorstabe die Elastizitätsgrenze für folgende Werte der drei Hauptspannungen:

$$\sigma_z = 310 \text{ at}, \quad \sigma_y = \sigma_x = 4405 \text{ at}.$$

Wäre der Wert der mittleren Hauptspannung belanglos, so müßten beim Druckversuch die Werte

$$\sigma_z = \sigma_y = 310 \text{ at}, \quad \sigma_x = 4405 \text{ at}$$

entsprechen. Entnimmt man aber aus Abb. 31 den entsprechenden Wert von σ_x für $\sigma_z = 310 \text{ at}$, so gelangt man zu den Werten

$$\sigma_x = 2300 \text{ at}, \quad \sigma_y = \sigma_z = 310 \text{ at}.$$

Der Unterschied ist daher bei dem Zugversuch viel größer als bei demjenigen Druckversuch, wo die kleinste Hauptspannung denselben Wert hat. Dieser Punkt wird hoffentlich durch die weiteren Zugversuche aufgeklärt werden.“

Das in dem vorstehenden Bericht zuletzt erwähnte Einzelergebnis, daß die beiden Spannungszustände

$$\sigma_z = 310 \text{ at}, \quad \sigma_y = 310 \text{ at}, \quad \sigma_x = 2300 \text{ at}$$

und

$$\sigma_z = 310 \text{ at}, \quad \sigma_y = 4405 \text{ at}, \quad \sigma_x = 4405 \text{ at}$$

an der Elastizitätsgrenze des Marmors liegen, widerspricht scheinbar der Hypothese, daß bei gleichbleibender Hauptspannung σ_z die Spannung σ_y keinen Einfluß auf die Spannung σ_x ausübt. In Wirklichkeit ist jedoch ein solcher Widerspruch nicht vorhanden, denn die Hypothese setzt als selbstverständlich voraus, daß während des Versuches keine Ueberschreitungen der Elastizitätsgrenzen vorkommen, daß also der ganze Versuch innerhalb dieser Grenzen verläuft. Diese Voraussetzung wird namentlich beim *Zugversuch*

nicht erfüllt. Bei dem Uebergang des Probekörpers von dem Spannungszustand

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$$

in den Zustand

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 4405 \text{ at}$$

entstehen, wie die mikroskopischen Untersuchungen gezeigt haben, durch die Umlagerung der kleinsten Teile beträchtliche *bleibende* Formänderungen, also Ueberschreitungen der Elastizitätsgrenze. Hierdurch wird die Beschaffenheit des Probekörpers für den zweiten Versuchsabschnitt, für den Uebergang von dem Zustande

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 4405 \text{ at}$$

in den Zustand

$$\sigma_z = 310 \text{ at}, \quad \sigma_y = \sigma_x = 4405 \text{ at}$$

wesentlich geändert. Daher darf der Zugversuch mit dem Druckversuch, bei dem jene Ueberschreitungen nicht oder doch in geringerem Maße vorkommen, nicht ohne weiteres in Vergleich gestellt werden.

Wir erinnern an die bekannten Versuche von Bauschinger über die Verschiebung der Elastizitätsgrenze. Wird ein Eisenstab wiederholt dem gewöhnlichen Zugversuch

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = \kappa_5$$

unterworfen und dabei jedesmal die Elastizitätsgrenze κ_5 ein wenig überschritten, so gelingt es, die Elastizitätsgrenze allmählich hinaufzuschieben bis nahe an die Bruchgrenze. Der Grund liegt wie in unserem Falle offenbar darin, daß bei jedesmaliger Ueberschreitung der Grenze die Beschaffenheit des Probekörpers, seine Elastizitäts- und Festigkeitseigenschaften wesentlich geändert werden.

Die Fortsetzung der Versuche im Göttinger Laboratorium hat übrigens, wie Prof. v. Kármán mir mitteilt, ergeben, daß die Unterschiede zwischen Druck- und Zugversuch erheblich geringer sind, als man nach dem ersten, oben erwähnten Versuche annehmen durfte.

i) Weitere Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung. In der Zeitschrift Engineering vom 15. Dezember 1911 beschreiben Cook und Robertson Versuche mit dickwandigen Stahlrohren, die einem inneren hydrostatischen Druck bis an die Elastizitätsgrenze ausgesetzt wurden. Die Versuche hatten zunächst den Zweck, die verschiedenen Festigkeitshypothesen zu prüfen und zu vergleichen; sie geben aber auch Aufschluß über den Einfluß der mittleren Hauptspannung. Gemessen wurde an 27 Rohren: der innere Durchmesser d_1 , der äußere Durchmesser d_2

und der hydrostatische Druck, bei dem die Elastizitätsgrenze der Rohrwandungen überschritten wurde. Ferner wurde durch besondere Versuche die Elastizitätsgrenze κ_5 des Spannungszustandes

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = +\kappa_5$$

ermittelt. In einem Rohr, dessen Festigkeit durch den inneren hydrostatischen Druck p in Anspruch genommen wird, entsteht der maßgebende, an der Elastizitätsgrenze liegende Spannungszustand in den Punkten der *inneren* Rohrwand (vergl. Grashof, Festigkeitslehre, zweite Auflage, S. 311). Dieser Zustand wird bestimmt durch die Hauptspannungen

$$\sigma_x = -p, \quad \sigma_y = +p \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1}, \quad \sigma_z = +p \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1},$$

wenn mit ξ das Verhältnis $\frac{d_2}{d_1}$ der beiden Rohrdurchmesser bezeichnet wird. σ_x hat die Richtung des Rohrradialmessers, σ_y die Richtung der Rohrachse und σ_z die Richtung der Rohrtangente.

Nach der Hypothese I) ist die größte Hauptspannung σ_z für die Elastizitätsgrenze maßgebend. Wäre diese Annahme zutreffend, so würden die beiden oben bezeichneten Spannungszustände die Beziehung ergeben:

$$\kappa_5 = p \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1}$$

$$\text{oder} \quad \eta = \frac{p}{\kappa_5} = \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}. \quad (\text{I})$$

Nach der Hypothese II) soll die größte *Dehnung*

$$\frac{\sigma_z - m(\sigma_x + \sigma_y)}{\epsilon}$$

maßgebend sein. Unter dieser Annahme ergeben die beiden Spannungszustände die Bedingung:

$$p \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} - m \left(\frac{p}{\xi^2 - 1} - p \right) = \kappa_5$$

oder, wenn die Poissonsche Zahl $m = 0,3$ angenommen wird:

$$\eta = \frac{p}{\kappa_5} = \frac{10(\xi^2 - 1)}{13\xi^2 + 1}. \quad (\text{II})$$

Ferner bestimmt nach der Hypothese III) die *größte Schubspannung* $\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}$ die Elastizitätsgrenze. Wenn diese Annahme richtig wäre, so würde sich ergeben:

$$p \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} + p = \kappa_5$$

$$\text{oder} \quad \eta = \frac{p}{\kappa_5} = \frac{\xi^2 - 1}{2\xi^2}. \quad (\text{III})$$

Endlich bestimmt nach der Hypothese IV) die Gleichung 19) den Spannungszustand an der Elastizitätsgrenze:

$$(\sigma_y - \sigma_x) + (\sigma_y + \sigma_x) \cos \varphi = \alpha_5 (1 + \cos \varphi)$$

oder

$$\eta = \frac{p}{\alpha_5} = \frac{(\xi^2 - 1)(1 + \cos \varphi)}{2(\xi^2 + \cos \varphi)}. \quad (\text{IV})$$

Der aus den Versuchsergebnissen abgeleitete Wert von $\cos \varphi$ ist 0,30. Unsere Hypothese IV) fordert demnach:

$$\eta = \frac{p}{\alpha} = 0,65 \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 0,30}. \quad (\text{IV})$$

Cook und Robertson, die, wie es scheint, unsere Hypothese nicht kannten, folgern aus ihren Versuchen die *empirische* Formel:

$$\eta = 0,6 \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2},$$

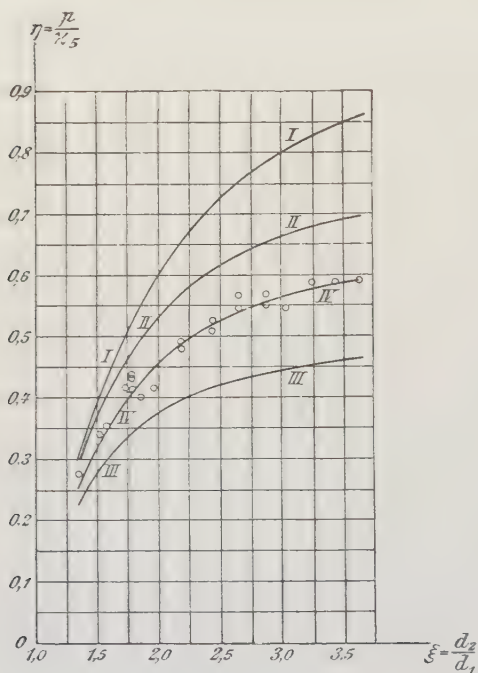


Abb. 33.

die von der Gleichung IV) nur wenig abweicht. In der Abb. 33 werden die Gleichungen I), II), III), IV) durch die ebenso bezeichneten Kurven dargestellt, während die Versuchsergebnisse durch die Koordinaten ξ , η der umkreisten Punkte angegeben sind. Die Zeichnung zeigt, daß die Versuchsergebnisse von den ersten drei Hypothesen weit abweichen, während sie sich unserer Hypothese IV) in durchaus befriedigender Weise anschließen. Ein Einfluß der mittleren Hauptspannung σ_y auf die beiden anderen Hauptspannungen σ_x und σ_z

ist aus den Versuchen nicht zu erkennen, obgleich das Durchmesserverhältnis ξ zwischen 1,35 und 3,65 und also das Spannungsverhältnis $\sigma_x : \sigma_y : \sigma_z$ zwischen den ziemlich weiten Grenzen:

$$-1 : +1,22 : +3,44 \quad \text{und} \quad -1 : +0,08 : +1,16$$

sich bewegt.

12. Literarische Notizen. Der Inhalt der vorstehenden Abhandlung wurde den folgenden zwei Aufsätzen entnommen:

1. *Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes*; Zivilingenieur 1882, S. 113.

2. *Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1900, S. 1524.

Die im Abschnitt 2 abgeleitete und durch Gleichung 1) dargestellte Beziehung findet sich schon bei *Cauchy*, Exercices de Mathématiques 1829, T. IV, p. 41.

Die im Abschnitt 5 beschriebene Darstellung eines Spannungszustandes durch einen Kreis wurde auf einem anderen Wege abgeleitet von *Culmann*, Graphische Statik 1866, S. 226. Ausführlich wird dieser Gegenstand behandelt von *Jung*, Zusammenhang verschiedener Abbildungen der elastischen Spannungsverteilung; Technische Blätter 1903, S. 114.

Eine Anwendung der neuen Hypothese gibt *Roth*, Die Festigkeitstheorien und die von ihnen abhängigen Formeln des Maschinenbaues; Zeitschrift für Mathematik und Physik 1903, S. 285.

Abhandlung VI.

Die Lehre vom Erddruck.

I. Einleitende Bemerkungen. Die Bestimmung des Erddrucks gegen eine Stützmauer ist unter allen Umständen eine statisch unbestimmte Aufgabe, weil die Zahl der unbekannten Größen die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen bei weitem übertrifft. Ein berühmter Physiker soll, als er gefragt wurde, ob er die Berechnung für möglich halte, geäußert haben, sie sei vielleicht möglich, wenn die Entstehungsgeschichte des betreffenden Erdkörpers bekannt sei. Ohne Zweifel hat er hiermit andeuten wollen, man müsse die kleinen Formänderungen der Mauer und des Erdkörpers, die bei der Entstehung des Bauwerkes eintreten, in Betracht ziehen, um aus den gesetzmäßigen Beziehungen zwischen den Formänderungen und den inneren Kräften in ähnlicher Weise wie bei der Berechnung *elastischer* Bauwerke die überzähligen Unbekannten abzuleiten. Jene Beziehungen sind aber unbekannt, denn etwas Aehnliches wie das Hooksche Gesetz besteht für unelastische Körper nicht. Daher ist der Versuch, auf diesem Wege der Lösung näherzukommen, ganz aussichtslos. Es bleibt nur der Weg übrig, der seit jeher beschritten wurde: man muß Annahmen über die Spannungszustände des Erdkörpers einführen und ihre Zulässigkeit oder ihre Wahrscheinlichkeit durch die Erfahrung festzustellen suchen. Die größte Schwierigkeit, der man auf diesem Wege begegnet, besteht in der Gewinnung zuverlässiger Versuchsergebnisse. Mit den Ergebnissen der zahllosen Versuche, die bis jetzt angestellt worden sind, läßt sich innerhalb weiter Grenzen so ziemlich alles beweisen, was gewünscht wird. Wenn unter solchen Umständen manche Praktiker die Rechnung ganz ablehnen und erklären, daß die Erfahrungen, die sie an eingestürzten und nicht eingestürzten Stützmauern gewonnen haben, für ihre Zwecke ge-

nügen, so läßt sich hiergegen kaum etwas einwenden. Eine große praktische Wichtigkeit kann den theoretischen Erörterungen über den Erddruck also nicht zuerkannt werden. Und doch wird jeder denkende Praktiker das Bedürfnis empfinden, die Ursachen seiner Beobachtungen und Erfahrungen sich klarzumachen, indem er die Entstehung der Kräfte, die er in Rechnung bringt, soweit wie möglich verfolgt. Durch solche Ueberlegungen wird er sich eine Theorie bilden, auch wenn er den Gebrauch mathematischer Formeln hierbei für unnötig hält. Soll eine Theorie befriedigen, so wird von ihr in *erster* Linie zu fordern sein, daß die Annahmen über die Spannungszustände im Erdkörper den Gesetzen der Statik nicht widersprechen, und ferner in *zweiter* Linie, daß jene Annahmen nicht nur möglich, sondern auch wahrscheinlich sind. Wir beschreiben zunächst die nach Rankine benannte neuere Theorie, wobei wir die in der Abhandlung V gegebenen graphischen Darstellungen benutzen.

2. Die Annahmen der Theorie. *Rankine* geht aus von der Betrachtung der Spannungszustände in einem kohäsionslosen und gleichartigen Erdkörper, der nur von einer ebenen Oberfläche begrenzt, seitlich aber unbegrenzt ist. Die *Gleichartigkeit* fordert, daß die Eigenschaften, welche auf den Gleichgewichtszustand eines Körperpunktes Einfluß ausüben können, also die natürliche Beschaffenheit, das spezifische Gewicht und der Reibungswinkel ψ in allen Teilen des Erdkörpers übereinstimmen, und daß *alle Körperpunkte einer zur Oberfläche parallel gestellten Ebene in demselben Spannungszustande sich befinden*. Die maßgebenden *Festigkeitseigenschaften* eines kohäsionslosen Erdkörpers bestehen darin, daß sowohl seine Zugfestigkeit als auch seine Schubfestigkeit gleich null ist. Einer Verschiebung der Körperteile gegeneinander setzt sich also kein Festigkeitswiderstand, sondern nur die Reibung entgegen, deren Größe dem Normaldruck der Trennungsfläche proportional angenommen wird. Die Grenzwerte der Schubspannung τ eines Flächenelements, welches zwei Körperteile voneinander trennt, sind also von dem Normaldruck σ dieser Fläche abhängig durch die Grenzbedingung

$$+\sigma \operatorname{tg} \psi > \tau > -\sigma \operatorname{tg} \psi. \quad (1)$$

Die allgemeinen Gesetze des Spannungszustandes eines Körperpunktes, die in der Abhandlung V abgeleitet und graphisch dargestellt worden sind, gelten auch für den Erdkörper; denn die einzige Voraussetzung, die jenen Gesetzen zugrunde gelegt wurde,

daß nämlich die Spannungszustände der Körperpunkte mit ihrem Orte *stetig* sich ändern, gilt auch für den gleichartigen Erdkörper.

3. Die Hauptachsen eines Punktes des Erdkörpers. Wir erinnern daran, daß in jedem Körperpunkte A drei Ebenen rechtwinklig sich schneiden, deren Flächenelemente im Punkte A von allen anderen sich dadurch unterscheiden, daß ihre Schubspannungen gleich null sind (V, 3). Diese *Hauptebenen des Punktes A* schneiden sich in seinen *Hauptachsen x, y, z* , und ihre Normalspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ werden die *Hauptspannungen* des Punktes A genannt. Die Richtung *einer* der drei Hauptspannungen, die im folgenden mit σ_y bezeichnet werden soll, ist für jeden Punkt durch die Bedingungen der Symmetrie gegeben: sie ist wagerecht und zur Erdoberfläche parallel gerichtet; denn die zu dieser Richtung rechtwinklig gestellte xz -Ebene zerlegt den Erdkörper in zwei vollkommen symmetrisch geformte Teile und kann aus diesem Grunde keine Schubspannungen übertragen. In dem besonderen Falle, wenn die Erdoberfläche wagerecht gestellt ist, sind aus dem genannten Grunde alle lotrechten Ebenen Hauptebenen eines jeden Körperpunktes, die in diesem Punkte Spannungen von gleicher Größe übertragen. In jedem anderen Falle, wenn also die Erdoberfläche geneigt ist, sind die Richtungen der Hauptspannungen σ_x und σ_z unbekannt und können nur in gewissen Grenzfällen bestimmt werden.

In fast allen Anwendungen der Theorie des Erddrucks kommen nur die Spannungen der Flächenelemente in Betracht, die durch die y -Achsen der Körperpunkte gehen, und deren Spannungen durch den Hauptkreis xz in bekannter Weise dargestellt werden. Die folgenden Betrachtungen beschränken sich daher auf diesen Kreis.

4. Der feste Punkt des Hauptkreises xz . Von allen Flächenelementen, welche durch die y -Achse eines Körperpunktes A gelegt werden können, hat nur eins, nämlich das zur Erdoberfläche parallel gestellte Flächenelement, eine nach Größe und Richtung *unveränderliche* Spannung ρ_0 . Alle übrigen Spannungen im Körperpunkte A können innerhalb gewisser Grenzen verschiedene Werte annehmen. Die Hauptkreise xz aller möglichen Spannungszustände des Punktes A gehen also durch einen *festen Punkt R_0* , dessen Koordinaten durch die Normalspannung σ_0 und die Schubspannung τ_0 jenes Flächenelements in folgender Weise bestimmt werden können.

Das in Abb. 2 dargestellte Erdprisma $ABCD$ wird durch drei Paare von Parallelebenen begrenzt. Die beiden Ebenen AB und AD

gehen durch die y -Achse des Körperpunktes A ; AD ist lotrecht, AB parallel zur Erdoberfläche CD gestellt. Die beiden Seitenflächen $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ schneiden die y -Achse rechtwinklig, bilden also eine Hauptebene eines jeden ihrer Punkte. Die von diesen

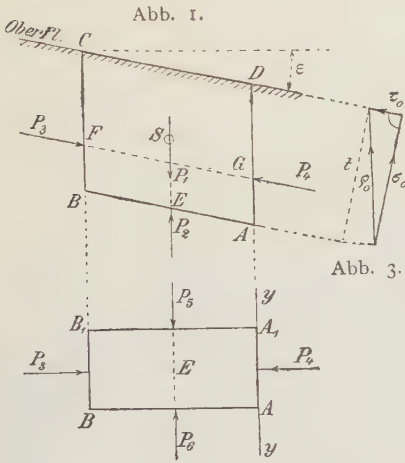


Abb. 1.

Abb. 2.

Abb. 3.

beiden Flächen aufzunehmenden Normalkräfte P_5 , P_6 fallen zusammen, sind der Symmetrie wegen gleich groß und bilden also eine Gleichgewichtsgruppe. Daher müssen auch die vier übrigen Kräfte: das Gewicht P_1 des Erdprismas und die in den Seitenflächen AB , BC , AD auf das Prisma übertragenen Erd drücke P_2 , P_3 , P_4 eine Gleichgewichtsgruppe bilden:

$$P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp P_4 \equiv 0.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Erdoberfläche CD *unbelastet* ist. Die Gleichartigkeit des Erdkörpers, insbesondere die Voraus-

setzung, daß alle Körperpunkte einer zur Erdoberfläche parallel gestellten Ebene in demselben Spannungszustande sich befinden, fordert, daß die beiden Kräfte P_1 , P_2 im Schwerpunkte E der Seitenfläche AB sich schneiden, und daß die Kräfte P_3 , P_4 gleich groß und parallel gerichtet sind. Dies ist nur möglich, wenn

$$P_1 \equiv ++P_2 \quad \text{und} \quad P_3 \equiv ++P_4$$

ist. Gibt man der Fläche AB die unendlich kleine Größe dF und bezeichnet man ihren Abstand von der Erdoberfläche mit t , ferner das Gewicht der Volumeneinheit Erde mit γ , so folgt, da

$$P_1 = \gamma t dF \quad \text{und} \quad P_2 = q_0 dF$$

ist, daß die Spannung q_0 des zur Erdoberfläche parallel gestellten Flächenelementes AB vertikal gerichtet ist und die Größe $t\gamma$ hat.

Wir bezeichnen den Neigungswinkel der Erdoberfläche mit ε und geben demselben das positive Vorzeichen, wenn die Oberfläche von links nach rechts fällt. Die beiden Komponenten der Spannung q_0 (Abb. 3) haben also die Größen:

$$\sigma_0 = -q_0 \cos \varepsilon \quad \text{und} \quad \tau_0 = q_0 \sin \varepsilon,$$

oder, wenn γ als Gewichtseinheit gewählt wird:

$$\sigma_0 = -t \cos \varepsilon \quad \text{und} \quad \tau_0 = t \sin \varepsilon.$$

Diese Formeln bestimmen auch den *Sinn* der beiden Spannungen: die Normalspannung σ_0 ist stets negativ, während die Schubspannung τ_0 das Vorzeichen von $\sin \varepsilon$ hat (vergl. V, 2). Wir erinnern daran, daß in der graphischen Darstellung des Spannungszustandes (Abb. 4) die negative σ -Achse wagerecht nach *links*, die positive τ -Achse lotrecht nach *oben* zeigt, und daß die Schubspannung τ das positive Vorzeichen trägt, wenn sie das Körperelement im Sinne der Uhrzeigerbewegung zu drehen sucht. Die Bedingung, daß die beiden Kräfte P_3, P_4 in Abb. 1 zusammenfallen müssen, gilt auch dann, wenn das Prisma $ABCD$ unendlich klein ist. Es folgt hieraus, daß die beiden durch die y -Achse eines jeden Körperpunktes A gelegten Flächenelemente AB und AD , von denen die erste parallel zur Erdoberfläche, die zweite lotrecht gestellt ist, *konjugierte* Flächenelemente bilden; denn die Spannung von AB ist parallel zu AD und die Spannung von AD parallel zu AB gerichtet.

5. Die Grenzlinien der Hauptkreise eines Körperpunktes. Die Spannungskomponenten σ und τ einer jeden Trennungsfläche sind an die durch Gleichung 1) ausgedrückte Bedingung gebunden:

$$+\sigma \operatorname{tg} \psi > \tau > -\sigma \operatorname{tg} \psi.$$

Die beiden geraden Linien, welche durch die Gleichungen

$$\tau = \pm \sigma \operatorname{tg} \psi$$

gegeben sind, bezeichnen also die *Grenzen*, zwischen welchen alle Hauptkreise eines jeden Körperpunktes liegen müssen. Diese beiden Geraden AG_1 und AG_2 gehen durch den Anfangspunkt A der Koordinaten σ, τ und schließen mit der σ -Achse den Reibungswinkel ψ ein. Jeder durch den festen Punkt R_0 gehende Kreis, dessen Mittelpunkt auf der σ -Achse liegt, und der die Grenzlinien nicht überschreitet, bildet die Darstellung eines möglichen Spannungszustandes im Körperpunkte A .

Die Abb. 4 zeigt *einen* der möglichen Spannungszustände für den Punkt A , dessen Abstand von der Oberfläche

$$t = AR_0$$

ist. Der *erste* Pol der graphischen Darstellung ist der zweite Schnittpunkt Q der Geraden AR_0 mit dem Hauptkreise; denn die Sehne QR_0 muß zur Oberfläche parallel gerichtet sein. Um den *zweiten* Pol P zu bestimmen, ist die lotrechte Sehne QV zu ziehen. Der Pol P ist der Schnitt der Sehne VR_0 mit der σ -Achse, weil die beiden durch den Punkt A gelegten Flächenelemente von den Stellungen QR_0

und QV einander konjugiert sind. Um für den dargestellten Zustand die Spannungen ϱ , σ und τ irgend eines anderen durch die y -Achse des Körperpunktes A gelegten Flächenelements r zu bestimmen, ist die Sehne QR parallel zu diesem Flächenelement zu

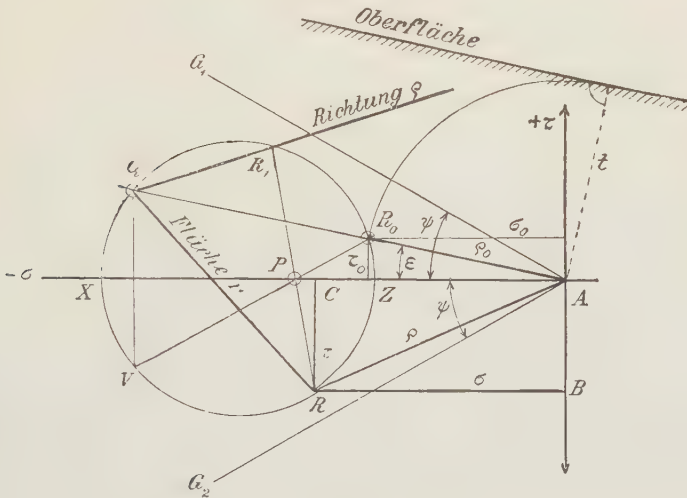


Abb. 4.

ziehen; die Größen der Spannungen ϱ , σ und τ werden dann durch die Strecken AR , BR und CR dargestellt. Zieht man ferner durch den Pol P die Sehne RPR_1 , so bestimmt die Gerade QR_1 die Richtung der Spannung ϱ (V, 5).

6. Die beiden Grenzzustände eines Körperpunktes A . Die beiden Hauptkreise $R_0g_1g_2$ und $R_0G_1G_2$ (Abb. 5), die durch den festen Punkt R_0 gehen und die Grenzlinien AG_1 , AG_2 berühren, bilden die Darstellung der beiden Grenzen für die Spannungszustände des Körperpunktes A . Die zugehörigen Pole p , q und P , Q werden bestimmt, wie im vorigen Abschnitt beschrieben worden ist.

Für den unteren, durch den Kreis $R_0g_1g_2$ dargestellten Grenzzustand ist die Strecke Az bestimmend: sie bezeichnet die kleinste Normalspannung, die im Punkte A überhaupt vorkommen kann. Diese Spannung hat die Richtung qx , das zugehörige Flächenelement ist also parallel zu qz gestellt. qx und qz sind in diesem Spannungszustande die Richtungen der Hauptachsen des Körperpunktes A . Wenn durch irgend eine äußere Einwirkung der von der Strecke Az

dargestellte Minimalwert von σ sich verringert, so wird das Gleichgewicht des Körperpunktes A gestört: der Hauptkreis überschreitet die Grenzlinien in den Punkten g_1 und g_2 , d. h.: in den beiden Flächenelementen von den Stellungen qg_1 und qg_2 überschreitet die

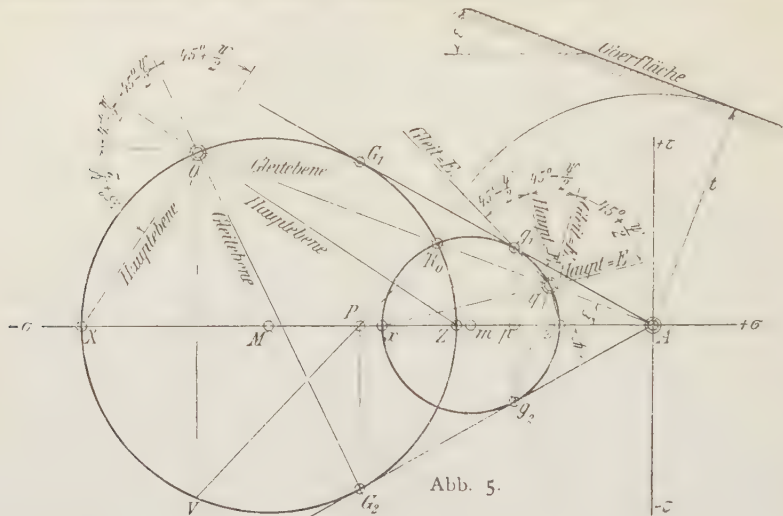


Abb. 5.

Schubspannung τ den Maximalwert $\sigma \tan \psi$, und infolgedessen verschieben sich die Erdteilchen bei A in diesen beiden Flächen gegeneinander. Die Geraden qg_1 und qg_2 bestimmen also die Stellungen der Gleitflächen im Punkte A . Die beiden Gleitflächen sind konjugierte Flächen; denn die Gerade g_1g_2 geht durch den Pol p . Da der Zentriwinkel g_1mg_2 gleich $180^\circ - 2\psi$ ist, so schließen die Gleitflächen mit den Richtungen qx und qz der Hauptspannungen σ_z und σ_x die Winkel $45^\circ + \frac{\psi}{2}$ und $45^\circ - \frac{\psi}{2}$ ein.

Im oberen, vom Kreise QG_1G_2 dargestellten Grenzzustande erreicht in dem Flächenelement von der Stellung QX die Normalspannung σ ihren größtmöglichen Wert AX . Wenn diese Grenze überschritten wird, so wird das Gleichgewicht gestört, indem sich die Erdteilchen bei A in zwei Gleitflächen von den Stellungen QG_1 und QG_2 gegeneinander verschieben. In diesem oberen Grenzzustande bestimmen QX und QZ die Stellungen der Hauptebenen. Die konjugierten Gleitflächen QG_1 , QG_2 bilden die beiden Winkel $90^\circ + \psi$ und $90^\circ - \psi$, die von den Richtungen der Hauptspannungen σ_z und σ_x halbiert werden.

Wenn, wie bisher angenommen wurde, die Oberfläche des Erdkörpers eine Ebene ist, so sind die graphischen Darstellungen

der Grenzzustände für alle Körperpunkte geometrisch ähnlich. Für jeden der beiden Grenzzustände sind also die Richtungen der Hauptachsen und die Stellungen der Gleitflächen überall dieselben. *Ein kohäsionsloser, gleichartiger Erdkörper mit ebener Oberfläche hat demnach ebene Gleitflächen.* Die Bewegung, mit der die Störung des Gleichgewichts beginnt, besteht darin, daß sich die Erdteilchen in zwei Scharen von parallelen Gleitflächen gegeneinander verschieben.

Zwischen den Größen, die bei den Grenzzuständen in Betracht kommen, ergeben sich folgende Beziehungen.

Aus Abb. 5 ist unmittelbar zu ersehen, daß

$$\frac{MG_1}{MA} = \frac{mg_1}{mA} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{\sigma_x + \sigma_z} = \sin \psi$$

ist. Für jeden der beiden Grenzzustände ist daher:

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_x} = \frac{1 - \sin \psi}{1 + \sin \psi} = \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\psi}{2} \right) \quad (2)$$

und

$$Ax : Am : Az = AX : AM : AZ = (1 + \sin \psi) : 1 : (1 - \sin \psi).$$

Ferner ersieht man aus der Zeichnung:

$$Aq + AR_0 = 2 \, Am \cos \varepsilon$$

und

$$Aq \cdot AR_0 = \bar{Am}^2 \cos^2 \psi.$$

Folglich ist für den *unteren* Grenzzustand:

$$AR_0 = t = Am (\cos \varepsilon + \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \psi}).$$

Auf gleichem Wege ergibt sich für den *oberen* Grenzzustand:

$$AR_0 = t = AM (\cos \varepsilon - \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \psi}).$$

Aus den vorstehenden Gleichungen erhält man die Größen der Hauptspannungen für den *unteren* Grenzzustand:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= - \frac{t (1 + \sin \psi)}{\cos \varepsilon + \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \psi}} = Ax \\ \sigma_z &= - \frac{t (1 - \sin \psi)}{\cos \varepsilon + \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \psi}} = Az \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

und für den *oberen* Grenzzustand:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= - \frac{t (1 + \sin \psi)}{\cos \varepsilon - \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \psi}} = AX \\ \sigma_z &= - \frac{t (1 - \sin \psi)}{\cos \varepsilon - \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \psi}} = AZ. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

7. Besondere Fälle. Wenn die Oberfläche des Erdkörpers *wagerecht*, der Winkel ε also gleich null ist, so nimmt die Darstellung der Grenzzustände die in Abb. 6 angegebene Form an. Der Punkt R_0 fällt mit den Punkten x und Z , der Pol q fällt mit z und der Pol Q mit X zusammen. Im *unteren* Grenzzustande ist die numerisch

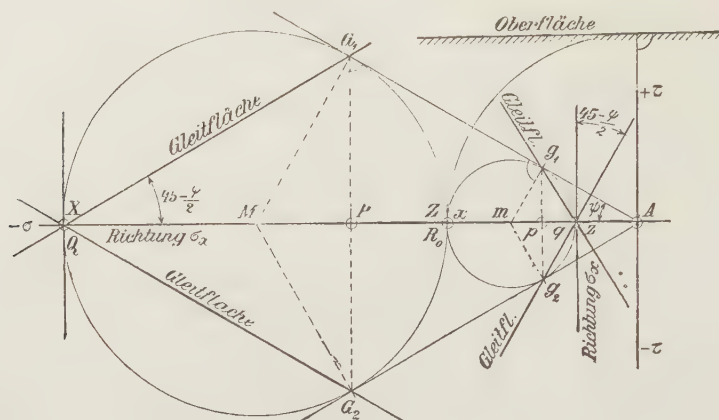


Abb. 6.

größere Hauptspannung σ_z lotrecht, die kleinere σ_x wagerecht, während im *oberen* Grenzzustande die numerisch größere Hauptspannung σ_x die horizontale Richtung hat. Wie in Abb. 5 schließt die numerisch größere Hauptspannung σ_x mit den Gleitflächen Winkel von der Größe $\left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right)$ ein.

Für den *unteren* Grenzzustand ist

$$\sigma_x = -t \quad \text{und} \quad \sigma_z = -t \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right), \quad (5)$$

und für den *oberen* ist

$$\sigma_z = -t \quad \text{und} \quad \sigma_x = -t \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right). \quad (6)$$

Wenn die unbegrenzte Oberfläche die Neigung der natürlichen Böschung hat, wenn also ε gleich ψ ist, so fallen, wie Abb. 7 zeigt, die beiden Grenzzustände zusammen, d. h. jeder Punkt des Erdkörpers befindet sich in dem einzig möglichen Spannungszustande. Die beiden Pole q und Q fallen auf den festen Punkt R_0 . Die Richtungen QX , QZ der beiden Hauptachsen bilden mit der Vertikalen die Winkel $\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right)$ und $\left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right)$. Von den beiden

wandungen kommt hierbei nicht ins Spiel. Eine *Verminderung* des Druckes σ_z würde ebenso wie eine Verminderung der durch den Winkel ψ bestimmten inneren Reibung eine Störung des Gleichgewichts sofort zur Folge haben. Andererseits würde die Störung auch durch die geringste *Vergrößerung* des Druckes σ_x herbeigeführt werden können. Die Spannung σ_z spielt sonach die Rolle eines *passiven Widerstandes* gegen eine Bewegung, die der aktive Druck σ_x herbeizuführen bestrebt ist.

Da das Verhältnis der beiden Hauptspannungen, also der beiden Druckhöhen DB , EC durch die Gleichung 2):

$$\sigma_x : \sigma_z = DB : EC = (1 + \sin \psi) : (1 - \sin \psi)$$

bekannt ist, so können die *Richtungen* der beiden Spannungen auch auf folgendem Wege bestimmt werden: Man zieht in irgend einem

Kreise (Abb. 9) den Durchmesser $HCMB$ parallel zur Oberfläche des Erdkörpers, trägt den Zentriwinkel CMR gleich $(90^\circ - \psi)$ auf und legt durch den Schnittpunkt H der Kreistangente RH mit dem Durchmesser BC die Horizontale HEA_2A_1D . Hierdurch bestimmt man die

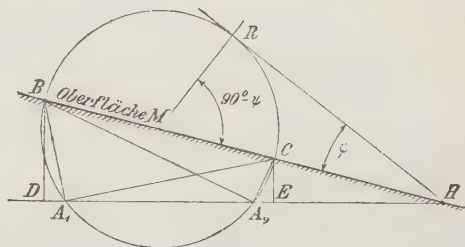


Abb. 9.

Richtungen der Hauptspannungen A_1B , A_1C für den *unteren* und A_2B , A_2C für den *oberen* Grenzzustand; denn, wie Gleichung 2) fordert, ist

$$HB : HC = BD : CE = (1 + \sin \psi) : (1 - \sin \psi).$$

9. Anwendungen. Die im vorstehenden beschriebenen Eigenschaften eines unbegrenzten, gleichartigen Erdkörpers würden nur dann eine praktische Bedeutung haben, wenn sie auf *begrenzte* Erdkörper übertragen und insbesondere auf die Bestimmung des Erddrucks gegen Stützmauern angewandt werden dürften. Auf den ersten Blick erkennt man, daß eine allgemeine und unbedingte Anwendung *nicht* statthaft sein kann. Zerlegt man nämlich einen unbegrenzten Erdkörper

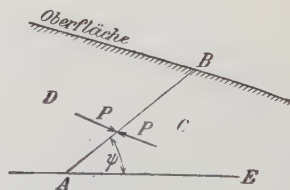


Abb. 10.

(Abb. 10) durch eine Trennungsebene AB in zwei Teile C und D , so muß selbstverständlich der Teil C gegen D den-

selben Druck P übertragen wie umgekehrt D gegen C . Es würde aber ein Irrtum sein, wenn man annehmen wollte, daß jede der beiden Stützmauern, durch die man einen der beiden Teile C und D ersetzen kann, diesen Druck P aufzunehmen hätte; denn man braucht nur den Winkel EAB gleich dem Böschungswinkel ψ zu wählen, um sofort zu erkennen, daß die beiden Drücke gegen die Stützmauern sehr erheblich voneinander abweichen können. In diesem Falle würde der Erdkörper C ohne Stützung im Gleichgewicht sich befinden und also gar keinen Erddruck auf die Mauer D übertragen. Der Unterschied zwischen den beiden Fällen ergibt sich aus der folgenden Ueberlegung.

Wird der Erdkörper D (Abb. 11) durch eine Mauer gestützt, so können sich die Spannungszustände in den Punkten E, F einer zur Erdoberfläche parallel gestellten Ebene genau in derselben Weise bilden wie im unbegrenzten Erdkörper. In dem Punkte E , unmittelbar neben der Mauer, kann ebenso wie in dem entfernter liegenden Punkte F die Hauptspannung σ_x hervorgerufen werden durch den *hydrostatischen* Druck der zu jener Spannung parallel gestellten Erdschichten, und die Mauer ist ebenso wie der

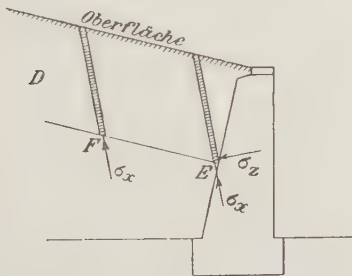


Abb. 11.

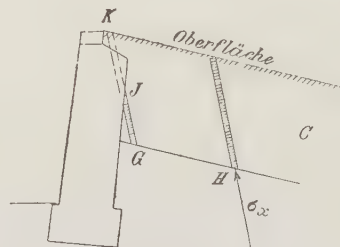


Abb. 12.

Erdkörper C imstande, die passiven Widerstände zu leisten, welche die Störung des Gleichgewichtes durch die Wirkung der Drücke σ_x verhindern. Es besteht also keine Ursache, welche die Gleichartigkeit der Spannungszustände in einer zur Oberfläche parallel gestellten Ebene stören könnte. Selbstverständlich wird hierbei vorausgesetzt, daß nicht etwa absichtlich solche Störungen, z. B. durch besondere Lagerung der angeschütteten Erdschichten oder durch Stampfen der Erdmasse in der Nähe der Stützmauer herbeigeführt worden sind.

Wird dagegen der Erdkörper C (Abb. 12) durch eine Mauer gestützt, so wird jene Gleichartigkeit der Spannungszustände durch

das Vorhandensein der Mauer gestört; denn die Erdschicht GK , die im unbegrenzten Erdkörper durch ihren hydrostatischen Druck die Spannung σ_x im Punkte G erzeugt, wird durch die Mauer zum Teil beseitigt, und man darf nicht voraussetzen, daß der Druck der Mauer gegen diese Erdschicht im Punkte J die Wirkung des Gewichtes der beseitigten Erdschicht JK ersetzt. Die Spannungszustände in den Punkten G und H einer zur Oberfläche parallel gestellten Ebene GH weichen also in der Nähe der Mauer unzweifelhaft voneinander ab. Es wird jedoch schwerlich gelingen, Art und Größe der Abweichungen auf theoretischem Wege oder durch Versuche festzustellen.

Aus der vorstehenden Betrachtung schließen wir, daß die Lehre vom Erddruck im gleichartigen, unbegrenzten Erdkörper auf die Untersuchung der Stabilität von Stützmauern nur in solchen Fällen anwendbar ist, wenn die zur Hauptspannung σ_x parallel gestellten Schichten unten von der Mauer und oben von der Oberfläche begrenzt werden. Hiermit soll jedoch nur behauptet werden, daß in den bezeichneten Fällen der Erdkörper gleichartig sein kann, nicht daß er gleichartig sein muß. Abweichungen können in allen Fällen vorkommen, und da sie von Zufälligkeiten abhängen, so entziehen sie sich der Beobachtung und der Berücksichtigung. Die Ermittlung des Erddrucks gegen eine Stützwand bleibt also unter allen Umständen eine statisch unbestimmte Aufgabe. Aber die Voraussetzung der Gleichartigkeit des Erdkörpers ist in allen Fällen, wo sie zulässig ist, die einfachste und die natürlichste, und sie steht weder mit einer bekannten Erfahrungstatsache, noch mit den Gesetzen der Statik in Widerspruch.

Man hat hierbei zu beachten, daß ein neu angeschütteter Erdkörper nicht in einem dauernden Spannungszustande sich befindet. Erdkörper und Stützmauer setzen sich, es finden Bewegungen statt, die jahrelang andauern. Von noch längerer Dauer sind die Einflüsse der Witterung, des den Boden durchsickernden Wassers und in manchen Fällen die Einwirkungen der Erschütterungen, denen der gestützte Erdkörper ausgesetzt ist. Die kleinen Bewegungen der Erdteilchen gegeneinander, die von allen diesen Ursachen herbeigeführt werden, haben zur Folge, daß Ungleichmäßigkeiten zwischen den Spannungszuständen der benachbarten Erdteilchen sich ausgleichen, daß also der Erdkörper dem gleichartigen Spannungszustande sich nähert, der von der Rankineschen Theorie vorausgesetzt wird. Die Voraussetzung, daß dieser Zustand mit der Zeit vollkommen erreicht wird, erscheint daher als eine

brauchbare Rechnungsgrundlage. Man erhebt hiergegen den Einwand, daß die Erddruckversuche einen Reibungswiderstand zwischen Mauer und Erde auch in solchen Fällen ergeben haben, in denen jener Theorie zufolge dieser Widerstand gleich null ist, z. B. bei lotrechter Stützwand und wagerechter Erdoberfläche. Dieser Einwand wird durch die vorstehenden Bemerkungen widerlegt; denn die Erddruckversuche beziehen sich auf den Zustand unmittelbar nach der Anschüttung des Erdkörpers, also auf den Bewegungszustand, der jenen Reibungswiderstand erzeugt. Schon *Coulomb* hob bei der Darlegung seiner Theorie hervor, daß man auf den für die Standsicherheit der Stützmauer *günstigen* Reibungswiderstand mit Sicherheit nicht rechnen könne, indem er auf die Ursachen hinwies, die eine *ungünstige* Aenderung des Spannungszustandes herbeiführen könne.

10. Bestimmung des Erddruckes gegen eine ebene Wandfläche. Bei der Bestimmung des Druckes eines angeschütteten Erdkörpers gegen eine Stützmauer wird in der Regel vorausgesetzt, daß der Erdkörper vollkommen kohäsionslos sei und daß er im *unteren* Grenzzustande des Gleichgewichts sich befinde. Wenn, wie in den meisten Fällen wohl anzunehmen ist, beide Voraussetzungen nicht *genau* zutreffen, so sind die hierdurch herbeigeführten Fehler dem Sinne nach einander entgegengesetzt. Infolge der geringen Kohäsion wird der Erddruck etwas kleiner, infolge der Abweichung von dem Grenzzustande etwas größer, und man wird daher darauf rechnen können, daß beide Einflüsse wenigstens annähernd einander ausgleichen.

In Abb. 13 ist ein Fall dargestellt, in welchem der gestützte Erdkörper ABH als gleichartig angesehen werden kann, weil die durch den Fußpunkt A der Mauer gelegte Richtung AH der Hauptspannung σ_x innerhalb des gestützten Erdkörpers liegt. Der Kreis $q\alpha z$ bestimmt in bekannter Weise den unteren Grenzzustand für den Fußpunkt A . Die Gerade qz gibt die Richtung der Hauptspannung σ_x und ist also parallel zu AH . Indem man die Sehne qr parallel zur Wandfläche AB der Stützmauer $ABCD$ und darauf die Sehne rp_1 durch den Pol p zieht, erhält man die Größe

$$q = Ar = AE$$

der Spannung der Fläche AB im Punkte A und die Richtung qr_1 dieser Spannung. Das Dreieck ABE zeigt die Größe und zugleich die Verteilung des Erddruckes R gegen die ganze Wandfläche AB .

Dieser Druck hat die Richtung r_1q und für eine Mauer von 1 m Länge die Größe

$$R = \frac{1}{2} \gamma \cdot AB \cdot AE.$$

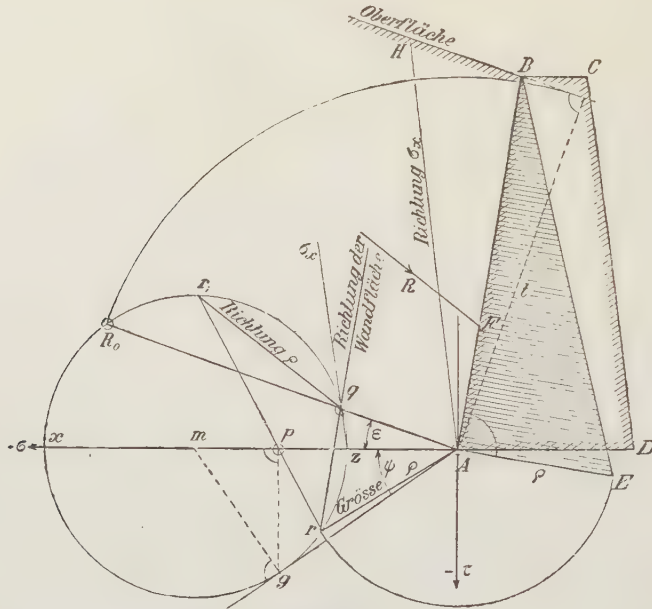


Abb. 13.

Der Angriffspunkt F des resultierenden Druckes R wird durch die Bedingung

$$AF = \frac{1}{3} AB$$

bestimmt. Der Maßstab der Zeichnung ist 1 : 100. Demnach ist im vorliegenden Falle:

$$AB = 5 \text{ m}, \quad AE = 2,0 \text{ m},$$

und wenn das Gewicht γ eines Kubikmeters Erde gleich 1800 kg angenommen wird, ergibt sich:

$$R = 900 \cdot 5 \cdot 2 = 9000 \text{ kg}.$$

In dem zweiten durch Abb. 14 dargestellten Beispiele ist der von der Mauer $ABCD$ gestützte Erdkörper *nicht* gleichartig, weil die Richtung von σ_x :

$$AH \parallel qz$$

nicht in dem Erdkörper ABE liegt. In einem solchen Falle läßt sich der Wanddruck R durch Interpolieren auf folgendem Wege bestimmen. Man lasse die Wandfläche nacheinander die Lagen AE ,

vorliegenden Beispiele. Man wird also keinen erheblichen Fehler begehen, wenn man annimmt, daß der Wanddruck R *rechtwinklig* zur Wandfläche AB gerichtet ist, wie es *genau* der Fall sein würde, wenn die Wandfläche AB mit AII zusammenfiel. Aus demselben Grunde ist anzunehmen, daß die Lage des Angriffspunktes F des resultierenden Druckes R durch die Bedingung

$$AF = \frac{1}{3} AB$$

bestimmt wird.

Wir unterlassen es, weitere Beispiele hier vorzuführen, weil die Uebertragung des Verfahrens auf andere Fälle, in denen z. B. die Wandfläche und die Erdoberfläche nicht eben sind, oder die Oberfläche belastet ist, keine Schwierigkeiten bietet.

II. Die Grenzzustände des Gleichgewichtes in einem unbegrenzten Erdkörper mit Kohäsion. Ueber den Einfluß der Kohäsion oder der Schubfestigkeit der Erde auf die Grenzzustände des Gleichgewichtes gehen die Meinungen auseinander. Manche sind der Ansicht, daß der Reibungswiderstand erst zur Tätigkeit kommen kann, nachdem die Kohäsion überwunden ist, und daß nach Ueberschreiten dieser Grenze das Gesetz der Reibung unverändert zur Gel-

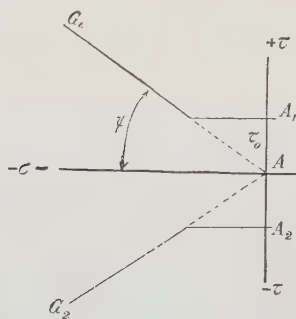


Abb. 15.

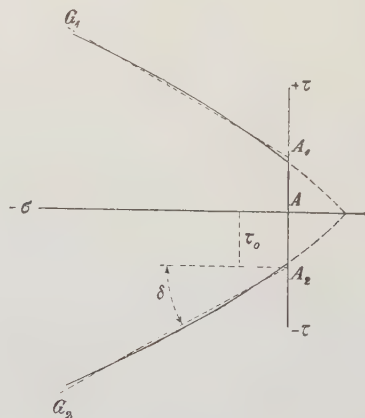


Abb. 16.

tung kommt. Nach dieser Annahme müßten die Grenzlinien der Hauptkreise die unstetige Form der Abb. 15 haben, in der τ_0 die Größe der Kohäsion und ψ den Reibungswinkel darstellt. Aus allgemeinen Gründen ist es wahrscheinlicher, daß der Grenzwert der Schubspannung mit dem Normaldruck der Trennungsfläche *stetig* wächst, und daß die Grenzlinie also die in Abb. 16 angedeutete

stetige Form hat. Erfahrungen, welche diese Frage entscheiden könnten, liegen nicht vor. Es ist vielmehr zu beachten, daß das Gesetz der Reibung, nach dem der Grenzwert der Schubspannung einer Trennungsfläche dem Normaldruck proportional sein soll, selbst für den kohäsionslosen Erdkörper eine allgemeine und genaue Gültigkeit nicht beanspruchen kann.

Wir setzen voraus, daß die beiden auf der linken Seite der τ -Achse liegenden Zweige der Grenzkurve, die hier allein in Betracht kommen, durch zwei gerade Linien ersetzt werden können, daß jene Kurve also annähernd durch eine Gleichung von der Form

$$\tau_{\max} = \pm (\tau_0 - \sigma \operatorname{tg} \delta) \quad (8)$$

dargestellt wird. Die Erfahrung muß zeigen, ob diese Voraussetzung zulässig ist, und wie groß die Werte von τ_0 und δ für die verschiedenen Erdarten anzusetzen sind. Unter der Bezeichnung δ braucht nicht der Reibungswinkel der kohäsionslosen Erde verstanden zu werden.

Die Grenzzustände eines Punktes A im gleichartigen Erdkörper mit ebener Oberfläche werden dann durch Abb. 17 dargestellt.

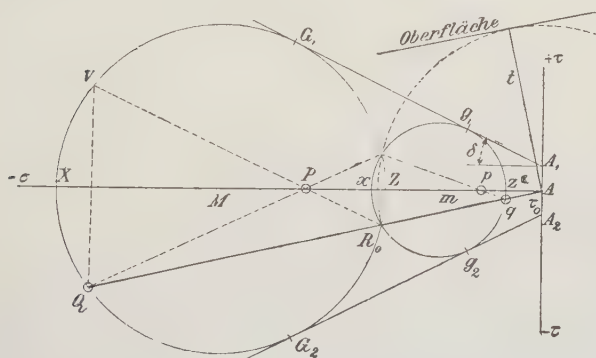


Abb. 17.

Es erscheint unnötig, diese graphische Darstellung von neuem zu beschreiben, weil die Bedeutung der Punkte R_0 , Q , q , P , p , G_1 , g_1 unverändert dieselbe bleibt wie in der Darstellung für den kohäsions-

losen Erdkörper. Nur auf eine Aenderung ist aufmerksam zu machen: Die graphischen Darstellungen für Punkte in verschiedenen Abständen t von der Oberfläche sind nicht geometrisch ähnlich, weil die Strecken

$$AA_1 = AA_2 = \tau_0$$

von unveränderlicher Größe sind. Infolgedessen sind die Spannungen der Punkte einer ebenen Trennungsfläche nicht wie im kohäsionslosen Erdkörper genau proportional ihren Abständen t von der Oberfläche. Um den resultierenden Druck R nach Größe und Lage zu ermitteln, müssen daher die Spannungen für eine Anzahl von Punkten der

Wandfläche bestimmt werden. Auch die Gleitflächen gg_1 , gg_2 eines Grenzzustandes ändern mit der Tiefe t ihre Stellungen, wenn die Oberfläche nicht wagerecht ist. Die Gleitflächen haben daher im allgemeinen eine schwach gekrümmte Form.

12. Die Spannungszustände eines Erdkörpers von nicht gleichartiger Beschaffenheit. Die Voraussetzungen der Theorie von Rankine sind nur in seltenen Fällen vollkommen erfüllt, und ihre Ergebnisse sind daher in der Regel nur als Annäherungswerte zu betrachten. Glaubt man, eine größere Genauigkeit fordern zu können, so entsteht zunächst die Frage: Welche Umstände müssen bekannt sein, um in einem gegebenen Falle, der durch die Abb. 18 dargestellt sein möge, den Druck R der Mauer gegen den gestützten Erdkörper genau bestimmen zu können? In der Zeichnung bezeichnet AC irgend eine unendlich dünne Erdschicht, die den Fußpunkt A der Mauer AB mit einem Punkte C der Erdoberfläche verbindet. Wenn die Spannungszustände der in der Schicht AC enthaltenen Erdteilchen bekannt wären, so würde die Aufgabe gelöst sein.

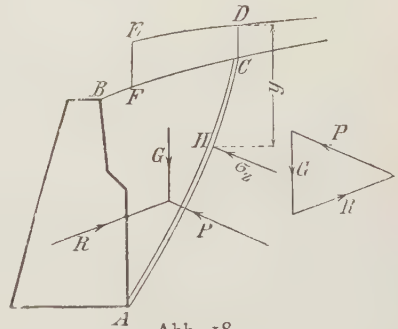


Abb. 18.

Denn jene Spannungszustände bestimmen mit vollkommener Genauigkeit den Erddruck P gegen die Fläche AC . Mit derselben Genauigkeit läßt sich das Gewicht G des gestützten Erdkörpers ABC mit der zugehörigen Belastung $CDEF$ ermitteln, und da die drei Kräfte P , G und R im Gleichgewicht sind, so ist hierdurch auch der Stützdruck R nach Größe und Lage bestimmt. Um die Aufgabe zu vereinfachen, wird man eine Fläche AC in Betracht ziehen, die entweder mit einer Gleitfläche oder mit der Richtungsfläche einer der beiden Hauptspannungen σ_x , σ_z zusammenfällt.

13. Der Erddruck gegen eine σ_z -Fläche. Wir nehmen an, die durch den Fußpunkt A der Stützmauer gehende Fläche AC , die in jedem ihrer Punkte die Hauptspannung σ_z aufnimmt, sei gegeben, und es sei ferner bekannt, daß die Erdteilchen in der dünnen Schicht AC im unteren Grenzzustande des Gleichgewichts sich befinden. Die Spannungszustände in den übrigen Teilen des Erdkörpers kommen hier nicht in Betracht. Die Belastung der Erd-

oberfläche wird in bekannter Weise durch die Fläche $CDEF$ dargestellt. Hier kommt nur die Belastungshöhe CD im Punkte C in Frage. Da die Wandungen der Schicht AC nur Normalspannungen, also keine Schubspannungen aufnehmen, so ist die mit der Tangentenrichtung der Schicht zusammenfallende Hauptspannung σ_x gleich dem Druck einer Flüssigkeitssäule von der Dichte γ und der Höhe y gleich dem lotrechten Abstände zwischen dem Punkte D und dem Punkte H , dessen Spannung bestimmt werden soll:

$$\sigma_x = y\gamma.$$

Die zweite, zur Fläche AC normal gerichtete Hauptspannung σ_z hat die Größe

$$\sigma_z = y\gamma \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\psi}{2} \right),$$

weil die Erdschicht im unteren Grenzzustande sich befindet. Das dem Punkte H benachbarte Flächenelement ds der Fläche AC hat also den Normaldruck

$$dP = y\gamma \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\psi}{2} \right) ds \quad (9)$$

aufzunehmen. Die Zusammensetzung der Kräfte dP zu dem resultierenden Druck P gegen die Fläche AC bietet keine Schwierigkeit und kann hier übergangen werden.

14. Der Erddruck gegen eine ebene Gleitfläche. In dem durch Abb. 19 dargestellten Beispiel sei die durch den Fußpunkt A gehende ebene Gleitfläche AC gegeben und es sei ferner

bekannt, daß die dünne Erdschicht AC im unteren Grenzzustande sich befindet. Die Spannungszustände der übrigen Teile des Erdkörpers kommen auch hier nicht in Frage. Der Neigungswinkel der Gleitfläche AC gegen die Wage-rechte sei φ . Wir erinnern daran, daß die beiden Gleitflächen in jedem Punkte der Erdschicht AC

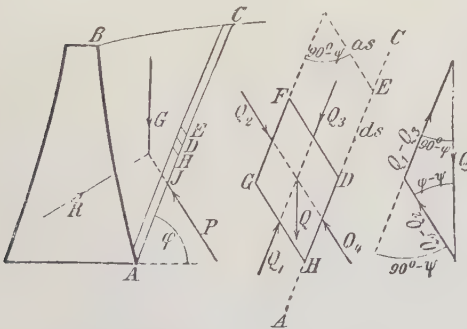


Abb. 19.

Abb. 20.

Abb. 21.

den Winkel $(90^\circ - \psi)$ einschließen, daß die Spannung einer Gleitfläche zur anderen Gleitfläche parallel gerichtet ist, und daß die Spannungen der beiden Gleitflächen eines jeden Punktes von gleicher

Größe sind. Die Schicht AC kann durch Gleitflächen in rhombische Prismen von der unendlich kleinen Seitenlänge ds zerlegt werden. Zwei benachbarte Prismen dieser Art sind in Abb. 20 dargestellt. Das Gewicht eines solchen Prismas $DFGH$:

$$Q = \gamma ds^2 \cos \psi$$

befindet sich im Gleichgewicht mit den vier Kräften Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , die von den vier Seitenflächen aufzunehmen sind. Der Kräfteplan dieser Gleichgewichtsgruppe wird in Abb. 21 von den drei Kräften $Q, (Q_4 - Q_2), (Q_1 - Q_3)$ gebildet. Aus demselben ist zu ersehen, daß

$$Q_1 - Q_3 = Q \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\cos \psi}$$

ist. Wir bezeichnen die Spannungen der beiden Gleitflächen DE und DF des Punktes D mit ϱ und die Spannungen der beiden Gleitflächen HD und HG des Punktes H mit $\varrho + d\varrho$. Es ist also

$$Q_1 = ds(\varrho + d\varrho), \quad Q_3 = \varrho ds$$

und folglich

$$Q_1 - Q_3 = ds \cdot d\varrho = \gamma ds^2 \cos \psi \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\cos \psi}$$

oder

$$d\varrho = \gamma ds \sin(\varphi - \psi). \quad (10)$$

Diese Gleichung bestimmt die Spannung ϱ der Gleitfläche AC in jedem ihrer Punkte D , dessen Lage durch die Strecke

$$CD = s$$

bestimmt ist. Bei unbelasteter Oberfläche ist die Spannung im Punkte C gleich null, im Punkte D gleich $s\gamma \sin(\varphi - \psi)$ und im Fußpunkte A gleich $s_1\gamma \sin(\varphi - \psi)$, wenn mit s_1 die Länge AC der Gleitfläche bezeichnet wird. Der resultierende Erddruck gegen die Gleitfläche hat also die Größe

$$P = \frac{1}{2} s_1^2 \gamma \sin(\varphi - \psi), \quad (11)$$

und sein Angriffspunkt J wird durch die Strecke

$$AJ = \frac{1}{3} AC \quad (12)$$

bestimmt.

15. Der Erddruck gegen eine gekrümmte Gleitfläche. Wir setzen wieder voraus, die in Abb. 22 dargestellte gekrümmte Gleitschicht ADC sei gegeben. Auch diese Schicht läßt sich durch Gleitflächen in rhombische Prismen von der unendlich kleinen Seitenlänge ds zerlegen. In Abb. 23 sind zwei benachbarte Prismen in

großem Maßstabe dargestellt. Die Neigungswinkel der beiden Flächenelemente DE und JD gegen die Wagerechte werden mit φ

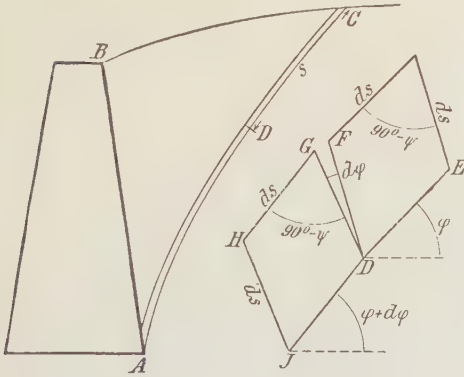


Abb. 22.

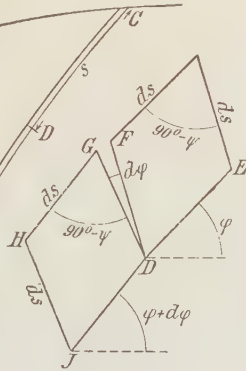


Abb. 23.

und $\varphi + d\varphi$, ihre Spannungen mit ϱ und $\varrho + d\varrho$ und ihre Abstände vom Punkt C , in der Kurve gemessen, mit s und $s + ds$ bezeichnet. Werden die Spannungen der Flächenelemente DF , DG und JH mit ϱ_1 , ϱ_2 , ϱ_3 bezeichnet, so ist

$$\varrho_1 = \varrho,$$

$$\varrho_3 = \varrho + d\varrho$$

und also

$$d\varrho = (\varrho_2 - \varrho_1) + (\varrho_3 - \varrho_2).$$

Die Größe $(\varrho_3 - \varrho_2)$ wird durch Gleichung 10)

$$\varrho_3 - \varrho_2 = \gamma ds \sin(\varphi - \psi) \quad (13)$$

bestimmt. Der Spannungsunterschied $(\varrho_2 - \varrho_1)$ ergibt sich aus der Darstellung des Spannungszustandes des Punktes D (Abb. 24). In dieser Darstellung ist

$$\overline{ag} = \varrho_2, \quad \overline{af} = \varrho_1$$

$$fg = (\varrho_2 - \varrho_1) = \varrho_2 \tan \psi \cdot 2 d\varphi,$$

und da ϱ_3 und ϱ nur unendlich wenig voneinander abweichen, so ist

$$\varrho_2 - \varrho_1 = 2\varrho \tan \psi d\varphi,$$

folglich

$$d\varrho = \gamma ds \sin(\varphi - \psi) + 2\varrho \tan \psi d\varphi. \quad (14)$$

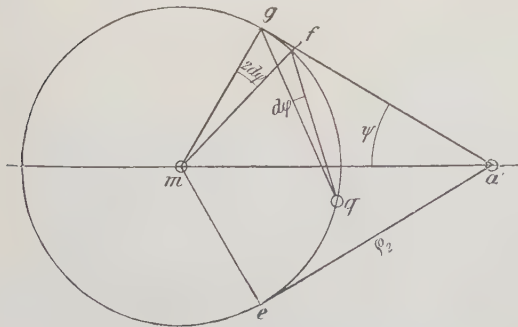


Abb. 24.

Vermittels dieser Gleichung können die Spannungen ϱ aller Punkte der gegebenen Gleitfläche ohne Schwierigkeit ermittelt werden. Man zerlegt zu diesem Zweck die Kurve CA in kleine Strecken von der Länge ds , entnimmt die Winkel φ und $d\varphi$ aus der Zeichnung und

berechnet, beim Punkte C beginnend, die Spannungsunterschiede $d\varrho$ der aufeinander folgenden Flächenelemente nach Gleichung 14).

Die vorstehenden Betrachtungen haben keinen praktischen Wert, weil die Gleit- und Richtungsflächen weder gegeben noch bestimmbar sind. In neuerer Zeit hat man versucht, die Mängel der älteren Coulombschen Theorie durch die Annahme *gekrümmter* Gleit- und Richtungsflächen zu beseitigen. Der folgende Abschnitt zeigt, daß auch dieser Versuch nicht gelungen ist.

16. Bedenken gegen die Theorie von Coulomb. Der Gedankengang dieser Theorie ist bekanntlich folgender: Wenn eine Stützmauer unter Einwirkung des Drucks eines kohäsionslosen Erdkörpers einstürzt, so rutscht ein von einer *ebenen* Gleitfläche AC (Abb. 25) begrenztes Erdprisma ABC an dem ruhenden Erdkörper und an der sich bewegenden Mauer nach unten. Die von der Wandfläche AB und von der Gleitfläche AC auf das abrutschende Prisma zu übertragenden Kräfte R und P müssen daher von den Normalen jener Flächen um die betreffenden Reibungswinkel ψ_1 und ψ abweichen. Da die Mauer dem Abrutschen eines *jeden* Prismas widerstehen soll, so ist diejenige Lage der Gleitfläche in Rechnung zu stellen, *welche die Größe des Wanddruckes R zum Maximum macht*. Diese Bedingung, der man die etwas hochtrabende Bezeichnung *das Coulombsche Prinzip* beigelegt hat, geht demnach von der durchaus unzulässigen Annahme aus, daß alle *möglichen* Gleitflächen in bezug auf die *Wahrscheinlichkeit* ihrer Entstehung nicht voneinander sich unterscheiden. Wenn man über dieses erste Bedenken sich hinwegsetzt, so ergibt eine einfache Rechnung, die wir hier übergehen können, daß bei ebener Begrenzung der unbelasteten Erdoberfläche die Größe des Erddruckes R dem Quadrat der Wandhöhe AB proportional ist. Hieraus wird gefolgert, daß der Angriffspunkt J des Wanddruckes R durch die Bedingung

$$\overline{AJ} = \frac{1}{3} \overline{AB}$$

bestimmt wird, also *von der Lage der Gleitfläche unabhängig ist*. Bei dieser Darstellung kommt nur die *Richtung* des Gleitflächen-druckes P in Betracht, während Größe und Lage der Kraft P unbestimmt gelassen werden. In Wirklichkeit wird aber, wie im Abschnitt 14 gezeigt worden ist, sowohl die Größe als auch die Lage von P durch die Lage der Gleitfläche AC vollkommen bestimmt; denn es ist nach den Gleichungen 11) und 12)

$$P = \frac{1}{2} s_1^2 \gamma \cdot \sin(\varphi - \psi) \quad \text{und} \quad AE = \frac{1}{3} AC.$$

Werden diese Bedingungen beachtet, so befinden sich die beiden Kräfte R und P mit dem Gewichte G des abrutschenden Prismas *nicht* im Gleichgewicht. Die drei Kräfte R , P , G schneiden sich *nicht* in einem Punkte, und das Krätedreieck ist *nicht* geschlossen. Nur in *einem* Falle verschwindet dieser Widerspruch gegen die Grundgesetze der Statik: Wird die Größe des Winkels ψ_1 in Uebereinstimmung mit der Rankineschen Theorie gewählt, so führen beide Theorien zu demselben Ergebnis.

Es möge nun untersucht werden, was aus dem Coulombschen Prinzip wird, wenn man die Bedingungen des Gleichgewichts beachtet und zunächst die Annahme einer *ebenen* Gleitfläche beibehält. Die Kraft R hat alsdann keine feste, im voraus bestimmte Lage, sondern sie wird für jede Gleitfläche AC bestimmt durch die

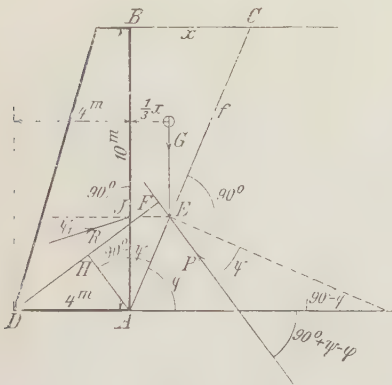


Abb. 25.

Resultante der beiden Kräfte P und G . Nach dem Coulombschen Prinzip muß also diejenige Gleitfläche in Rechnung gestellt werden, *welche die Standsicherheit der Stützmauer am meisten gefährdet*, d. h. die Momentensumme M der beiden Kräfte P und G in bezug auf die Vorderkante D der Fundamentfuge zum Maximum macht. Wir wählen ein möglichst einfaches, durch Abb. 25 dargestelltes Beispiel. Gegeben sei die Höhe der lot-

rechten Stützwand $AB = 10$ m, die Fundamentstärke $AD = 4$ m, die Dichte des Erdkörpers $\gamma = 1600$ kg/cbm und der Reibungswinkel ψ gleich 30° . Die unbelastete Erdoberfläche ist wagerecht. Bezeichnet man die Längen BC und AC mit x und f , so ist

$$\sin \varphi = \frac{10}{f}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{f}$$

$$\sin (\varphi - \psi) = \frac{8,66 - 0,5 x}{f}$$

$$\cos (\varphi - \psi) = \frac{0,866 x + 5}{f}$$

$$G = 5x \cdot 1600 = 8000 x$$

$$P = \frac{f^2}{2} \gamma \cdot \sin (\varphi - \psi) = f (6928 - 400 x).$$

In bezug auf den Punkt D ist der Momentenarm von G gleich $4\text{ m} + \frac{x}{3}$ und der von P :

$$\overline{DF} = 4 \cos(\varphi - \psi) + \frac{f}{3} \cos \psi = \frac{1}{f} (20 + 3,464 x + 0,289 f^2).$$

Hiernach ist das Umsturzmoment in bezug auf den Punkt D :

$$M = P \cdot \overline{DF} - G \left(4 + \frac{x}{3} \right)$$

oder in Meterkilogramm:

$$M = 338\,800 - 27\,560 x - 2052 x^2 - 116 x^3.$$

Man ersieht hieraus, daß das *Coulombsche Prinzip versagt*. Das Umsturzmoment M hat *kein* Maximum in mathematischem Sinne. Es wird desto größer, je kleiner x ist, d. h. je größer der Neigungswinkel φ der Gleitfläche AC angenommen wird. Wollte man hieraus schließen, daß x gleich null anzunehmen sei, um M möglichst groß zu machen, so würde man in Widerspruch geraten mit einer anderen Annahme der Coulombschen Theorie, daß nämlich zwischen Mauer und Erde ein der Standsicherheit *günstiger* Reibungswiderstand wirksam sei. Auf die Hauptfrage aber, wie groß der Winkel φ anzunehmen ist, *gibt das Coulombsche Prinzip keine Antwort*.

Ebensowenig führt diese Theorie zum Ziel unter der Annahme *gekrümmter* Gleitflächen. Mit gekrümmten Gleitflächen sind gekrümmte Richtungsfelder der Hauptspannungen verbunden. Die Betrachtung kann auch hier auf das einfachste Beispiel beschränkt werden. Es sei in Abb. 26 AB die lotrechte Wandfläche, BC die wagerechte, unbelastete Erdoberfläche und AC die durch den Fußpunkt der Mauer gehende Fläche, die in jedem ihrer Punkte die Hauptspannung

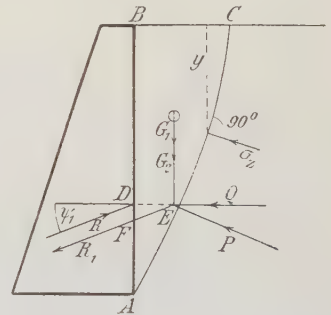


Abb. 26.

$$\sigma_z = \gamma r \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\psi}{2} \right)$$

annimmt. Die Fläche AC fällt in den gestützten Erdkörper, wenn der Voraussetzung gemäß der Druck R der Mauer gegen den gestützten Erdkörper nach *oben* gerichtet sein soll. Das Gewicht des Erdkörpers ABC :

$$G = \gamma \overline{ABC} = F \gamma$$

läßt sich zerlegen in die beiden Teile

$$G_1 = F\gamma \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right)$$

und

$$G_2 = F\gamma \left[1 - \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right)\right].$$

Nach hydrostatischen Regeln ist die Resultante Q des Erddrucks P gegen die Fläche AC und des Gewichts G_1 normal zur Fläche AB gerichtet; sie hat die Größe

$$Q = \frac{1}{2} \overline{AB}^2 \gamma \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right),$$

und ihr Schnittpunkt D mit AB ist durch die Bedingung

$$AD = \frac{1}{3} \overline{AB}$$

bestimmt. Der Erddruck R_1 gegen die Stützmauer ist die Resultante der Kräfte P , G_1 , G_2 oder der beiden Kräfte Q und G_2 . Die willkürliche Bedingung, daß die Kraft R_1 die durch den Winkel ψ_1 vorgeschriebene *Richtung* erhalte, kann durch die willkürliche Annahme

$$G_2 = Q \operatorname{tg} \psi_1$$

oder

$$F = \overline{AB}^2 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right)}{2 \left[1 - \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right)\right]}$$

erfüllt werden. Aber die Folgerung der Coulombschen Theorie, daß die Kraft R_1 durch den Punkt D gehe, ist falsch, wie die Abb. 26 erkennen läßt. *Die Coulombsche Theorie führt also auch hier zu Widersprüchen und ist daher unzulässig. Diese Widersprüche können nur beseitigt werden durch Annahme des von Rankine vorausgesetzten Spannungszustandes.*

17. Die Bestimmung der Stützmauerstärke unter Anwendung der Rankineschen Theorie. Wir bezeichnen mit R den Druck des gestützten Erdkörpers gegen die Stützmauer und zerlegen diese Kraft in die beiden Seitenkräfte N und T . Die Kraft N ist normal zur Wandfläche gerichtet, T fällt mit der Wandfläche zusammen und zeigt nach unten. Die Standsicherheit der Stützmauer wird am meisten gefährdet, wenn der gestützte Erdkörper von Regengüssen erweicht und die Wandfläche schlüpfrig gemacht

wird. Welcher Spannungszustand hierdurch im gestützten Erdkörper herbeigeführt wird, läßt sich nicht angeben. Es läßt sich nur angeben, daß im Vergleich mit dem Rankineschen Zustande die Kraft N größer, dagegen die Kraft T kleiner wird. Um diesen Aenderungen Rechnung zu tragen, kann man eine sogenannte Sicherheitszahl m einführen und die Bedingung stellen, daß die Stützmauer imstande sein muß, einer Kraft R_1 zu widerstehen, die aus den beiden Kräften mN und $\frac{T}{m}$ sich zusammensetzt. Unter gewöhnlichen Umständen genügt es, die Sicherheitszahl m etwa gleich 2 anzunehmen. Die Anwendung dieser Regel bietet keine Schwierigkeit.

18. Literarische Notizen. Der Inhalt der vorstehenden Abhandlung ist folgenden Aufsätzen entnommen:

Beiträge zur Theorie des Erddrucks; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1871, S. 344, und 1872, S. 67 und 245. Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen 1907, S. 441. Schweizerische Bauzeitung 1910, S. 53 und 315.

Die neue Theorie des Erddrucks, d. h. die Bestimmung der Spannungszustände in einem unbegrenzten gleichartigen Erdkörper, wurde begründet durch *Rankine* in der Abhandlung: *On the stability of loose earth*; Philosophical Transactions of the London Royal Society 1856/57, die auch übergegangen ist in das Lehrbuch von Rankine, *A Manual of applied mechanics*, London 1861.

Analytische Darstellungen dieser Theorie gaben:

1. *Lévy*, *Essai sur une théorie nouvelle de l'équilibre des terres* etc.; Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées 1873. Ein Bericht von de St. Venant über diese Abhandlung findet sich in den Comptes rendus vom 7. Februar 1870.

2. *Considère*, *Note sur la poussée des terres*; Annales des ponts et chaussées 1870, I, p. 547.

3. *Winkler*, *Neue Theorie des Erddrucks*; Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins 1871, Heft 5.

Eine graphische Darstellung der neuen Theorie gab:

Weyrauch, *Theorie des Erddrucks auf Grund der neueren Anschauungen*; Allgemeine Bauzeitung 1881.

Unsere graphische Darstellung der Theorie des Erddrucks wird wiedergegeben von:

Ceradini, Exposé élémentaire de la théorie de l'équilibre des terres; Revue universelle des mines 1876, 2, p. 378, und von

Swain, Mohrs Graphical Theory of Earth Pressure; Journal of the Franklin Institute 1882, p. 241.

Vollständigere geschichtliche und literarische Angaben über die Theorie des Erddrucks finden sich in der oben genannten Schrift von Winkler, ferner bei:

Kötter, Die Entwicklung der Lehre vom Erddruck; Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung II, 1893, und

Mehrtens, Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen, Bd. II, 1904.

Abhandlung VII.

Die Spannungen im prismatischen Balken.

I Die Gleichgewichtsbedingungen. Die folgende Mitteilung bezieht sich auf einen elastischen Balken von prismatischer Form, auf den eine Gleichgewichtsgruppe von gegebenen äußeren

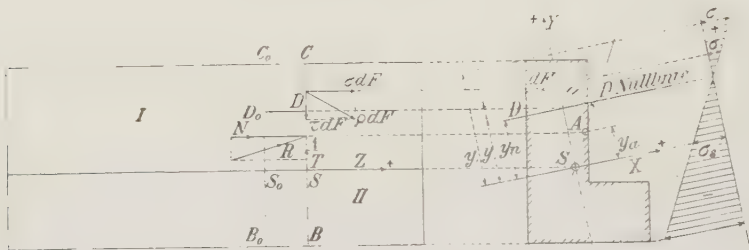


Abb. 1.

Abb. 2.

Kräften einwirkt. Wir zerlegen den Balken (Abb. 1) durch einen Querschnitt, d. h. durch eine zu seiner Achse normal gestellte Ebene BC in zwei Teile I, II und bezeichnen mit R die Resultante

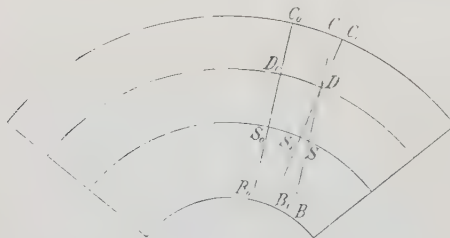


Abb. 3.

der äußeren Kräfte, welche der links vom Querschnitt BC liegende Balkenteil I aufnimmt. Diese Kraft R befindet sich im Gleichgewicht mit den unendlich vielen und unendlich kleinen Kräften $q dF$, welche in den Teilen dF der Querschnittsfläche F von dem Balken-

teil II auf den Balkenteil I übertragen werden. Wir zerlegen die Kraft R und jede der Kräfte $q dF$ in zwei Seitenkräfte, von denen

eine in die Querschnittsebene fällt, während die andere zu dieser Ebene rechtwinklig gerichtet ist. Hierdurch entstehen zwei Kräftegruppen: die Gruppe der *Normalkräfte* N , σdF und die Gruppe der *Scherkräfte* oder *Schubkräfte* T , τdF . Die Bedingungen des Gleichgewichtes sämtlicher Kräfte können dargestellt werden durch *sechs* Gleichungen, welche ausdrücken, daß in bezug auf jede der drei Achsen x , y , z irgend eines rechtwinkligen Koordinatensystems die Summe der Projektionen und die Summe der statischen Momente der Kräfte gleich null sind. Legt man *zwei* dieser Achsen, z. B. x , y , in die Querschnittsebene, so enthalten *drei* der sechs Gleichungen nur die Normalkräfte und die drei anderen nur die Schubkräfte. *Jede dieser beiden Kräftegruppen bildet also eine Gleichgewichtsgruppe.*

2. Die Bestimmung der Normalspannungen σ . Der Biegungslehre liegt die von Navier eingeführte und von der Erfahrung bestätigte Annahme zugrunde, daß die materiellen Punkte, die im spannungslosen Zustande des Balkens in einer Querschnittsebene liegen, auch nach der elastischen Formänderung eine zur gebogenen Balkenachse normal gestellte Querschnittsebene bilden. Die Abb. 3 gibt in starker Verzerrung ein Bild der Formänderung des kurzen Balkenstücks zwischen den benachbarten Querschnitten B_0C_0 und BC . Der Querschnitt B_0C_0 wurde in seiner Lage festgehalten, während BC nach B_1C_1 sich bewegte. Die Längenänderungen BB_1 , SS_1 , $CC_1 \dots$ der gleich langen Balkenfasern B_0B , S_0S , $C_0C \dots$ sind demnach proportional ihren Abständen von der Geraden DD (Abb. 2), in der die Ebenen BC , B_1C_1 sich schneiden. Diese Gerade DD in der Ebene des Balkenquerschnitts wird die *neutrale Achse* oder die *Nullinie* des Querschnitts genannt, weil die von ihr geschnittenen Balkenfasern keine Längenänderungen und daher auch keine Spannungen erleiden. Nach dem Hooke'schen Gesetze sind die Normalspannungen σ den relativen Längenänderungen der betreffenden Balkenfasern proportional. Die Spannungen sind Zug- oder Druckspannungen, je nachdem die Längenänderungen positiv oder negativ sind, und demgemäß gibt man den *Zugspannungen* das *positive*, den *Druckspannungen* das *negative* Vorzeichen.

Für die Bildung der Gleichgewichtsbedingungen wählen wir den Schwerpunkt S des Balkenquerschnitts BC als Anfangspunkt der Koordinaten und legen die von I nach II zeigende z -Achse auf die ungebogene Balkenachse. Die x -Achse hat die noch unbekannte Richtung der Nullinie, und die y -Achse zeigt nach dem Querschnittsteil, welcher *Zugspannungen* aufzunehmen hat.

Wir bezeichnen die Ordinate der Nulllinie mit y_n , die Ordinate des Punktes A , in dem die Querschnittsebene BC von den Kräften R und N geschnitten wird, mit y_a , die Ordinate des Flächenteils dF mit y und endlich die Ordinate irgend eines bestimmten Querschnittspunktes, z. B. des Punktes von der größten positiven Ordinate, mit y_1 . Um allgemein gültige algebraische Beziehungen zu erhalten, wird bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen zunächst angenommen, daß alle diese Ordinaten das positive Vorzeichen tragen. Die Normalkraft N erhält das positive Vorzeichen, wenn sie den Sinn der Achse z hat, also von I nach II zeigt. Zwischen der Spannung σ_s der Schwerpunktsfaser, der Spannung σ des Flächenteils dF und der Spannung σ_1 in dem Punkte von der gegebenen Ordinate y_1 besteht nach den obigen Angaben die algebraische Beziehung:

$$\sigma_s : \sigma : \sigma_1 = y_n : (y_n - y) : (y_n - y_1)$$

oder

$$\sigma = \sigma_s \left(1 - \frac{y}{y_n}\right) = \sigma_1 \frac{y_n - y}{y_n - y_1}. \quad (1)$$

Wir bilden die *erste* Gleichgewichtsbedingung, indem wir die Summe der Projektionen der Kräfte auf die z -Achse gleich null setzen:

$$0 = N + \int \sigma dF = N + \sigma_s \int \left(1 - \frac{y}{y_n}\right) dF. \quad (2)$$

Beachtet man, daß das Integral über die ganze Fläche F sich erstreckt, und daß das Moment dieser Fläche in bezug auf ihre *Schwerpunktsachse* SX :

$$\int y dF = 0$$

ist, so ergibt sich:

$$0 = N + \sigma_s F$$

oder

$$\sigma_s = - \frac{N}{F}. \quad (3)$$

Die Spannung σ_s der Schwerpunktsfaser ist also unabhängig von der Lage der Nulllinie und von der Lage der Kraft N ; sie ist ebenso groß wie in dem Falle, wenn die Kraft N sich gleichmäßig über den Querschnitt F verteilt. Die Spannung σ_s ist eine *Druckspannung*, wenn N *positiv* ist, d. h. wenn die Resultante R der auf den Balkenteil I wirkenden äußeren Kräfte von I nach II zeigt. Die Normalspannungen σ sind durch die Gleichungen 1) und 3) vollkommen bestimmt, sobald y_n , d. h. die Lage der Nulllinie be-

kannt ist. Die beiden folgenden Gleichgewichtsbedingungen haben daher den Zweck, die Lage jener Achse zu bestimmen.

Die *zweite* Gleichgewichtsbedingung fordert, daß die Momentensumme der Kräftegruppe $N, \sigma dF$ in bezug auf die Achse SA (Abb. 2) gleich null sein muß. Die Ordinate des Flächenteils dF in bezug auf diese Achse möge mit u bezeichnet werden. Es ist zu beachten, daß sowohl das Moment der Kraft N als auch die Momentensumme der Flächenteile dF , also das Integral $\int u dF$ gleich null ist. Die Momentengleichung:

$$0 = \int u \sigma dF = \sigma_s \int u \left(1 - \frac{y}{y_n}\right) dF \quad (4)$$

führt also zu der Bedingung:

$$\int u y dF = 0. \quad (5)$$

Die Richtung der Nulllinie wird demnach bestimmt durch die Bedingung, daß SA und SX konjugierte Schwerpunktsachsen der Fläche F sein müssen (vergl. III, 7, 2). Um endlich die Ordinate y_n und hierdurch die Lage der Nulllinie zu bestimmen, setzen wir als *dritte* Gleichgewichtsbedingung das statische Moment der Kräftegruppe in bezug auf die x -Achse gleich null:

$$0 = y_a N + \int y \sigma dF = y_a N + \sigma_s \int y \left(1 - \frac{y}{y_n}\right) dF \quad (6)$$

oder

$$0 = -y_a \sigma_s F - \frac{\sigma_s}{y_n} i_x^2 F,$$

wenn

$$\int y^2 dF = i_x^2 F$$

gesetzt, mit i_x also der Trägheitshalbmesser der Fläche F in bezug auf die Achse SX bezeichnet wird. Aus der vorstehenden Gleichung folgt:

$$y_n = -\frac{i_x^2}{y_a}. \quad (7)$$

Die beiden Ordinaten y_a und y_n des Angriffspunktes A der Normalkraft N und der Nulllinie haben also nicht, wie in der Zeichnung willkürlich angenommen wurde, gleiche, sondern entgegengesetzte Vorzeichen, mit anderen Worten: Der Angriffspunkt A und die zugehörige Nulllinie DD werden durch die Schwerpunktsachse SX voneinander getrennt.

3. Graphische Lösung. Die Abb. 4 gibt die graphische Lösung der Aufgabe: für die gegebene Lage des Angriffspunktes A der Normalkraft N die Lage der Nulllinie DD zu bestimmen. Um

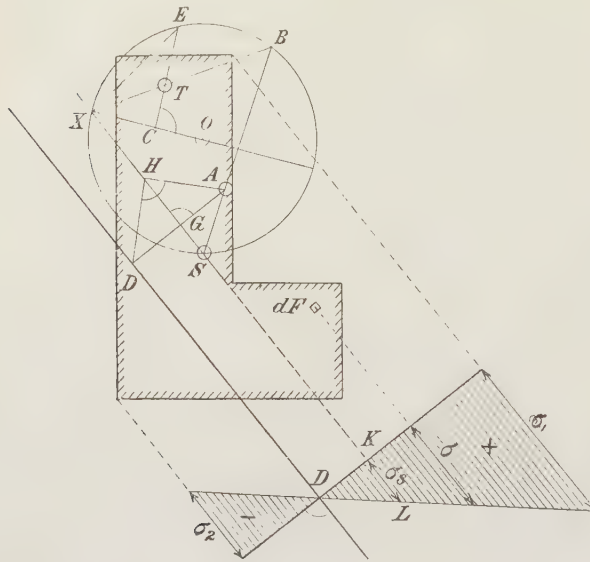


Abb. 4.

die Genauigkeit und die Deutlichkeit der Zeichnung zu erhöhen, wurde der Trägheitskreis SXB für den Schwerpunkt S der Querschnittsfläche F nach Anleitung der Abhandlung III, 8 in *doppeltem* Maßstabe aufgetragen. Demnach ist nicht der

Durchmesser, sondern der Halbmesser OX des Kreises gleich dem polaren

Trägheitshalbmesser p . Indem man die Kreissehne BTX durch den Trägheitsschwerpunkt T zieht, bestimmt man die zur Achse SAB konjugierte Schwerpunktsachse SX , zu der die Nulllinie DD parallel gerichtet ist (III, 7). Man bestimmt ferner den Trägheitshalbmesser für die Achse SX :

$$i_x = \frac{1}{2} XE,$$

indem man

$$CTE \perp OX$$

zieht (III, 7, 4). Darauf ist, um die Lage der Nulllinie zu bestimmen,

$$AGD \perp SX, \quad GH = i_x, \quad HD \perp AH \quad \text{und} \quad DD \parallel SX$$

aufzutragen. Man erkennt leicht, daß die Bedingungen des vorigen Abschnitts durch diese Konstruktion erfüllt werden.

Um ferner die Verteilung der Normalspannungen σ graphisch darzustellen, zieht man

$$DK \perp DD, \quad SKL \parallel DD$$

und trägt nach einem willkürlich zu wählenden Spannungsmaßstabe die Strecke

$$KL = \sigma_s = - \frac{N}{F}$$

auf. Die Ordinate der Geraden DL bestimmt für jeden Querschnittsteil dF die Normalspannung σ , also auch die Spannungen σ_1 und σ_2 in den Punkten des Querschnitts, die von der Nulllinie die größten Abstände haben.

4. Besondere Fälle. 1. Der Angriffspunkt A der Normalkraft N fällt mit dem Schwerpunkt S zusammen. Es ist also

$$y_a = 0, \text{ folglich } y_n = \infty,$$

und daher nach Gleichung 1):

$$\sigma = \sigma_s = - \frac{N}{F},$$

d. h. die Normalkraft N verteilt sich gleichmäßig über den Querschnitt F .

2. Der Angriffspunkt A der unendlich kleinen Normalkraft N liegt auf der gegebenen Geraden SA (Abb. 5) in der unendlich großen Entfernung

$$SA = b.$$

Auf den Balkenquerschnitt wirkt also in der zu ihm rechtwinklig gestellten Ebene SA ein Biegemoment von der Größe

$$M = -Nb. \quad (8)$$

Nach Gleichung 7) ist y_n gleich null, d. h. die Nulllinie fällt mit der zu SA konjugierten Schwerpunktsachse SX zusammen. Ferner folgt aus Gleichung 1):

$$\sigma = \sigma_1 \frac{y}{y_1} \quad (9)$$

und aus Gleichung 6):

$$0 = y_a N + \frac{\sigma_1}{y_1} \int y^2 dF = y_a N + \frac{\sigma_1 F i_x^2}{y_1}.$$

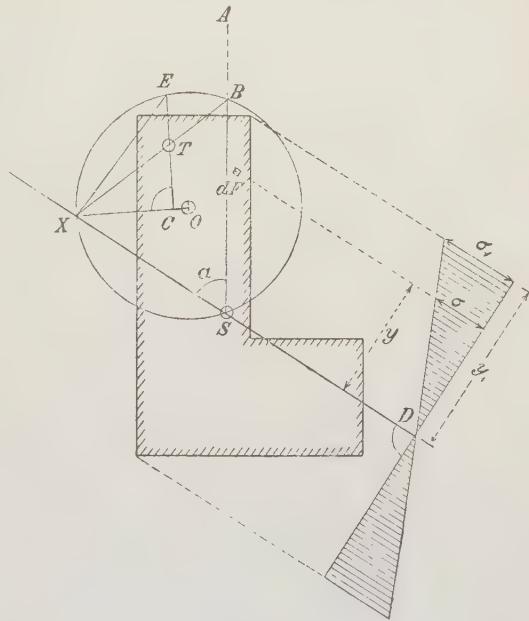


Abb. 5.

Bezeichnet man den Winkel ASX mit α , so ist

$$y_a = b \sin \alpha,$$

folglich

$$\sigma_1 = \frac{M \sin \alpha y_1}{F i_x^2} \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{M \sin \alpha y}{F i_x^2}. \quad (10)$$

In betreff der Vorzeichen ist bei Anwendung dieser Formeln zu beachten, daß die Spannungen der *verlängerten* Balkenfasern das *positive* Vorzeichen tragen. In der Regel ist die Balkenachse

wagerecht, der Balkenquerschnitt also lotrecht gestellt. Man gibt dann nach den Bestimmungen der Abhandlung II, 8 dem Biegemoment das *positive* Vorzeichen, wenn die *konkave* Seite des gebogenen Balkens nach *oben* gekehrt ist. Demgemäß zeigt die y -Achse des Balkenquerschnitts nach *unten*, wenn das Biegemoment M *positiv* ist.

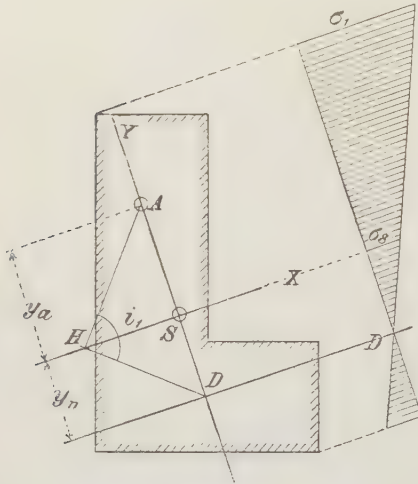


Abb. 6.

3. Der Angriffspunkt A liegt auf einer Schwerpunkts-hauptachse, z. B. wie in Abb. 6 auf der zweiten Hauptachse SY . Die Nulllinie DD ist in diesem Falle parallel zur *ersten* Haupt-

achse SX gerichtet, für die der Trägheitshalbmesser die Größe i_1 hat. Die Lage der Nulllinie wird durch ihre Ordinate

$$y_n = -\frac{i_1^2}{y_a} \quad (11)$$

bestimmt. Nach Gleichung 1) ist also

$$\sigma = \sigma_s \left(1 - \frac{y}{y_n}\right) = -\frac{N}{F} \left(1 + \frac{y y_a}{i_1^2}\right). \quad (12)$$

5. Eine andere Bestimmung der Normalspannungen, Abb. 7 und 8. In diesem Abschnitt bezeichnen SX und SY die beiden Schwerpunkts-hauptachsen, und zwar SX die *erste* Hauptachse mit dem Trägheitshalbmesser i_1 und SY die *zweite* mit dem Trägheitshalbmesser i_2 . Der Angriffspunkt A der Normalkraft N ist gegeben durch seine Koordinaten

$$SB = x_a, \quad SC = y_a.$$

Durch den Punkt A ist die Gerade $A_1 A_2$ gelegt, die auf den Hauptachsen die Strecken

$$SA_1 = 2x_a, \quad SA_2 = 2y_a$$

abschneidet. Man kann die Kraft N zerlegen in zwei Normalkräfte

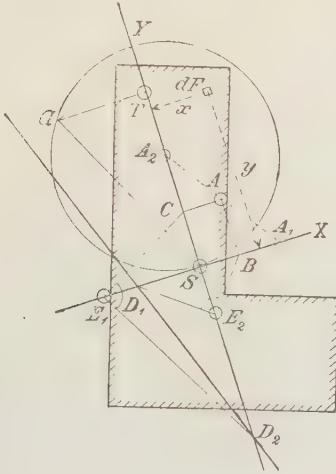


Abb. 7.

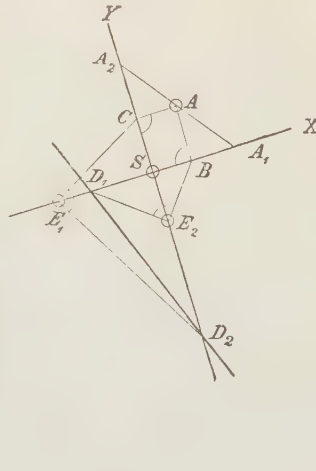


Abb. 8.

N_1 , N_2 , die in den Punkten A_1 , A_2 angreifen, den Sinn von N und die Größe

$$N_1 = N_2 = \frac{1}{2} N$$

haben. In dem Querschnittsteil dF von den Koordinaten x , y wird nach Gleichung 12) von der Normalkraft N_1 die Spannung

$$\sigma = -\frac{N}{2F} \left(1 + \frac{2xx_a}{i_2^2} \right)$$

und von der Normalkraft N_2 die Spannung

$$\sigma = -\frac{N}{2F} \left(1 + \frac{2yy_a}{i_1^2} \right)$$

hervorgerufen. Die von beiden Normalkräften oder von ihrer Resultanten N in dem Teil dF erzeugte Normalspannung hat daher die Größe

$$\sigma = -\frac{N}{F} \left(1 + \frac{xx_a}{i_2^2} + \frac{yy_a}{i_1^2} \right). \quad (13)$$

Die Nulllinie ist der geometrische Ort der Punkte, in welchen die

Normalspannung σ gleich null ist; daher ist die Gleichung dieser Linie:

$$0 = 1 + \frac{xx_a}{i_2^2} + \frac{yy_a}{i_1^2}.$$

Sie schneidet auf den Hauptachsen die Strecken

$$SD_1 = -\frac{i_2^2}{x_a}, \quad SD_2 = -\frac{i_1^2}{y_a}$$

ab. Um die Nulllinie D_1D_2 zu bestimmen, trägt man demnach

$$SE_1 = i_1 = \frac{1}{2}SG, \quad SE_2 = i_2 = \frac{1}{2}YG$$

auf und zieht

$$E_2D_1 \perp BE_2, \quad E_1D_2 \perp CE_1.$$

Umgekehrt wird aus der gegebenen Lage der Nulllinie D_1D_2 der zugehörige Angriffspunkt A der Normalkraft N bestimmt, indem man (Abb. 8)

$$E_1C \perp E_1D_2, \quad E_2B \perp E_2D_1,$$

$$CA \parallel SX, \quad BA \parallel SY$$

aufrägt.

Die Gleichung 13 ist auch anwendbar, wenn die unendlich kleine Normalkraft N in dem unendlich fernen Punkte A der gegebenen Schwerpunktsachse SA angreift. Bezeichnet man wie im vorigen Abschnitt mit b die unendlich große Strecke SA , mit M das Bieugungsmoment $-bN$ des Balkenquerschnitts und mit α den Winkel ASX , so kann man der Gleichung 13) die Form geben:

$$\sigma = -\frac{Nb}{F} \left(\frac{1}{b} + \frac{xx_a}{i_2^2 b} + \frac{yy_a}{i_1^2 b} \right)$$

oder

$$\sigma = \frac{M}{F} \left(\frac{x \cos \alpha}{i_2^2} + \frac{y \sin \alpha}{i_1^2} \right). \quad (14)$$

Die Achsen x und y zeigen nach dem Querschnittsteil, welcher *Zugspannungen* aufzunehmen hat.

6. Der Kern der Querschnittsfläche F . Mit Rücksicht auf die Beschaffenheit des Baumaterials wird zuweilen die Bedingung gestellt, daß kein Teil der Querschnittsfläche *Zugspannungen* aufnehmen darf. Es wird also gefordert, daß die Spannung σ_s der Schwerpunktsfaser *negativ* sei, und daß die Nulllinie die Querschnittsfläche F nicht schneide. Die Angriffspunkte A der Normalkraft N , deren zugehörige Nulllinien die zuletzt genannte Bedingung erfüllen,

bedecken eine begrenzte Fläche, die man den *Kern* der Querschnittsfläche nennt. Läßt man nämlich den Angriffspunkt A auf einer Schwerpunktsachse SA vom Schwerpunkt S sich *entfernen*, so behält die zugehörige neutrale Achse DD die Richtung der zu SA konjugierten Schwerpunktsachse SX (Abb. 4) und *nähert* sich dem Schwerpunkt nach Gleichung 7) in der Weise, daß das Produkt $y_a y_n$ den unveränderlichen Wert $-i_x^2$ behält. Der Punkt A erreicht also die Grenze des Kernes, sobald die zugehörige Nulllinie den Querschnittsumfang *berührt*. Um die Kerngrenze darzustellen, müssen demnach für eine genügende Anzahl von Nulllinien, welche den Querschnittsumfang berühren, die zugehörigen Angriffspunkte A bestimmt werden, was durch die in Abb. 8 angegebene Konstruktion ohne große Mühe geschehen kann.

Wenn der Querschnittsumfang polygonförmig ist, so wird eine wesentliche Vereinfachung noch durch folgende Beziehung herbeigeführt: Läßt man die Nulllinie UU (Abb. 9) um einen gegebenen festen Punkt A_v sich drehen, so bewegt sich der zugehörige Angriffspunkt A_u auf der zum Angriffspunkt A_v gehörenden Nulllinie VV . Wir bestimmen, um den Beweis zu geben, die Ordinate v_0 des Punktes A_u mittels der Momentengleichung für die Achse VV . In bezug auf die beiden Achsen UU und VV werden die Ordinaten des Schwerpunktes S mit u_s und v_s und die Ordinaten des Flächenteils dF mit u und v bezeichnet. Wenn die Nulllinie die Lage UU

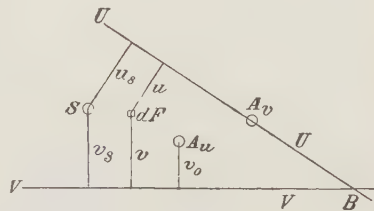


Abb. 9.

hat, so hat der Flächenteil dF die Normalkraft $\frac{\sigma_s}{u_s} u dF$ aufzunehmen. Die Gleichung, welche ausdrückt, daß in bezug auf die Achse VV das Moment der Gleichgewichtsgruppe der Normalkräfte gleich null sein muß, lautet also:

$$0 = N v_0 + \frac{\sigma_s}{u_s} \int u v dF. \quad (15)$$

Ist dagegen VV die Nulllinie, so hat der Flächenteil dF die Normalkraft $\frac{\sigma_s}{v_s} v dF$ aufzunehmen, und die Momentengleichung für die Achse UU lautet:

$$0 = \frac{\sigma_s}{u_s} \int u v dF = \int u v dF, \quad (16)$$

weil die im Punkte A_p angreifende Normalkraft N die Momentenachse UU schneidet. Aus den Gleichungen 15) und 16) folgt:

$$v_0 = 0,$$

wie oben behauptet wurde. Wir ersehen aus Gleichung 16), daß die beiden Achsen UU , VV in bezug auf ihren Schnittpunkt B konjugierte Achsen sind (vergl. III, 7).

Um den Kern 1, 2, 3, 4, 5 einer gegebenen polygonförmigen Querschnittsfläche F (Abb. 10) zu bilden, bestimmt man also entweder die Angriffspunkte 1, 2, 3, 4, 5 für die Nulllinien I, II, III,

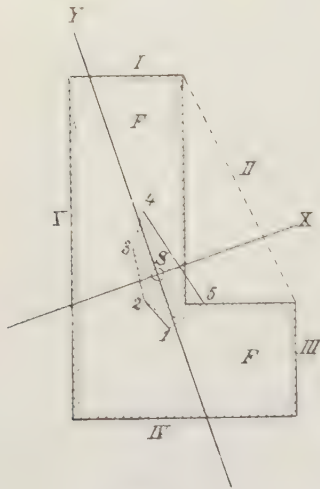


Abb. 10.

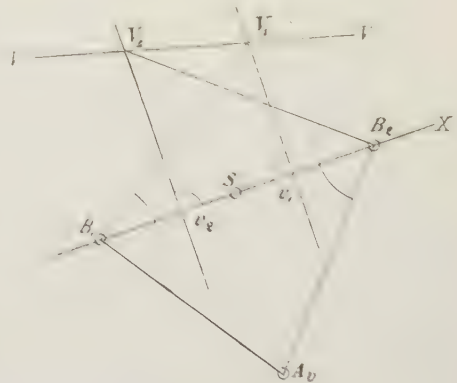


Abb. 11.

IV, V, oder die Nulllinien 12, 23, 34, 45, 51 für die Angriffspunkte, welche mit den Schnittpunkten der Achsen III, II III, III IV, IV V, V I zusammenfallen.

Wenn die zu bestimmenden Punkte und Achsen unbequeme Lagen annehmen, so kann man zum Ersatz das in Abb. 11 dargestellte Verfahren anwenden. Man bestimmt die beiden Brennpunkte B_1, B_2 der Fläche F auf der ersten Schwerpunkthauptachse SX durch die Strecken

$$SB_1 = SB_2 = \sqrt{i_1^2 - i_2^2}$$

(vergl. III, 9, 6) und die zu den Angriffspunkten B_1, B_2 gehörenden Nulllinien $v_1 V_1, v_2 V_2$ durch die Strecken

$$Sv_1 = Sv_2 = \frac{i_2^2}{\sqrt{i_1^2 - i_2^2}}.$$

Wir erinnern an die im Abschnitt 9 der Abhandlung III beschriebenen Eigenschaften der Brennpunkte, insbesondere daran, daß je zwei in einem Brennpunkte rechtwinklig sich schneidende Achsen ein konjugiertes Paar bilden (III, 7, 6). Um die zu einem gegebenen Angriffspunkt A_v gehörende Nulllinie VV_1V_2V zu bestimmen, zieht man daher

$$B_1V_1 \perp A_vB_1 \quad \text{und} \quad B_2V_2 \perp A_vB_2.$$

In gleicher Weise ergibt sich die Lage von A_v , wenn die Nulllinie VV gegeben ist.

Die Bedingung, daß die Achse SA_v und die zur neutralen Achse VV parallel gerichtete Schwerpunktsachse ein konjugiertes Achsenpaar bilden, kann als Probe für die Genauigkeit der Zeichnung benutzt werden.

7. Druckspannungen in einem prismatischen Körper ohne Zugfestigkeit. Liegt der Angriffspunkt A der *positiven* Normalkraft N , Abb. 12, *außerhalb* des Kerns, so zerlegt die neutrale Achse die Querschnittsfläche F in zwei Teile I, II, von denen der den Schwerpunkt S enthaltende Teil I Druckspannungen aufzunehmen hat. Wenn nun der andere Teil II der Querschnittsfläche nicht imstande ist, *Zugspannungen* zu widerstehen, wie es z. B. bei Mauerwerk in der Regel der Fall ist, so werden die Spannungen dieses Querschnittsteiles gleich null, wodurch selbstverständlich eine andere Lage der Nulllinie bedingt wird.

Ein einfaches Verfahren zur Bestimmung dieser Lage läßt sich nur für den Fall angeben, wenn die Fläche F in Parallelstreifen zerlegt werden kann, auf deren Halbierungsgeraden der Angriffspunkt A liegt, wenn also z. B. A auf einer Symmetrieachse des Querschnitts liegt. In diesen Fällen ist die *Richtung* der Nulllinie durch die Richtung der Parallelstreifen gegeben, und es ist nur ihr Abstand vom Schwerpunkt zu bestimmen. In jedem anderen Falle

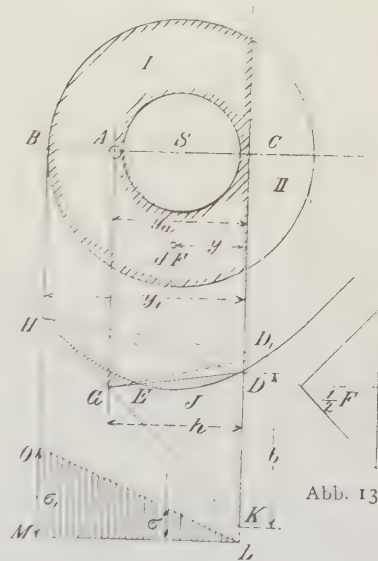


Abb. 12.

Abb. 13.

ist man genötigt, die Richtung der Nullinie durch *Probieren* zu ermitteln, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll.

Von den drei Gleichgewichtsbedingungen der Gleichungen 2), 5) und 6) ist die zweite:

$$\int u y \, dF = 0$$

erfüllt, wenn der Nullinie die eben bezeichnete Richtung gegeben wird. Um den beiden anderen Gleichgewichtsbedingungen für den vorliegenden Zweck die bequemste Form zu geben, beziehen wir die Momente auf die noch unbekannte Nullinie. Es bezeichnen also in bezug auf diese Achse y_a , y , y_1 die Ordinaten des Punktes A , des Flächenteils dF und des Querschnittspunktes B , dessen Abstand von der Nullinie am größten ist, ferner σ und σ_1 die Normalspannungen in den Querschnittsteilen dF und B . Die beiden Gleichgewichtsbedingungen nehmen hiernach die Form an:

$$0 = N + \frac{\sigma_1}{y_1} \int y \, dF \quad (17)$$

$$0 = N y_a + \frac{\sigma_1}{y_1} \int y^2 \, dF. \quad (18)$$

Um die Integrale, welche sich nicht auf die ganze Querschnittsfläche F , sondern nur auf den Teil I beziehen, auf geometrischem Wege zu bestimmen, zerlegt man die Fläche I in Streifen parallel zur Nullinie und bildet die Seilkurve HED , deren Belastungen durch die Flächenstreifen dargestellt werden, und deren Normalkraft (Abb. 13) gleich $\frac{1}{2} F$ ist. Wäre die Lage der Nullinie CD bekannt, so würde die Fläche $HEDK$, welche von der Seilkurve HED , ihrer Tangente HK und der Nullinie DK begrenzt wird, verwandelt werden können in das Dreieck DKG von der Basis

$$DK = b$$

und der Höhe h . Nach bekannten Eigenschaften der Seilkurve (vergl. II, 7 und II, 12) ist nun

$$\int y \, dF = b \frac{F}{2}$$

und

$$\int y^2 \, dF = F \frac{b h}{2}.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen 17) und 18) ein, so ergibt die erste Gleichung:

$$\sigma_1 = -\frac{N}{F} \frac{2y_1}{b} \quad (19)$$

und die zweite:

$$h = y_a \quad (20)$$

Um die Lage der Nullinie zu bestimmen, zieht man demnach die Gerade AG parallel zur gegebenen Richtung der Nullinie und legt durch den Punkt G die Gerade GD so, daß

$$\text{Fläche } HGE = \text{Fläche } DEJ$$

wird. Die Nullinie CD ist darauf durch den Punkt D der Seilkurve zu legen. Man wählt, um den Punkt D genau zu bestimmen, den Punkt D_1 der Seilkurve so, daß die Fläche HJD_1 augenscheinlich etwas größer ist als das Dreieck HGD_1 . Man mißt dann diese beiden Flächen und bestimmt den Punkt D aus der Bedingung:

$$\text{Fläche } GDD_1 = \text{Fläche } HJD_1 - \text{Fläche } HGD_1;$$

denn aus dieser Bedingung folgt:

$$GDD_1 + HGD_1 - HEDD_1 = HJD_1 - HEDD_1$$

oder

$$HGE = EJD.$$

Die Verteilung der Normalspannungen σ wird durch das Dreieck LMO (Abb. 12) dargestellt, dessen Höhe

$$MO = \sigma_1 = -\frac{N}{F} \frac{2y_1}{b}$$

nach einem willkürlich zu wählenden Spannungsmaßstabe aufzutragen ist.

8. Die Schubspannungen im Balkenquerschnitt. Die Schubspannungen der Balkenquerschnitte haben für die Anwendungen der Festigkeitslehre auf die Berechnung der Baukonstruktionen eine viel geringere Wichtigkeit als die Normalspannungen, weil Form und Größe der Querschnitte aus praktischen Gründen in der Regel so gewählt werden müssen, daß die Schubspannungen die zulässige Grenze bei weitem nicht erreichen und für die Wahl der Querschnittsgrößen also nicht maßgebend sind. Aus diesem Grunde beschränken wir uns in den folgenden Betrachtungen auf die einfachsten und für die Anwendung wichtigsten Fälle. Der in Betracht gezogene, in den Abb. 14 und 15 dargestellte Balken hat eine lot-

recht gestellte Symmetrieebene, in der die sämtlichen *äußeren*, lotrechten Kräfte auf den Balken einwirken. V_1 bezeichnet die Resultante der von dem Balkenteil I aufzunehmenden äußeren Kräfte.

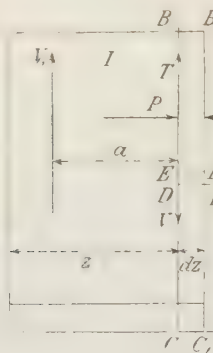


Abb. 14.

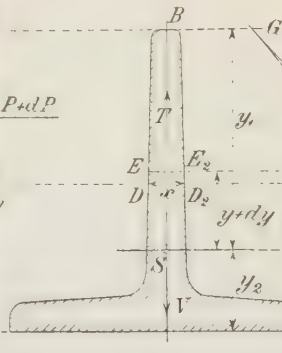


Abb. 15.

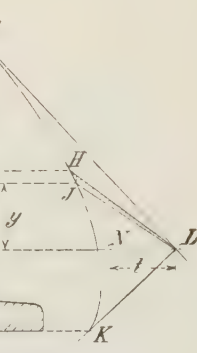


Abb. 16.

Wir zerlegen die Kraft V_1 in das Kräftepaar V_1, V und die Kraft T . V und T bezeichnen zwei Kräfte, welche in der Symmetrieachse des Querschnitts BC wirken (Abb. 14 und 15), gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind. Das Moment

$$M = V a$$

ist das vom Querschnitt BC aufzunehmende *Biegemoment*, welches mit den Normalkräften σdF eine Gleichgewichtsgruppe bildet. Das Biegemoment trägt das positive Vorzeichen, wenn der Drehsinn des Kräftepaares V_1, V mit dem Sinn der Uhrzeigerbewegung übereinstimmt (vergl. II, 8). Die Kraft T heißt die *Schubkraft* oder die *Querkraft* des Querschnittes; sie bildet eine Gleichgewichtsgruppe mit den Schubkräften τdF , welche von dem Balkenteil II auf den Balkenteil I übertragen werden. Wir legen der Schubkraft T das *positive* Vorzeichen bei, wenn sie nach *oben* zeigt.

Das Biegemoment M ist immer eine stetige Funktion der Abszisse z , d. h. der unendlich kleine Balkenteil BC_1B_1 zwischen den Abszissen z und $z + dz$ ist nicht imstande, äußere Kräfte von *endlicher* Größe aufzunehmen, weil in einem solchen Falle in diesem Balkenteil unendlich große Spannungen eintreten müßten. Daher hat das Biegemoment $M + dM$ des Balkenquerschnittes B_1C_1 (Abb. 14) die Größe

$$M + dM = V_1 (a + dz).$$

Da M gleich $V_1 a$ ist, so folgt hieraus

$$dM = V_1 dz.$$

Zwischen dem Biegemoment M des Balkenquerschnittes und seiner Schubkraft T besteht demnach die Beziehung:

$$V_1 = T = \frac{dM}{dz}. \quad (21)$$

Wir bestimmen nun die auf den Balkenteil BB_1D_1D (Abb. 14 und 17) einwirkenden Kräfte und nehmen an, es seien gegeben: das Biegemoment M und die Schubkraft T des Balkenquerschnitts BC , ferner die vertikal nach unten gerichteten Belastungen $q_1 dz$ und $q dz$, welche auf die Balkenteile BB_1C_1C und BB_1D_1D einwirken. Der Balkenteil BB_1D_1D hat die in Abb. 17 eingetragenen sieben Kräfte aufzunehmen: die gegebene Belastung $q dz$, die Normalkräfte P und $P + dP$, die Schubkräfte Q und $Q + dQ$ der Querschnittsteile BD und B_1D_1 , endlich die Normalkraft $\sigma_1 x dz$ und die Schubkraft $\tau_1 x dz$ der Fläche DD_1 von der Breite x und der Länge dz . Die unbekannten Spannungen σ_1 und τ_1 sind in die Zeichnung in *positivem* Sinne eingetragen.

Der Querschnittsteil DD_2E_2E (Abb. 15) von der Breite x und der Höhe dy nimmt nach Gleichung 10) eine Druckspannung σ von der Größe

$$\sigma = \frac{My}{F F_1} \quad (22)$$

auf, wenn mit F_1 die Seilpolygonfläche $G H I K L$ (Abb. 16) bezeichnet wird, welche das Trägheitsmoment

$$J = F F_1$$

der Querschnittsfläche F in bezug auf die horizontale Schwerpunktsachse SL bestimmt (II, 12). Daher ist die Druckkraft

$$P = \frac{M}{F F_1} \int_y^{y_1} y x dy. \quad (23)$$

Das Integral bezeichnet das Moment des Querschnittsteils BDD_2 (Abb. 15) in bezug auf die Nullinie SL . Um dieses Moment auf graphischem Wege zu bestimmen, zieht man in Abb. 16 an die Seilkurve die Tangente JN und multipliziert die Länge

$$LN = t$$

mit der Normalkraft $\frac{F}{2}$ der Seilkurve. Daher ist

$$P = \frac{Mt}{2 F_1}. \quad (24)$$

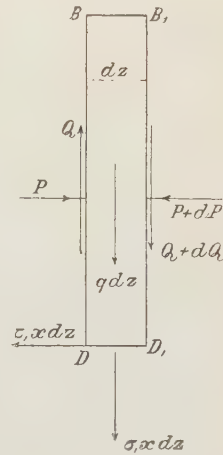


Abb. 17.

In gleicher Weise ergibt sich der Druck $P + dP$ gegen den Querschnittsteil $B_1 D_1$ (Abb. 14 und 17):

$$P + dP = \frac{(M + dM) t}{2 F_1}.$$

Das Gleichgewicht des Balkenteils $BB_1 D_1 D$ fordert, daß die algebraische Summe der Horizontalkräfte gleich null sei:

$$0 = P + dP - P + \tau_1 x dz.$$

Da

$$\frac{dM}{dz} = T$$

ist, so folgt hieraus:

$$\tau_1 = - \frac{T t}{2 F_1 x}. \quad (25)$$

Zwischen der wagerechten Schubspannung τ_1 der Fläche DD_1 und der lotrechten Schubspannung τ des Querschnittselements $DD_2 E_2 E$ (Abb. 15) besteht die einfache Beziehung

$$\tau = - \tau_1, \quad (26)$$

welche in der Abhandlung V, Gleichung 4) abgeleitet worden ist; demnach ist

$$\tau = + \frac{T t}{2 F_1 x}. \quad (27)$$

Wenn, wie im vorliegenden Falle, die Schubkraft T nach oben gerichtet, also positiv ist, so hat τ_1 den negativen, τ dagegen den positiven Drehsinn. Der Querschnittsteil $EE_2 D_2 D$, Abb. 15, hat eine Schubkraft von der Größe

$$\tau x dy = \frac{T}{F_1} \frac{t dy}{2} \quad (28)$$

aufzunehmen. Daher ist (Abb. 17)

$$Q = \frac{T}{F_1} \int_y^{y_1} \frac{t dy}{2}. \quad (29)$$

Die Größe $\frac{t dy}{2}$ bezeichnet die Fläche des unendlich kleinen Dreiecks LJH in Abb. 16; das Integral wird also durch die Fläche

$$LJHG = F^u$$

dargestellt. Demnach ist

$$Q = \frac{T F^u}{F_1}, \quad (30)$$

und ebenso ergibt sich

$$Q + dQ = \frac{(T + dT) F^u}{F_1}. \quad (31)$$

Es ist zu beachten, daß die Schubkraft $(T + dT)$ des Querschnitts $B_1 C_1$ durch die Gleichgewichtsbedingung für den Balkenteil $BB_1 C_1 C$:

$$T + dT = T - q_1 dz \quad (32)$$

bestimmt wird.

Das Gleichgewicht des Balkenteils $BB_1 D_1 D$ (Abb. 17) fordert ferner, daß die algebraische Summe der Vertikalkräfte gleich null sei:

$$0 = Q + dQ - Q + q dz + \sigma_1 x dz.$$

In Verbindung mit den Gleichungen 31) und 32) folgt hieraus:

$$\sigma_1 = \frac{q_1 F - q F_1}{x F_1}. \quad (33)$$

In der Regel sind die Belastungen q_1 und q der unendlich kleinen Balkenlängen dz nicht genau gegeben, sondern können nur schätzungsweise ermittelt werden, und in vielen Fällen sind die Werte von σ_1 so klein, daß sie vernachlässigt werden, d. h. gleich null gesetzt werden können.

Aus der Gleichung 28) gewinnt man das folgende Bild von der Verteilung der Schubkraft T über die Querschnittsfläche F . Man denke sich die Kraft T *gleichmäßig* verteilt über die von der Seilkurve $GHJK$ und ihren Tangenten GL, KL eingeschlossene Fläche F_1 , so daß die Flächeneinheit mit der Kraft $\frac{T}{F_1}$ belegt ist. Läßt man

nun die Horizontale DJ (Abb. 15 und 16) durch Parallelverschiebung die Querschnittsfläche F bestreichen, während der zugehörige, um den Punkt L sich drehende Vektor LJ die Fläche F_1 beschreibt, so ist die Schubkraft, welche der von DJ bestrichene Querschnittsteil aufzunehmen hat, gleich der Kraft, welche gleichzeitig von dem Vektor LJ auf der Fläche $GHJKL$ bestrichen wird; denn die gleichzeitig von DJ und LJ bestrichenen Flächenteile sind $x dy$ und $\frac{t dy}{2}$.

9. Die graphische Darstellung des Spannungszustandes eines unendlich kleinen Balkenteils. Nachdem für den unendlich kleinen Balkenteil $EDD_1 E_1$ (Abb. 14) von der Länge dz , der Höhe dy und der Breite x die Spannungen σ, τ der Seitenfläche DE und die Spannungen σ_1, τ_1 der Seitenfläche DD_1 durch die Gleichungen 22), 27), 33) und 25) bestimmt worden sind, kann der Spannungszustand dieses Balkenteils nach dem in der Abhandlung V, 5 beschriebenen Verfahren graphisch dargestellt werden.

Die Abb. 18 zeigt diese Darstellung. In bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem σ, τ , dessen wagerechte σ -Achse nach

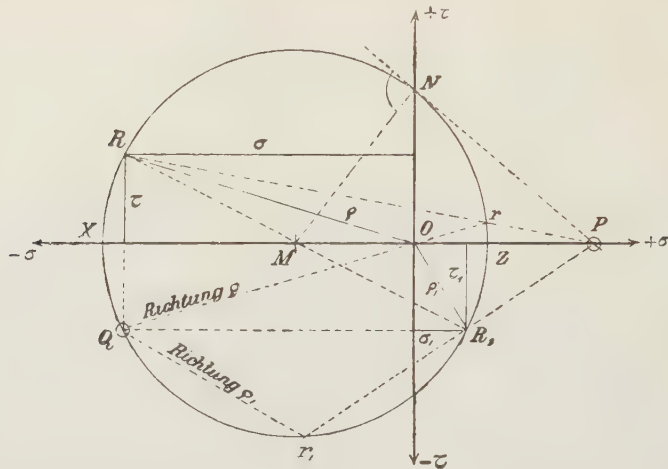


Abb. 18.

rechts und dessen lotrechte τ -Achse nach oben zeigt, sind die beiden Punkte R und R_1 durch ihre Koordinaten σ, τ und σ_1, τ_1 bestimmt. Der Pol Q der Darstellung ergibt sich, indem man (Abb. 14 und 18)

$$RQ \parallel DE \quad \text{und} \quad R_1Q \parallel DD_1$$

zieht. RR_1Q ist der Hauptkreis des darzustellenden Spannungszustandes. Sein Mittelpunkt M ist der Schnittpunkt der σ -Achse mit der Geraden RR_1 . Sein Durchmesser hat die Größe

$$RR_1 = \sqrt{(\sigma - \sigma_1)^2 + 4\tau^2},$$

wobei im vorliegenden Beispiel zu beachten ist, daß nicht nur τ und τ_1 , sondern auch σ und σ_1 verschiedene Vorzeichen haben. Der Punkt P ist der Pol der τ -Achse in bezug auf den Hauptkreis; um ihn zu bestimmen, zieht man die Tangente NP . Die Größen der Spannungen ϱ und ϱ_1 der Flächenelemente DE und DD_1 (Abb. 14) werden durch die Strecken OR und OR_1 bestimmt. Die Richtungen dieser Spannungen ergeben sich, indem man die Geraden PrR und PR_1r_1 zieht: ϱ ist parallel zu Qr und ϱ_1 parallel zu Qr_1 gerichtet. Die graphische Darstellung gibt in gleicher Weise Größe und Richtung der Spannung für jeden anderen, normal zur Bildfläche durch den Punkt D gelegten Schnitt.

Die *Grenzwerte der Schubspannungen* werden durch den Halbmesser des Hauptkreises dargestellt:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\max} &= +\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma - \sigma_1)^2 + 4\tau^2} \\ \tau_{\min} &= -\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma - \sigma_1)^2 + 4\tau^2} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Ferner haben die *Grenzwerte der Normalspannungen* die Größen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma + \sigma_1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma - \sigma_1)^2 + 4\tau^2} = ON \\ \text{und} \\ \sigma_z &= \frac{\sigma + \sigma_1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma - \sigma_1)^2 + 4\tau^2} = OZ. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

10. *Literarische Notiz.* Der Inhalt der vorstehenden Abhandlung wurde folgenden Aufsätzen entnommen:

1. *Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen;* Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover, 1870, S. 41, und 1877, S. 51.

2. *Ueber die Verteilung der exzentrischen Druckbelastung eines Mauerwerkskörpers;* Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover, 1883, S. 163.

3. *Ueber die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen;* Zivilingenieur 1887, S. 43.

Wir verweisen im übrigen auf die Lehrbücher der Baumechanik und der Festigkeitslehre.

Abhandlung VIII.

Der Spannungszustand einer Staumauer.

1. Einleitende Bemerkungen. Die Bedenken, welche von einigen englischen Ingenieuren gegen die Standsicherheit der großen, in den letzten Jahrzehnten hergestellten Staumauern erhoben worden sind, haben zu zahlreichen Erörterungen über den Spannungszustand dieser Bauwerke Veranlassung gegeben. Bei den betreffenden Untersuchungen ist, wie mir scheint, ein wesentlicher Punkt, den ich im

folgenden klarzustellen versuche, nicht genügend beachtet worden.

Wenn der Querschnitt der Mauer $ABCD$ (Abb. 1), ihre Dichte γ und die Höhe des Wasserspiegels gegeben sind, so lassen sich die von jedem wagerechten Schnitt FH aufzunehmenden äußeren Kräfte, die lotrechte Kraft S und die wagerechte Schubkraft T nach Größe und Lage bestimmen. In den genannten Untersuchungen handelt es sich zunächst um die beiden Gesetze, nach welchen sich die Kräfte S und T über die Schnittfläche FH verteilen. Hierbei

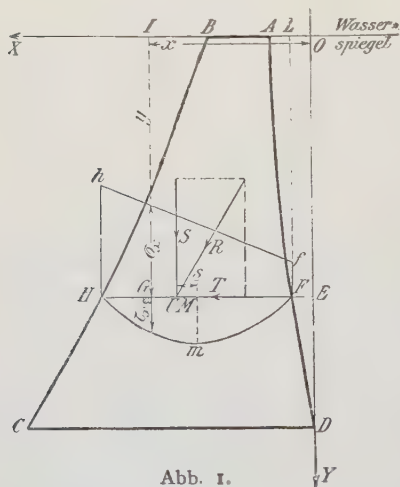


Abb. 1.

darf nicht übersehen werden, daß die Ermittlung der Spannungszustände aller Mauerteile eine *statisch bestimmte* Aufgabe wird, sobald von jenen beiden Gesetzen *eins* gegeben oder willkürlich angenommen ist. Denn das eine Gesetz bedingt das andere. Es ist daher durchaus unzulässig, in betreff *beider* Gesetze willkürliche Annahmen zu machen.

2. Erklärungen und Bezeichnungen. Die folgenden Gleichgewichtsbetrachtungen beziehen sich auf eine *gerade* Mauer von gegebenem Querschnitt $ABCD$ und einer Länge gleich 1 Dezimeter. Diese Länge gilt als Einheit für alle Abmessungen. Die Spannungen werden also in kg/qdm, die Dichte in kg/cdm angegeben. Der Wasserspiegel des Staubeckens auf der rechten Seite der Mauer liegt in der Höhe der Mauerkrone AB . Die Koordinaten eines Punktes G des lotrechten Mauerquerschnitts

$$\overline{EG} = x, \quad \overline{JG} = y$$

beziehen sich auf die in der Zeichnung angegebenen Achsen OX und OY . Die wagerechte x -Achse liegt in der Höhe des Wasserspiegels und zeigt nach *links*, die lotrechte y -Achse liegt *rechts* von der Mauer und zeigt nach *unten*. Für die zur x -Achse parallel gestellten wagerechten Schnitte FH , DC werden die Normalspannungen mit σ_x , die Schubspannungen mit τ_x bezeichnet; für die zur y -Achse parallel gestellten lotrechten Schnitte tragen diese Spannungen die Bezeichnungen σ_y und τ_y . Das *positive* Vorzeichen erhalten die Normalspannungen σ , wenn sie *Zugspannungen* bezeichnen, und die Schubspannungen τ , wenn sie für das Körperelement, auf das sie wirken, den Sinn der *Rechtsdrehung* haben.

3. Die Gleichgewichtsbedingungen. Die vorliegende Aufgabe besteht darin, die vier Spannungen σ_x , τ_x , σ_y , τ_y in jedem Punkte G der Mauer als Funktionen der Koordinaten x , y dieses Punktes auszudrücken oder graphisch darzustellen. Zu dem Zweck bilden wir die Gleichgewichtsbedingungen für das am Punkte G liegende unendlich kleine Mauerprisma von der Breite dx , der Höhe dy und der Länge gleich 1 dm. Auf dieses Prisma wirken außer seinem Gewicht $\gamma dx dy$ die in Abb. 2 im Sinne der *positiven Spannungen* eingetragenen acht Kräfte. In der Bezeichnung

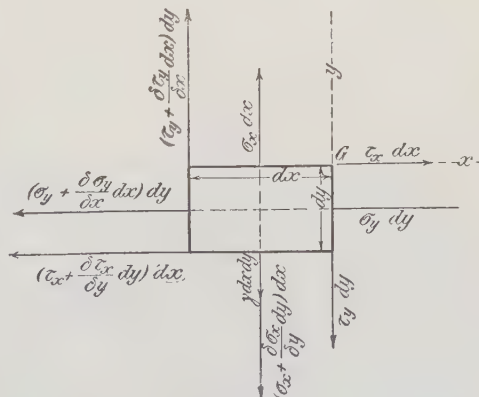


Abb. 2.

der Kräfte wurde ihr gemeinschaftlicher Faktor 1 dm fortgelassen. Da die Kräfte in einer Ebene, der Mittelebene des Prismas liegen,

so bestehen *drei* Gleichgewichtsbedingungen. Sie fordern, daß die Projektionen der Kräfte auf die Koordinatenachsen und die statischen Momente in bezug auf irgend einen Punkt, z. B. in bezug auf den Schwerpunkt des Prismas die Summen null ergeben:

$$0 = \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \gamma \quad (2)$$

$$0 = \tau_x + \tau_y. \quad (3)$$

Die Randbedingungen. Für die Integration der Gleichungen 1) und 2) bestehen Grenzbedingungen, die durch das Gleichgewicht der an der Oberfläche liegenden Mauerteile gegeben sind. Das an

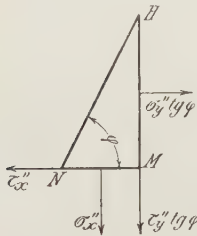


Abb. 3.

der Mauerfläche *BC* liegende, 1 dm lange Prisma *HMN* (Abb. 3) wird begrenzt durch die *unendlich kleine* wagerechte Fläche *NM* von der Größe *eins*, durch die lotrechte Fläche *MH* von der Größe $\lg \varphi$ und die Mauerfläche *HN*, die von der Luft berührt wird und also keine äußeren Kräfte aufnimmt. Die Gleichgewichtsgruppe der auf das Prisma einwirkenden Kräfte besteht aus den vier Kräften σ_x'' , τ_x'' , $\sigma_y'' \lg \varphi$ und $\tau_y'' \lg \varphi$, die im Sinne der positiven Spannungen in die Zeichnung eingetragen sind. Das Gewicht des Prismas kommt als eine unendlich kleine Größe *zweiter* Ordnung nicht in Betracht. Das Gleichgewicht der vier Kräfte fordert außer der allgemeinen Bedingung der Gleichung 3):

$$0 = \sigma_x'' + \tau_y'' \lg \varphi = \sigma_x'' - \tau_x'' \lg \varphi \quad (4)$$

$$0 = \tau_x'' - \sigma_y'' \lg \varphi = \tau_y'' + \sigma_y'' \lg \varphi. \quad (5)$$

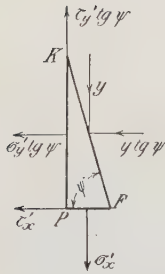


Abb. 4.

Das in Abb. 4 dargestellte unendlich kleine Mauerprisma *KPF* liegt an der *vom Wasser berührten* Mauerfläche *AD* und nimmt also außer den vier

Kräften σ_x' , τ_x' , $\sigma_y' \lg \psi$ und $\tau_y' \lg \psi$ noch den lotrechten Wasserdruck *y* und den wagerechten Wasserdruck $y \lg \psi$ auf. Das Gleichgewicht der sechs Kräfte fordert:

$$0 = \sigma_x' - \tau_y' \lg \psi + y = \sigma_x' + \tau_x' \lg \psi + y \quad (6)$$

$$0 = \tau_x' + \sigma_y' \lg \psi + y \lg \psi = -\tau_y' + \sigma_y' \lg \psi + y \lg \psi. \quad (7)$$

Für die an der Mauerkrone *AB* liegenden Teile sind alle Spannungen gleich null, weil diese Fläche keine äußeren Kräfte aufnimmt.

4. Annahmen über die Verteilung der Spannungen. Zwischen den vier Spannungen σ_x , τ_x , σ_y , τ_y eines Mauerteilchens G bestehen nur die drei Gleichungen 1), 2) und 3). Es handelt sich also um eine *statisch unbestimmte* Aufgabe, die unendlich viele Lösungen zuläßt. Formänderungsbedingungen, aus denen die vierte Gleichung abgeleitet werden könnte, bestehen nicht oder sind wenigstens nicht bekannt. Man ist daher genötigt, eine *Annahme* über die Verteilung der Spannungen in die Rechnung einzuführen, wie es aus demselben Grunde von *Navier* in der Theorie des geraden Balkens und von *Rankine* in der Theorie des Erddrucks geschehen ist. Die Zulässigkeit und die Wahrscheinlichkeit einer solchen Annahme ist selbstverständlich zu prüfen und zu begründen. Es können drei Fälle in Betracht kommen: Entweder ist die Spannung σ_x oder die Spannung ($\tau_x = -\tau_y$) oder die Spannung σ_y eine gegebene Funktion der Koordinaten x , y des Punktes G , in dem diese Spannungen wirksam sind. Nur die beiden ersten Fälle haben bis jetzt praktische Bedeutung gewonnen.

5. Erste Annahme. Die überwiegende Mehrzahl aller Ingenieure, die mit dem vorliegenden Gegenstande sich beschäftigt haben, geht von der Annahme aus, daß die Funktion σ_x in bezug auf die Ordinate x vom *ersten* Grade ist, daß also die Verteilung der Spannungen σ_x über einen wagerechten Schnitt durch ein *Trapez* dargestellt werden kann. Die Annahme deckt sich demnach mit der bekannten Annahme von *Navier* über die Verteilung der Normalspannungen des Querschnitts eines gebogenen Balkens (Abhandlung VII, 2). Die Resultante R der bekannten äußeren Kräfte, die auf den Mauerteil $ABHF$ (Abb. 1) von der Höhe y und von 1 dm Länge einwirken, setzt sich zusammen aus drei Kräften: dem Wasserdruck

$$H = \frac{y^2}{2}$$

gegen die lotrechte Fläche FL , dem Gewicht V_1 des Wasserkörpers AFL und dem Gewicht V_2 des Mauerteils $ABHF$. Die Kraft R läßt sich zerlegen in die lotrechte Seitenkraft

$$S = V_1 + V_2 \quad (8)$$

und die wagerechte Seitenkraft

$$T = H = \frac{y^2}{2}. \quad (9)$$

In Abb. 5 ist der Angriffspunkt der Kräfte R , S gegen die wagerechte Schnittfläche FH mit U und sein Abstand MU vom Schwer-

punkt M dieser Fläche mit s bezeichnet. Das Bieugungsmoment des wagerechten Mauerquerschnitts FH in bezug auf die Schwerpunktsachse MM hat demnach im Sinne des Uhrzeigers die Größe $-Ss$. In bezug auf dieselbe Achse ist das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche gleich $\frac{1}{12}(x_2 - x_1)^3$. Die Normalspannung σ_x im Punkte G , dessen Abstand von der Schwerpunktsachse

$$MG = \frac{2x - x_1 - x_2}{2}$$

ist, hat folglich die Größe

$$\sigma_x = - \left(\frac{S}{x_2 - x_1} + \frac{6Ss(2x - x_1 - x_2)}{(x_2 - x_1)^3} \right). \quad (10)$$

Wir verweisen auf die Gleichung 11) der Abhandlung VII. Dort ist gezeigt worden, daß sich die Spannungsverteilung auf graphischem

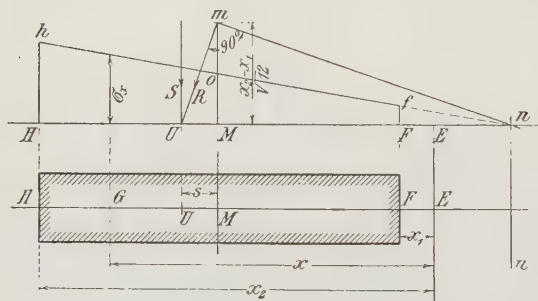


Abb. 5.

Wege auch in folgender Weise bestimmen läßt. Man trägt (Abb. 5) $\overline{Mm}$ gleich dem Trägheitshalbmesser der Querschnittsfläche FH

$$\overline{Mm} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{12}}$$

auf und zieht mn normal zu Um . Hierdurch ergibt sich die

neutrale Achse nn . Das Trapez $FfhH$ der Normalspannungen σ_x ist dann bestimmt durch die neutrale Achse und durch die Spannung $\overline{Mo}$ des Schwerpunktes M der Querschnittsfläche

$$\overline{Mo} = - \frac{S}{x_2 - x_1}. \quad (11)$$

6. Der Rechnungsgang. Aus den Abmessungen des lotrechten Mauerquerschnitts $ABCD$ ergeben sich für den wagerechten Schnitt FH die Normalkraft S und das Bieugungsmoment Ss als Funktionen der Ordinate y des Schnittes FH . Nachdem diese Größen in die Gleichung 10) eingesetzt worden sind, bestimmt man durch Differenzieren nach Gleichung 2) die Größe

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \gamma$$

und erhält durch das Integral

$$\int_H^G \frac{\partial \tau_y}{\partial x} dx = \tau_y - \tau_y'' = \int_H^G \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \gamma \right) dx \quad (12)$$

die Spannungen ($\tau_y = -\tau_x$) als Funktion der Koordinaten x, y des Punktes G . Der Integrationsweg ist durch die Punkte H und G angedeutet. Die Größe τ_y'' , d. h. die Spannung τ_y im Punkte H wird durch Gleichung 4) bestimmt. Es kann hierauf nach Gleichung 1) das Differential

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_x}{\partial y} \quad (13)$$

gebildet und durch das Integral

$$\int_H^G \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} dx = \sigma_y - \sigma_y'' = - \int_H^G \frac{\partial \tau_x}{\partial y} dx \quad (14)$$

die Spannung σ_y als Funktion der Koordinaten x, y dargestellt werden. Die Größe σ_y'' ist aus Gleichung 5) zu entnehmen. Man gelangt selbstverständlich zu denselben Ergebnissen, wenn man die Gleichungen 12) und 13) zwischen den Punkten G und F integriert und die Spannungen des Punktes F aus den Gleichungen 6) und 7) entnimmt.

7. Beispiel 1 (Abb. 6). Rechteckige Staumauer, Breite 200 dm, Höhe 300 dm, Dichte $\gamma = 2,5$ kg/cdm. Da die vom Wasser berührte Mauerfläche AD lotrecht ist, so ist

$$V_1 = 0$$

$$S = V_2 = 200 y \gamma = 500 y$$

$$S s = \frac{y^2}{2} \cdot \frac{y}{3} = \frac{y^3}{6}$$

$$x_2 = 200, \quad x_1 = 0,$$

folglich nach Gleichung 10)

$$\sigma_x = -\frac{5y}{2} + \frac{y^3}{40\,000} - \frac{xy^3}{4\,000\,000} \quad (15)$$

und nach Gleichung 2)

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \gamma = \frac{3y^2}{40\,000} - \frac{3xy^2}{4\,000\,000}.$$

Da der Winkel φ gleich 90° ist, so sind nach den Gleichungen 4) und 5) die Spannungen τ_y'' und σ_y'' im Punkte H gleich null und folglich nach Gleichung 12)

$$\tau_y = \frac{3y^2}{200} \left(\frac{x}{200} - \frac{x^2}{200^2} \right) = -\tau_x. \quad (16)$$

Die Gleichungen dieser beiden Leitkurven sind

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x' &= -\frac{5y}{2} + \frac{y^3}{40\,000} \\ \sigma_x'' &= -\frac{5y}{2} - \frac{y^3}{40\,000} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Die Spannung σ_x ist in diesem Beispiel überall eine *Druckspannung*, die im Punkte C von den Koordinaten ($x=200$), ($y=300$) den für die Standsicherheit der Mauer maßgebenden größten Wert

$$\sigma_x = -\frac{5 \cdot 300}{2} + \frac{300^3}{40\,000} - \frac{200 \cdot 300^3}{4\,000\,000} = -1425 \text{ kg/qdm}$$

erreicht. Bei leerem Staubecken ist die gleichmäßige Spannung der Fundamentfläche CD

$$\sigma_x = -300 \gamma = -750 \text{ kg/qdm.}$$

Die Vergrößerung durch den Wasserdruck beträgt also -675 kg/qdm.

Die *Spannungsfläche* τ_x ist nach Gleichung 16) ein Paraboloid, dessen Schnitte parallel zur $x-\tau_x$ -Ebene Parabelsegmente von der Form CmD , $C_1m_1D_1$ bilden. Die Pfeilhöhen dieser Segmente liegen in der Ebene ($x=100$) und werden durch die Gleichung

$$\tau_x = -\frac{3y^2}{800} \quad (19)$$

bestimmt. Ihren größten Wert erreichen die Schubspannungen also in der Mitte der Fundamentfläche CD ($x=100$, $y=300$):

$$Mm = \tau_y = -\tau_x = +\frac{3 \cdot 300^2}{800} = +338 \text{ kg/qdm.}$$

Die *Spannungsfläche* σ_y wird nach Gleichung 17) erzeugt durch eine zur $y-\sigma_y$ -Ebene parallel gerichtete Gerade, die von der x -Achse und in der Ebene ($y=300$) von der Kurve Ce geführt wird. Die Gleichung dieser Kurve ist

$$\sigma_y = 300 \left[-1 + 3 \left(\frac{x}{200} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{200} \right)^3 \right]. \quad (20)$$

σ_y ist überall eine *Druckspannung*, die im Punkte D ($x=0$, $y=300$) ihren größten Wert

$$\sigma_y = \overline{De} = -300 \text{ kg/qdm}$$

erreicht.

8. Zweite Annahme. Das Ergebnis des vorstehenden Beispiels, daß in einer *rechteckigen* Staumauer die Verteilung der Schubspannungen τ_x , τ_y durch ein Paraboloid von der oben beschriebenen

Form dargestellt wird, hat zu der Annahme geführt, daß dieses Verteilungsgesetz auch für Staumauern von anderer Form anwendbar und brauchbar sei. Bezeichnet τ_m die Schubspannung in der Mitte der wagerechten Querschnittsfläche von der Größe 1 dm ($x_2 - x_1$), also die Scheitelhöhe der Parabel, so fordert die Gleichgewichtsbedingung der Gleichung 9):

$$T = \frac{2}{3} \tau_m (x_2 - x_1) = \frac{y^2}{2},$$

und da die Parabel durch die Gleichung

$$\tau_y = -\tau_x = 4 \tau_m \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{(x - x_1)^2}{(x_2 - x_1)^2} \right)$$

dargestellt wird, so wird die zweite Annahme allgemein durch die Gleichung

$$\tau_y = -\tau_x = \frac{3 y^2}{x_2 - x_1} \left[\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)^2 \right] \quad (21)$$

ausgedrückt. Der Rechnungsgang möge an dem obigen Beispiel erklärt werden. Durch die Form des Mauerquerschnitts sind die Ordinaten x_1 und x_2 als Funktionen von y gegeben. Diese Funktionen sind in die Gleichung 21) einzusetzen. In unserem Beispiel haben x_1 und x_2 die unveränderlichen Werte

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 200,$$

wodurch Gleichung 21) die Form der Gleichung 16) annimmt:

$$\tau_y = -\tau_x = \frac{3 y^2}{200} \left[\frac{x}{200} - \left(\frac{x}{200} \right)^2 \right].$$

Durch Differenzieren ergibt sich hieraus nach Gleichung 1)

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = y \left(\frac{6x}{200^2} - \frac{6x^2}{200^3} \right)$$

und

$$\int_{200}^x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} dx = - \frac{6y}{200^3} \int_{200}^x x^2 dx + \frac{6y}{200^2} \int_{200}^x x dx.$$

Da nach Gleichung 5) für $x = 200$: $\sigma_y = \sigma_y'' = 0$ wird, so entsteht die Gleichung 17):

$$\sigma_y = y \left[-1 + 3 \left(\frac{x}{200} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{200} \right)^3 \right].$$

Man bildet ferner nach Gleichung 2) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} = \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \gamma = \left(\frac{3}{200^2} - \frac{6x}{200^3} \right) y^2 - \frac{\gamma}{2}$$

und erhält hieraus durch Integration

$$\int_0^y \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy = \left(\frac{3}{200^2} - \frac{6x}{200^3} \right) \int_0^y y^2 dy - \frac{5}{2} \int_0^y dy.$$

Da in der Mauerkrone, also für $y = 0$, die Spannung $\sigma_x = 0$ ist, so ergibt sich die Gleichung 15):

$$\sigma_x = -\frac{5y}{2} + \frac{y^3}{40\,000} - \frac{xy^3}{4\,000\,000}.$$

Für die *rechteckige* Mauer führen also beide Annahmen zu derselben Spannungsverteilung. Die folgenden Beispiele zeigen, daß für andere Mauerformen die Ergebnisse der beiden Annahmen weit voneinander abweichen.

9. Beispiel 2. Staumauer von dreieckigem Querschnitt, 300 dm Höhe, 200 dm Breite und einer Dichte $\gamma = \frac{5}{2}$. Durch die Querschnittsform sind ferner gegeben:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2}{3}y, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{tg} \psi = \infty.$$

Berechnung nach der ersten Annahme (Abb. 7). Durch Einsetzen der Werte

$$S = \gamma \frac{y}{2} \frac{2y}{3} = \frac{5}{6}y^2$$

und

$$Ss = +\frac{5}{6}y^2 \frac{1}{6} \frac{2}{3}y - \frac{y^2}{2} \frac{y}{3} = -\frac{2y^3}{27}$$

nimmt nach der ersten Annahme die Gleichung 10) folgende Form an:

$$\sigma_x = -3x - \frac{y}{4}. \quad (22)$$

Folglich ist nach Gleichung 2)

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} = \gamma + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} = +\frac{9}{4}$$

und

$$\int_0^x \frac{\partial \tau_y}{\partial x} dx = +\frac{9}{4} \int_0^x dx.$$

Da $\cotg \psi$ gleich null ist, so ist nach Gleichung 6) für $x = 0$ auch

$$\tau_y = \tau_y' = 0.$$

Die Integration der vorstehenden Gleichung ergibt daher

$$\tau_y = + \frac{9}{4} x = - \tau_x. \quad (23)$$

Man erhält ferner aus den Gleichungen 1) und 23)

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = 0$$

und

$$\int_0^x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} dx = \sigma_y - \sigma_y' = 0.$$

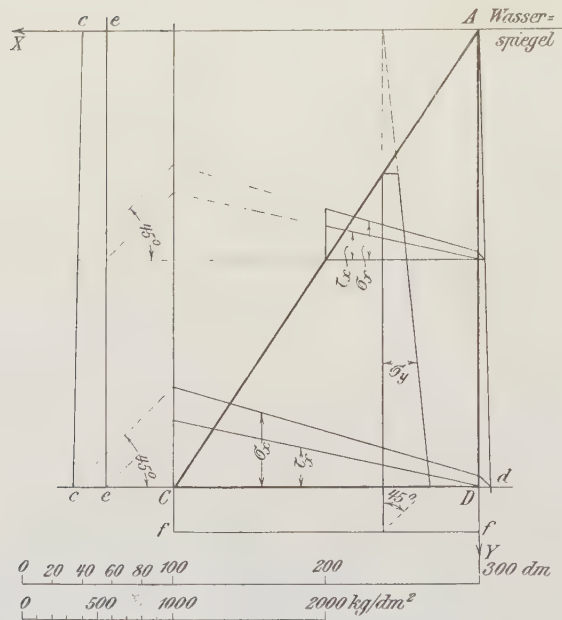


Abb. 7.

Da nach Gleichung 7) für x gleich null

$$\sigma_y' = - y$$

wird, so folgt

$$\sigma_y = - y. \quad (24)$$

Zufolge der ersten Annahme sind also alle drei Spannungsflächen σ_x , (τ_x, τ_y) , σ_y Ebenen. Die σ_x -Ebene schneidet die Ebene $(x=0)$ in der Geraden Ad von der Gleichung

$$\sigma_x = - \frac{y}{4}$$

und die Ebene ($x = 200$) in der Geraden ee von der Gleichung

$$\sigma_x = -600 - \frac{y}{4}.$$

Die τ_x -Ebene geht durch die y -Achse und schneidet die Ebene ($x = 200$) in der Geraden ee von der Gleichung

$$\tau_x = -\frac{9}{4} 200 = -450.$$

Die σ_y -Ebene geht durch die x -Achse, und ihr Schnitt mit der Ebene ($y = 300$) hat die Gleichung

$$\sigma_y = -300.$$

Die Spannungen $\sigma_x, \tau_x, \sigma_y$ sind demnach in allen Teilen der Mauer negativ und erreichen im Punkte C ihre Größtwerte:

$$\sigma_x = -675, \quad \tau_x = -450, \quad \sigma_y = -300.$$

Berechnung nach der zweiten Annahme (Abb. 8). Wird in die Gleichung 21) eingesetzt

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{2}{3} y,$$

so ergibt sich als Ausdruck der zweiten Annahme

$$\tau_y = \frac{9y}{2} \left[\frac{3x}{2y} - \left(\frac{3x}{2y} \right)^2 \right] = -\tau_x, \quad (25)$$

woraus nach Gleichung 1) folgt

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_x}{\partial y} = + \frac{81x^2}{8y^2}$$

und

$$\int_0^x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} dx = \frac{81}{8y^2} \int_0^x x^2 dx.$$

Nach Gleichung 7) ist für

$$x = 0, \quad \sigma_y' = -y.$$

Die Integration ergibt also

$$\sigma_y = y \left[\left(\frac{3x}{2y} \right)^3 - 1 \right]. \quad (26)$$

Ferner ist nach Gleichung 2)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} = \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \gamma = + \frac{17}{4} - \frac{81x}{4y}$$

und folglich

$$\int_{y_1}^y \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy = \frac{17}{4} \int_{y_1}^y dy - \frac{81x}{4} \int_{y_1}^y \frac{dy}{y}.$$

Für $y = y_1 = \frac{3}{2} x$, d. h. für einen Punkt in der Mauerfläche AC sind nach den Gleichungen 25) und 4) die Spannungen τ_y und σ_x gleich null, daher ist

$$\sigma_x = \frac{17 y}{4} \left(1 - \frac{3 x}{2 y} \right) + \frac{81 x}{4} \ln \frac{3 x}{2 y}. \quad (27)$$

Die Gleichungen 25) bis 27) zeigen, daß die drei Spannungsflächen *Kegel* sind, deren gemeinschaftliche Spitze mit dem Punkte A zusammenfällt. Die Leitkurven dieser drei Kegelflächen in der Ebene ($y = 300$) werden bestimmt durch die Gleichungen

$$\tau_y = 1350 \left(\frac{x}{200} - \frac{x^2}{200^2} \right) = -\tau_x$$

$$\sigma_y = -300 \left(1 - \frac{x^3}{200^3} \right)$$

$$\sigma_x = 1275 \left(1 - \frac{x}{200} + \frac{54}{17} \frac{x}{200} \ln \frac{x}{200} \right).$$

Die Spannung τ_y ist in allen Teilen der Mauer *positiv*; sie erreicht in der Mitte der Fundamentfläche ($x = 100$, $y = 300$) ihren größten Wert

$$\tau_y = +338 \text{ kg/qdm.}$$

Die Spannung σ_y ist überall *negativ* und hat im Punkte D ihren größten Wert

$$\sigma_y = \overline{Dg} = -300 \text{ kg/qdm.}$$

Dagegen ist die Spannung σ_x in allen Punkten der vom Wasser berührten Mauerfläche AD eine *Zugspannung*, die im Punkte D die sehr beträchtliche Größe

$$\sigma_x = \overline{Dd} = +1275 \text{ kg/qdm}$$

erreicht. Sie ist in allen Punkten der von der Luft

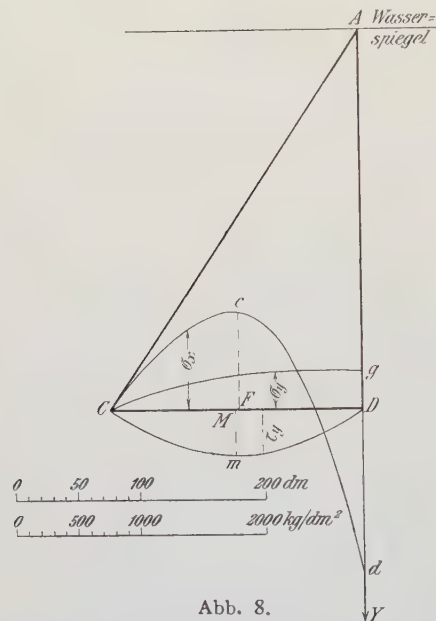


Abb. 8.

berührten Mauerfläche AC gleich null und erreicht in der Nähe der Mitte der Fundamentfläche CD ihren negativen Größtwert

$$\sigma_x = \overline{Fc} = -765 \text{ kg/qdm.}$$

Hieraus ist zu ersehen, daß die beiden Annahmen bei einem dreieckigen Mauerquerschnitt zu sehr verschiedenen Ergebnissen führen.

10. Beispiel 3.

Es erscheint zweckmäßig, noch an einem etwas weniger einfachen Falle die Anordnung der Zahlenrechnungen zu erklären und hierbei zugleich einige allgemeine Beziehungen abzuleiten, die auch für die vorhergehenden einfachen Beispiele gültig sind. Der in Abb. 9 dargestellte Mauerquerschnitt zeigt, daß die vom Wasser berührte Mauerfläche AD eine Ebene ist von der Gleichung

$$x_1 = 15 - \frac{y}{20}.$$

Die von der Luft berührte Mauerfläche BC ist ein parabolischer Zylinder von der Gleichung

$$x_2 = 40 + \frac{2y}{5} + \frac{y^2}{1500}.$$

Hierdurch sind die folgenden Abmessungen gegeben:

$y = 0$	100	200	300	dm
$x_1 = 15$	10	5	0	„
$x_2 = 40$	87	147	220	„
$\cotg \varphi = 0,40$	0,53	0,67	0,80	
$\cotg \psi = 0,05$	0,05	0,05	0,05	

Gegeben ist ferner die Dichte der Mauer

$$\gamma = 2 \text{ kg/qdm.}$$

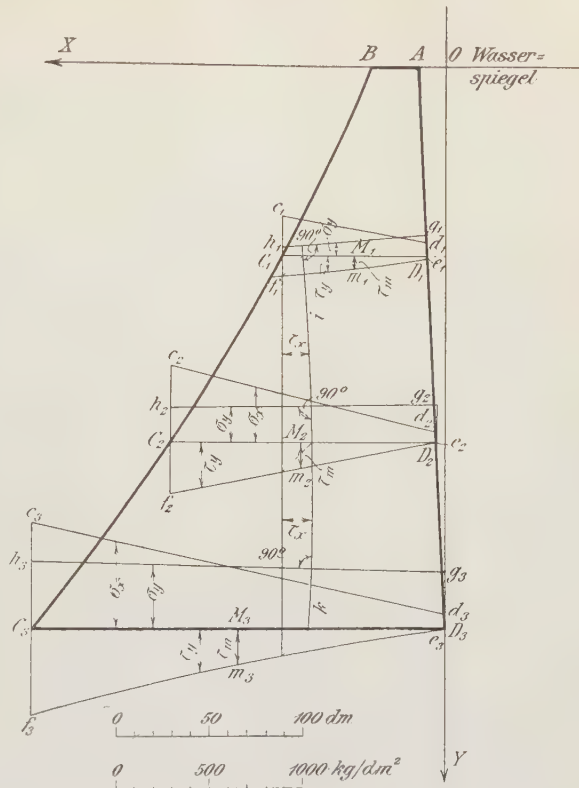


Abb. 9.

Für die drei wagerechten Schnitte ($y = 100$), ($y = 200$), ($y = 300$) sollen die Spannungen σ_x , ($\tau_x = -\tau_y$), σ_y berechnet werden.

Berechnung nach der ersten Annahme. Die Spannungen σ_x . Die Kräfte S und die Momente Ss sind durch Zusammensetzung der Kräfte H , V_1 , V_2 bestimmt worden, was einer weiteren Erklärung nicht bedarf. Die Zeichnung ergab für

$y =$	100	200	300 dm
$S =$	10 200	32 600	69 800 kg
$Ss = -$	66 300	622 000	1 953 000 dmkg.

Werden diese Werte eingesetzt in die Gleichung 10), so ergibt sich für

$$\begin{aligned} y = 100: \quad \sigma_x &= -48 - 1,74 x \\ y = 200: \quad \sigma_x &= -32 - 2,61 x \\ y = 300: \quad \sigma_x &= -75 - 2,20 x. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden durch die drei Trapeze $C_1 D_1 d_1 c_1$, $C_2 D_2 d_2 c_2$, $C_3 D_3 d_3 c_3$ dargestellt. Die Grenzwerte σ_x' , σ_x'' für die Abszissen x_1 und x_2 haben demnach die folgenden Größen für

$$\begin{aligned} y = 100: \quad \sigma_x' &= -65, \quad \sigma_x'' = -200 \text{ kg/qdm} \\ y = 200: \quad \sigma_x' &= -45, \quad \sigma_x'' = -415 \quad ,, \\ y = 300: \quad \sigma_x' &= -75, \quad \sigma_x'' = -559 \quad ,, \end{aligned}$$

Die Spannung σ_x ist also überall eine *Druckspannung*, die im Punkte C_3 ihren größten Wert -559 kg/qdm erreicht.

Die Spannungen ($\tau_y = -\tau_x$) werden durch die Gleichung 2) bestimmt:

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \gamma.$$

Die Spannung σ_x ist eine Funktion ersten Grades von x . Durch Differenzieren nach y wird dieser Grad nicht geändert. Daher ist $\frac{\partial \tau_y}{\partial x}$ eine Funktion ersten und folglich τ_y eine Funktion zweiten Grades von x , d. h. die Schnitte der zur Ebene $x - \tau_y$ parallel gestellten Ebenen mit der Spannungsfläche τ_y sind Parabeln mit lotrechter Achse. Von den drei Punkten, die eine dieser Parabeln bestimmen, werden nach den Gleichungen 6) und 4) zwei durch die Randbedingungen bestimmt. Für $x = x_1$ ist nach Gleichung 6):

$$\tau_{y'} = -\tau_{x'} = (\sigma_{x'} + y) \cotg \psi,$$

und für $x = x_2$ ist nach Gleichung 4):

$$\tau_{y''} = -\tau_{x''} = -\sigma_{x''} \cotg \varphi.$$

Demnach ist für den Schnitt ($y = 100$):

$$\overline{D_1 e_1} = \tau_{y'} = (-65 + 100) 0,05 = + 2 \text{ kg/qdm}$$

$$\overline{C_1 f_1} = \tau_{y''} = + 200 \cdot 0,53 = + 106 \text{ kg/qdm},$$

ferner für den Schnitt ($y = 200$):

$$\overline{D_2 e_2} = \tau_{y'} = (-45 + 200) 0,05 = + 8 \text{ kg/qdm}$$

$$\overline{C_2 f_2} = \tau_{y''} = + 415 \cdot 0,67 = + 277 \text{ kg/qdm}$$

und für den Schnitt ($y = 300$):

$$\overline{D_3 e_3} = \tau_{y'} = (-75 + 300) 0,05 = + 11 \text{ kg/qdm}$$

$$\overline{C_3 f_3} = \tau_{y''} = + 559 \cdot 0,80 = + 447 \text{ kg/qdm}.$$

Eine *dritte* Ordinate einer jeden Parabel, und zwar die Ordinate τ_m in der *Mitte* des Schnittes ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung

$$0 = T + \int_{x_1}^{x_2} \tau_x dx = \frac{y^2}{2} - \int_{x_1}^{x_2} \tau_y dx,$$

welche fordert, daß in bezug auf die x -Achse die Summe der Projektionen der auf den Mauerteil oberhalb des Schnittes wirkenden Kräfte gleich null sein muß. Nach der Simpsonschen Regel ist für die Parabelfläche *genau*

$$\int_{x_1}^{x_2} \tau_y dx = \frac{(x_2 - x_1) (\tau_{y'} + 4\tau_m + \tau_{y''})}{6},$$

also

$$\tau_m = \frac{3 y^2}{4(x_2 - x_1)} - \frac{\tau_{y'} + \tau_{y''}}{4}.$$

Hiernach ist für $y = 100$:

$$\overline{M_1 m_1} = \tau_m = \frac{3 \cdot 10\,000}{4 \cdot 77} - \frac{2 + 106}{4} = + 70 \text{ kg/qdm},$$

ferner für $y = 200$:

$$\overline{M_2 m_2} = \tau_m = \frac{3 \cdot 40\,000}{4 \cdot 142} - \frac{8 + 277}{4} = + 140 \text{ kg/qdm}$$

und für $y = 300$:

$$\overline{M_3 m_3} = \tau_m = \frac{3 \cdot 90\,000}{4 \cdot 220} - \frac{11 + 447}{4} = + 192 \text{ kg/qdm}.$$

Die überall *positive* Schubspannung τ_y erreicht also im Punkte C_3 ihren größten Wert

$$\overline{C_3 f_3} = + 447 \text{ kg/qdm}.$$

Die *Spannungen* σ_y . Nachdem die Spannungen ($\tau_x = -\tau_y$) bestimmt worden sind, ergeben sich aus den Randbedingungen der

Gleichungen 7) und 5) für jeden wagerechten Schnitt die beiden Grenzwerte von σ_y

$$\begin{aligned} &\text{für } x = x_1: \quad \sigma_y' = \tau_y' \cotg \psi - y \\ &\text{und für } x = x_2: \quad \sigma_y'' = -\tau_y'' \cotg \varphi. \end{aligned}$$

Man erhält nach diesen Gleichungen für den Schnitt $y = 100$:

$$D_1 g_1 = \sigma_y' = + 2 \cdot 0,05 - 100 = - 100 \text{ kg/qdm}$$

$$\overline{C_1 h_1} = \sigma_y'' = - 106 \cdot 0,53 = - 56 \text{ kg/qdm},$$

ferner für den Schnitt $y = 200$:

$$\overline{D_2 g_2} = \sigma_y' = + 8 \cdot 0,05 - 200 = - 200 \text{ kg/qdm}$$

$$\overline{C_2 h_2} = \sigma_y'' = - 277 \cdot 0,67 = - 186 \text{ kg/qdm}$$

und für den Schnitt $y = 300$:

$$\overline{D_3 g_3} = \sigma_y' = + 11 \cdot 0,05 - 300 = - 299 \text{ kg/qdm}$$

$$\overline{C_3 h_3} = \sigma_y'' = - 447 \cdot 0,80 = - 358 \text{ kg/qdm}.$$

Um die Kurven $g_1 h_1$, $g_2 h_2$, $g_3 h_3$, welche die Spannungen σ_y als Funktion von x darstellen, zu bilden, kann die Gleichung 1) benutzt werden:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = + \frac{\partial \tau_y}{\partial y}.$$

Man bildet zu diesem Zweck eine Anzahl Kurven ik , welche die Spannung ($\tau_x = -\tau_y$) als Funktion der Ordinate y darstellen. Liegt die Ordinate τ_x rechts von der zugehörigen lotrechten Achse, so fordert die vorstehende Gleichung, daß die beiden Tangenten der Kurven ik und gh , die zu ein und demselben Punkte x , y der Querschnittsebene gehören, unter rechtem Winkel sich kreuzen. In der Abb. 9 ist nur *eine* der Kurven ik stehen geblieben, um die Zeichnung nicht zu überladen. Die genannte Bedingung läßt erkennen, daß die Kurven $g_1 h_1$, $g_2 h_2$, $g_3 h_3$, welche σ_y darstellen, nur sehr wenig *von geraden Linien* abweichen, also genau genug durch die Punkte g , h bestimmt sind. Die Spannung σ_y ist in allen Teilen der Mauer eine *Druckspannung*, die im Punkte C_3 ihren Größtwert $\overline{C_3 h_3} = - 358 \text{ kg/qdm}$ erreicht.

Berechnung nach der zweiten Annahme (Abb. 10). Nach der zweiten Annahme werden die Schubspannungen durch Gleichung 21) bestimmt:

$$\tau_y = -\tau_x = \frac{3 y^2}{x_2 - x_1} \left[\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)^2 \right].$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte von x_1 und x_2 ergibt sich für den Schnitt $y = 100$:

$$\tau_y = -\tau_x = 390 \left[\frac{x - 10}{77} - \left(\frac{x - 10}{77} \right)^2 \right],$$

ferner für den Schnitt $y = 200$:

$$\tau_y = -\tau_x = 845 \left[\frac{x-5}{142} - \left(\frac{x-5}{142} \right)^2 \right]$$

und für den Schnitt $y = 300$:

$$\tau_y = -\tau_x = 1227 \left[\frac{x}{220} - \left(\frac{x}{220} \right)^2 \right].$$

Die Pfeilhöhen der drei Parabeln $C_1 m_1 D_1$, $C_2 m_2 D_2$, $C_3 m_3 D_3$, welche diese Gleichungen darstellen, haben die Größen:

$$\overline{M_1 m_1} = \frac{390}{4} = 97 \text{ kg/qdm}$$

$$\overline{M_2 m_2} = \frac{845}{4} = 211 \quad ,,$$

$$\overline{M_3 m_3} = \frac{1227}{4} = 307 \quad ,,$$

Die Schubspannung erreicht also in der Mitte M_3 der Fundamentfuge $C_3 D_3$ ihren größten Wert 307 kg/qdm.

Die Spannungen σ_y . Da τ_x und folglich auch die Größen

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}$$

Funktionen zweiten Grades von x sind, so bildet σ_y eine Funktion dritten Grades von x , der man die Form geben kann:

$$\sigma_y = \sigma_0 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \sigma_1 + \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right)^2 \sigma_2 + \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right)^3 \sigma_3. \quad (28)$$

Zur Bestimmung der vier unbekannten Spannungen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, lassen sich die folgenden vier Bedingungen verwenden. Nach den Gleichungen 5), 7) und 21) ist

$$\text{für } x = x_2: \quad \sigma_y'' = -\tau_y'' \cotg \varphi = 0$$

$$\text{und für } x = x_1: \quad \sigma_y' = -y,$$

daher ist nach Gleichung 28)

$$\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (29)$$

und

$$\sigma_0 = -y. \quad (30)$$

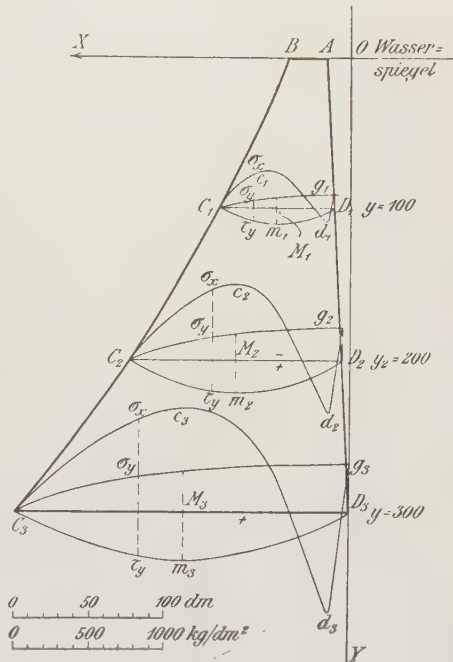


Abb. 10.

Zwei weitere Bedingungen ergeben sich aus dem Umstande, daß für alle in den Mauerflächen AD und BC liegenden Punkte die Schubspannungen ($\tau_x = -\tau_y$) gleich null sind. Für jeden dieser Punkte ist daher

$$0 = \frac{\partial \tau_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} dy, \quad (31)$$

woraus in Verbindung mit Gleichung 1) folgt:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = \frac{\partial \tau_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dy}. \quad (32)$$

Für einen Punkt der Wandfläche AD ist

$$x = x_1, \quad \frac{dx}{dy} = -\cotg \psi$$

und nach den Gleichungen 28) und 21)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} &= \frac{\sigma_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{\partial \tau_x}{\partial x} &= -\frac{3y^2}{(x_2 - x_1)^2}. \end{aligned}$$

Daher ist nach Gleichung 32)

$$\sigma_1 = \frac{3y^2 \cotg \psi}{x_2 - x_1}. \quad (33)$$

Ferner ist für einen Punkt der Wandfläche BC

$$\begin{aligned} x &= x_2, \quad \frac{dx}{dy} = +\cotg \varphi \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} &= \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3}{x_2 - x_1} \\ \frac{\partial \tau_x}{\partial x} &= \frac{3y^2}{(x_2 - x_1)^2} \end{aligned}$$

und also nach Gleichung 32)

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 = \frac{3y^2 \cotg \varphi}{x_2 - x_1}. \quad (34)$$

Die Gleichungen 29), 30), 33) und 34) ergeben:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= -y \\ \sigma_1 &= \frac{3y^2 \cotg \psi}{x_2 - x_1} \\ \sigma_2 &= 3y - \frac{3y^2 (\cotg \varphi + 2 \cotg \psi)}{x_2 - x_1} \\ \sigma_3 &= -2y + \frac{3y^2 (\cotg \varphi + \cotg \psi)}{x_2 - x_1} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Durch Einsetzen der gegebenen Werte in die Gleichung 28) erhält man für den Schnitt ($y = 100$ dm):

$$\sigma_y = -100 + 19 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} + 55 \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)^2 + 26 \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)^3,$$

ferner für den Schnitt ($y = 200$ dm):

$$\sigma_y = -200 + 42 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - 50 \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)^2 + 208 \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)^3$$

und für den Schnitt ($y = 300$ dm):

$$\sigma_y = -300 + 61 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - 204 \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)^2 + 443 \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)^3.$$

Zum Auftragen der Kurven $C_1 g_1$, $C_2 g_2$, $C_3 g_3$, durch welche diese Gleichungen dargestellt werden, benutzt man zweckmäßig die Ordinaten und die Tangenten der beiden Grenzpunkte ($x = x_1$) und ($x = x_2$), sowie die Ordinate σ_m im Mittelpunkt M des Schnittes:

$$\sigma_m = \sigma_0 + \frac{1}{2} \sigma_1 + \frac{1}{4} \sigma_2 + \frac{1}{8} \sigma_3. \quad (36)$$

Die Spannungen σ_x werden aus den Spannungen τ_y mittels der Gleichungen 2) und 21) abgeleitet:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} = \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \gamma = \frac{3 y^2}{(x_2 - x_1)^3} (x_1 + x_2 - 2x) - \gamma. \quad (37)$$

Für jeden wagerechten Schnitt wird also die Beziehung zwischen $\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}$ und x durch eine *gerade* Linie dargestellt. Die folgende Zahlen-
tafel enthält die Ordinaten dieser geraden Linien für die Schnitte $y = 0, 50, 100, 150, 200, 250$ und 300 dm und für die Abszissen $x = x_1$ und $x = x_2$:

y dm	x_1 dm	x_2 dm	$\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}$ in kg/cdm	
			für $x = x_1$	$x = x_2$
0	15	40	- 2,00	- 2,00
50	13	62	+ 1,12	- 5,12
100	10	87	+ 3,06	- 7,06
150	8	115	+ 3,90	- 7,90
200	5	147	+ 3,95	- 7,95
250	3	182	+ 3,85	- 7,85
300	0	220	+ 3,58	- 7,58

In Abb. 11 sind diese Geraden nach dem beigefügten Maßstabe aufgetragen worden; beispielsweise ist ab die zum Schnitt ($y = 100$ dm) gehörende Gerade. Hiernach konnten in Abb. 12 die Kurven gebildet werden, die für die lotrechten Schnitte $x = 15, 40, 62, 87, 115, 147$ und 182 dm die Beziehungen zwischen $\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}$ und y

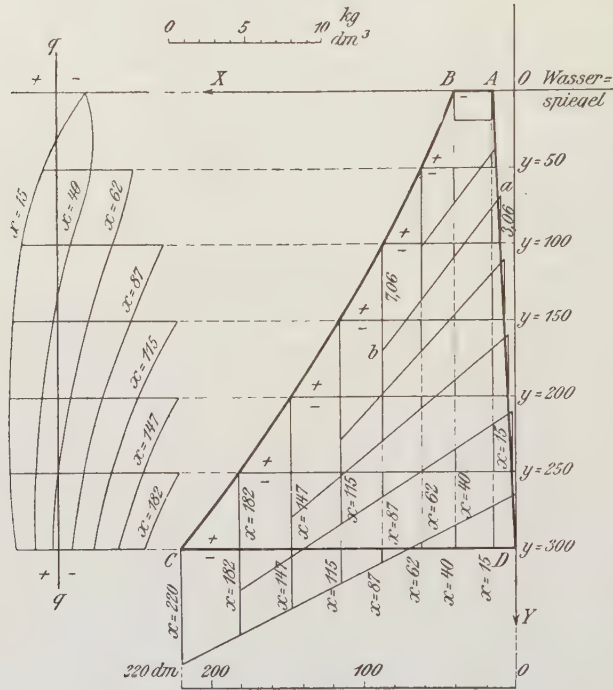


Abb. 12.

Abb. 11.

darstellen. Die wagerechten Ordinaten $\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}$ beziehen sich auf die lotrechte Achse qq . Für jeden der oben bezeichneten lotrechten Schnitte ergaben sich darauf die Spannungen σ_x nach der Gleichung

$$\sigma_x = \int_{y_1}^y \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy$$

durch Berechnung der Flächen, die in der Abb. 12 zwischen der Achse qq und den darstellenden Kurven liegen, wobei folgendes zu beachten war. Für die Punkte der Fläche BC , also für y gleich y_1 , ist nach Gleichung 4) σ_x gleich null, und für die Punkte der

Fläche AD , also für x gleich x_1 , ist nach Gleichung 6) σ_x gleich $-y$. Die Flächenmessung ergab die in der folgenden Zahlentafel zusammengestellten Werte von σ_x . Hiernach konnten in Abb. 10 die Kurven $C_1 c_1 d_1 g_1$, $C_2 c_2 d_2 g_2$, $C_3 c_3 d_3 g_3$ für die drei Schnitte $y = 100$, $y = 200$, $y = 300$ dm aufgetragen werden.

Werte der Spannungen σ_x in kg/qdm

	$x = x_1$	$x = 15$	$x = 40$	$x = 62$	$x = 87$	$x = 115$	$x = 147$	$x = 182$	$x = 220$
$y = 100$	-100	+ 50	-195	-215	0				
$y = 200$	-200	+ 320	-170	-415	-480	-325	0		
$y = 300$	-300	+ 616	- 38	-423	-640	-685	-560	-345	0

Die Spannungen σ_x sind demnach in den Punkten der von der Luft berührten Mauerfläche BC gleich null, sie erreichen in der Nähe der Mitte der wagerechten Schnitte ihre negativen und neben der Lotrechten des Punktes A ihre positiven Größtwerte. In der Fundamentfuge $C_3 D_3$ erreichen diese Größtwerte ihre Grenzen -700 und $+616$ kg/qdm. In den Punkten der vom Wasser berührten Fläche BC ist σ_x eine *Druckspannung* und gleich σ_y .

II. Grapische Darstellung des Spannungszustandes eines Punktes der Mauer. Nachdem für einen Punkt (x, y) des Mauerquerschnitts die algebraischen Werte der vier Spannungen σ_x , τ_x , σ_y , τ_y bestimmt worden sind, kann der Spannungszustand dieses Punktes nach dem in Abhandlung V beschriebenen Verfahren in folgender Weise dargestellt werden. Wir wählen als Beispiel den Punkt C_3 der in Abb. 9 dargestellten Mauer. Für diesen Punkt ergab sich in kg/qdm:

$$\sigma_x = -559, \quad \tau_y = -\tau_x = +447, \quad \sigma_y = -358.$$

In bezug auf eine wagerechte nach rechts zeigende σ -Achse und eine lotrechte nach oben zeigende τ -Achse werden nach einem beliebig gewählten Spannungsmaßstabe bestimmt:

der Punkt p_x durch die Koordinaten

$$\sigma_x = -559, \quad \tau_x = -447$$

und der Punkt p_y durch die Koordinaten

$$\sigma_y = -358, \quad \tau_y = +447.$$

Der Schnittpunkt m der Geraden $p_x p_y$ mit der σ -Achse ist der Mittelpunkt des *Spannungskreises*, und der auf diesem Kreis liegende

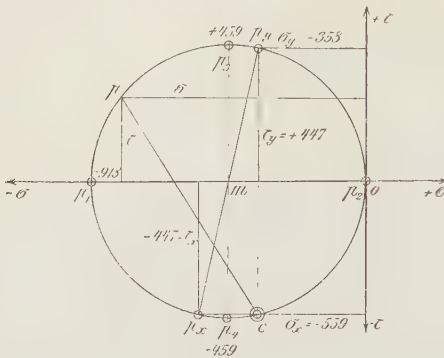


Abb. 13.

Schnittpunkt c der Ordinate τ_y mit der Abszisse σ_x ist der *Pol* der graphischen Darstellung. Jede durch den Pol c gelegte Kreissehne cp bestimmt durch die Koordinaten des Kreispunktes p nach Größe und Sinn die Normalspannung σ und die Schubspannung τ des durch den Punkt C_3 der Mauer parallel zu cp gelegten Schnittes. Die Darstellung bestimmt also für den Punkt C_3 die

Stellungen cp_1, cp_2, cp_3, cp_4 der vier Schnitte, in denen die Spannungen σ und τ ihre Grenzwerte erreichen:

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

$$\tau_{\min} = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

$$\tau_{\max} = +\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

Im vorliegenden Beispiel ergibt sich durch Einsetzen der gegebenen Werte:

$$\sigma_{\min} = -918, \quad \sigma_{\max} = 0, \quad \tau_{\max} = -\tau_{\min} = +459.$$

Der Schnitt cp_2 entspricht der spannungslosen von der Luft berührten Mauerfläche im Punkt C_3 .

12. Vergleichung der beiden Annahmen in bezug auf ihre Wahrscheinlichkeit. In technischen Mitteilungen über statisch unbestimmte Aufgaben der hier vorliegenden Art tritt vielfach die Ansicht zutage, daß eine exakte Lösung möglich sei, wenn nur die mathematischen Schwierigkeiten überwunden werden könnten. Man spricht von der „wahren“ Drucklinie eines Gewölbes, von dem „wirklichen“ Erddruck gegen eine Stützmauer in der Meinung, daß unter den unendlich vielen statisch möglichen Lösungen eine bestimmbar die *wahre* oder die *wirkliche* sein müsse. Ich glaube, daß diese Meinung auf einer irrtümlichen Auffassung beruht. Wäre man

imstande, die inneren Kräfte in zehn Bauwerken, die in den für die Berechnung maßgebenden Umständen sich nicht voneinander unterscheiden, genau zu messen, so würde man wahrscheinlich zehn Ergebnisse erhalten, die alle, und zwar nicht unerheblich, voneinander abweichen. Man würde ferner finden, daß diese Abweichungen mit der Zeit sich ändern, daß sie heute andere sind als morgen oder nach einem Jahre. „Das Gewölbe schläft nie“, sagt ein chinesisches Sprichwort. Das gilt nicht nur von Gewölben, sondern auch von anderen Bauwerken, insbesondere von solchen, die aus Mauerwerk hergestellt sind. Solange der Mörtel im Mauerwerk nicht vollkommen erhärtet ist, finden langsame, meist unelastische Formänderungen und Bewegungen statt. Jede solche Bewegung hat eine Aenderung der Spannungszustände zur Folge, und es ist ein Glück für den Ingenieur, daß diese Aenderungen in der Regel nicht von schädlicher, sondern im Gegenteil vermöge ihrer Natur von nützlicher Beschaffenheit sind. Denn sie bestehen darin, daß der Mörtel den schärferen Spannungen ausweicht, wodurch eine *Ausgleichung, eine gleichmäßigere Verteilung* der inneren Kräfte herbeigeführt wird. Selbstverständlich werden diese Spannungsänderungen bedingt und begrenzt einerseits durch die Gleichgewichtsbedingungen und anderseits durch die Bewegungsfähigkeit des Mörtels. Ein langsam bindender und langsam erhärtender Mörtel wirkt günstiger als ein rasch erhärtender, der unelastische Formänderungen erschwert und zur Bildung von Rissen und Sprüngen geneigt ist. Hierin liegt wohl der Grund, weshalb erfahrene Ingenieure den langsam erhärtenden Traßmörtel dem Zementmörtel vorziehen, wobei ferner noch in Betracht kommt, daß der Traßmörtel infolge der gleichmäßigeren Zusammenpressung eine größere Wasserdichtigkeit gewährt. Wären die oben bezeichneten Eigenschaften des Mauerwerks vollkommen, so würden die Formänderungen erst ihren Abschluß finden, nachdem die inneren Kräfte die möglichst gleichmäßige, also *möglichst günstige Verteilung* erreicht haben. Diese Annahme würde freilich zu weit gehen, immerhin bietet sie eine geeignete Rechnungsgrundlage, wenn die möglichen Abweichungen von jener günstigsten Annahme durch eine geeignete Wahl der zulässigen Spannungsgrenzen abgeschätzt werden. Die Fähigkeit des Schätzens wird nicht nur hier, sondern bei allen Aufgaben des Ingenieurs in Anspruch genommen. Man wird nicht hoffen dürfen, mit Hilfe der Elastizitätslehre zu einem zuverlässigeren Ergebnis gelangen zu können, weil die Bewegungen, durch welche die Spannungszustände erzeugt werden, nicht nur elastisch, sondern hauptsächlich unelastisch sind. Auch von Ver-

suchen in Laboratorien, wie sie z. B. in England mit Modellen aus Holz und Kautschuk angestellt worden sind, werden zuverlässige Aufschlüsse nicht zu erwarten sein, weil die hier in Betracht kommenden Eigenschaften des Mauerwerks und des Mörtels in einem Modell aus anderem Material nicht nachzuahmen sind, und weil die Messung der inneren Kräfte mit großen Schwierigkeiten verbunden ist.

Werden die beiden Annahmen, die den vorstehenden Rechnungen zugrunde liegen, nach den hier angedeuteten Gesichtspunkten miteinander verglichen, so wird die *erste* Annahme als brauchbar und wahrscheinlich, die *zweite* dagegen als unbrauchbar und sehr unwahrscheinlich bezeichnet werden müssen. Die *erste* Annahme führt zu Spannungszuständen, die der günstigsten Verteilung sich annähern und daher von der Wirklichkeit nicht weit abweichen werden. Dagegen ergibt die *zweite* Annahme eine sehr ungleichmäßige und deshalb unwahrscheinliche Verteilung der Spannungen σ_x . Die Unwahrscheinlichkeit ist zu folgern aus der Erfahrungstatsache, daß ausgeführte Staumauern, die nach Form und Abmessungen von den in den Abb. 8 und 9 dargestellten Mauern nur wenig abweichen, als durchaus standsicher sich erwiesen haben, während ihr Bestand im höchsten Grade gefährdet sein würde, wenn die Rechnungsergebnisse der *zweiten* Annahme wirklich eintreten sollten. Die in Abb. 8 durch die Kurve *CcdD* dargestellten Spannungen σ_x sind als unmöglich zu bezeichnen, weil Mörtel von gewöhnlicher Beschaffenheit Zugspannungen von solcher Größe (1275 kg/qdm) nicht aushalten kann. Die Fugen an der vom Wasser berührten Mauerfläche *AD* würden sich öffnen, und das in die offenen Fugen eindringende Wasser würde durch seinen Auftrieb den Einsturz der Mauer herbeiführen. Nicht ganz so ungünstig gestaltet sich die in Abb. 10 durch die Kurven *CcdgD* dargestellte Spannungsverteilung, weil infolge der Neigung der Wandfläche *AD* die Zugspannungen in der Nähe dieser Fläche bis auf etwa 620 kg/qdm ermäßigt werden. Aber auch diese Spannung überschreitet das zulässige Maß beträchtlich und würde den Bestand der Mauer gefährden. Als sehr unwahrscheinlich sind ferner die schroffen Spannungsübergänge bei den Punkten *d* und die Spannungslosigkeit der an der Wandfläche *BC* liegenden Mauerteile zu bezeichnen.

13. Literarische Notiz. Die vorstehende Abhandlung bildet den wesentlichen Inhalt eines Aufsatzes über denselben Gegenstand, der im Jahrgang 1908 der Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins veröffentlicht wurde.

Abhandlung IX.

Der kontinuierliche Balken.

1. Gegenstand der Untersuchung und ihre Voraussetzungen. Die folgenden Rechnungen beziehen sich auf einen geraden, vollkommen elastischen Balken, auf den nur lotrechte und in *einer* Ebene liegende Kräfte, die Belastungen und die Stützkkräfte, einwirken. Die Kraftebene ist eine *Symmetrieebene* des Balkens; infolgedessen verwandelt sich die ursprünglich gerade Balkenachse bei der Biegung in eine *ebene* Kurve, die *elastische Linie*. Eine mathematisch genaue Bestimmung der Formänderung ist unausführbar. Rechnung und Beobachtung haben aber zu der Erkenntnis geführt, daß von den inneren Kräften, welche die Formänderung erzeugen, nur die *Normalspannungen* der Balkenquerschnitte berücksichtigt zu werden brauchen, weil hiergegen der Einfluß aller übrigen Spannungen verschwindet.

Um die Querschnittsmaße eines auszuführenden Balkens so wählen zu können, daß die Inanspruchnahme seiner Festigkeit die zulässigen Grenzen nicht überschreitet, müssen aus den gegebenen Belastungen die unbekannten Stützkkräfte oder die von ihnen abhängigen Biegemomente und Schubkräfte der Balkenquerschnitte berechnet werden. Diese Kräfte und Momente sind in höchst empfindlicher Weise abhängig von der Stützenlage, insbesondere von der Höhenlage der Stützen. Es ergeben sich demnach die Fragen: Welche Stützenlage ist die vorteilhafteste, und welche Nachteile und Gefahren sind mit einer zufälligen Aenderung der Stützenlage verbunden? Endlich sind in manchen Fällen die größten Formänderungen des Balkens, besonders die größten Einsenkungen zwischen den Stützen von Interesse.

Die angedeuteten Aufgaben können durch Rechnung oder auf graphischem Wege gelöst werden. Es erscheint zweckmäßig, beide

stand der Faser GH von der neutralen Faserschicht EF . Da die Spannung der Faser GH nach Gleichung 10) der Abhandlung VII die Größe

$$\sigma = \frac{Ma}{J}$$

hat, so ist ihre elastische Längenänderung

$$HK = \frac{Ma \, dx}{\varepsilon J}.$$

Folglich ist

$$d\varphi = \frac{M \, dx}{\varepsilon J} \quad (2)$$

und

$$\varrho = \frac{dx}{d\varphi} = \frac{\varepsilon J}{M}. \quad (3)$$

Wir haben dem Biegemoment M das *positive* Vorzeichen beigelegt, wenn die *konkave* Seite des gebogenen Balkens nach *oben* gekehrt ist (II, 8); in diesem Falle ist d^2y und folglich ϱ *negativ*. Demnach ist die Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M}{\varepsilon J}. \quad (4)$$

Die vorstehende Betrachtung enthält nicht die Voraussetzung, daß der Balkenquerschnitt nach Form und Größe unveränderlich sei; sie gilt also für den allgemeinen Fall, in welchem das Trägheitsmoment J eine veränderliche Größe hat.

3. Die Biegemomente und die Schubkräfte der Querschnitte eines kontinuierlichen Balkens. Man kann jeden kontinuierlichen Balken (Abb. 3) ansehen als einen *einfachen* Balken, der nur in seinen Endpunkten 1 und 5 gestützt ist und außer den wirklichen, nach unten zeigenden positiven Lasten $P_1, P_2, P_3 \dots$ als *negative* Lasten die nach oben zeigenden Drücke der *Mittelstützen* Q_2, Q_3, Q_4 aufnimmt. Wenn alle diese Lasten bekannt sind, so ergibt sich die graphische Darstellung der Biegemomente nach (II, 8), indem man das Seilpolygon der Lasten P, Q aufträgt und die Schlußlinie AJ zieht. Die Ordinaten der in Abb. 2 unter der Schlußlinie liegenden Seilpolygonflächen bestimmen die *positiven* Biegemomente der nach unten gekrümmten Balkenstrecken, während die *über* der Schlußlinie liegenden Flächen die *negativen* Biegemomente der in der Nähe der Mittelstützen liegenden, nach oben gekrümmten Balkenteile darstellen. In den Ordinaten der

Querschnitte, in welchen M gleich null wird, liegen die W. S. p. der elastischen Linie. Ist der Längenmaßstab der Zeichnung z. B. 1:200 und die Horizontalkraft H des Seilpolygons

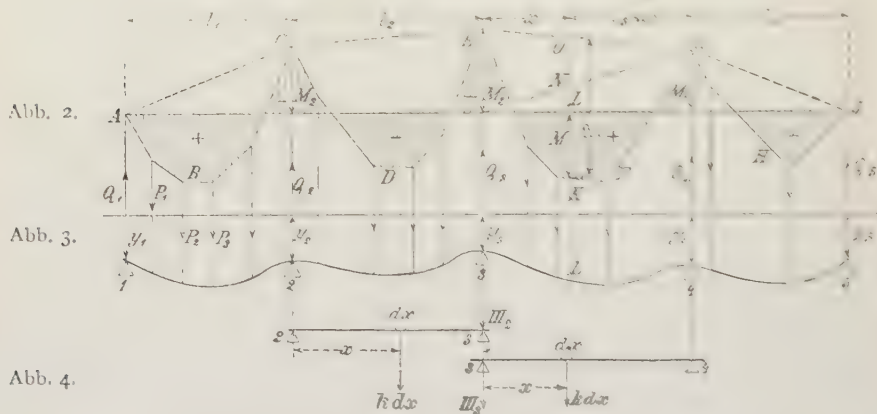
$$H = 1500 \text{ kg,}$$

so sind die Ordinaten des Seilpolygons als Darstellung der Biegemomente mit dem Maßstabe

$$1 \text{ cm} = 200 \text{ cm} \cdot 1500 \text{ kg} = 300\,000 \text{ cm kg}$$

zu messen.

Würde der Balken über jeder Mittelstütze durchgeschnitten, so daß jedes Balkenfeld an seinen Enden *frei* unterstützt wäre, so



würden die *positiven* Biegemomente $\mathfrak{M}$ der vier Balkenfelder nach (II, 8) durch die Ordinaten der Flächen ABC , CDE , EFG , GHJ dargestellt werden.

Wir fassen irgend einen Balkenquerschnitt ins Auge, z. B. den Querschnitt L im dritten Balkenfelde, dessen Abstand von der dritten Stütze mit x bezeichnet wird. Die Stützweite des dritten Feldes hat die wagerechte Länge l_3 , und die Biegemomente der Balkenquerschnitte über der dritten und der vierten Stütze haben die algebraischen Werte M_3 und M_4 . Das Biegemoment M des Querschnittes L des kontinuierlichen Balkens wird bestimmt durch die Strecken:

$$M = LK = OK - ON - NL.$$

Die Strecke OK bestimmt das Biegemoment $\mathfrak{M}$, das der Querschnitt L aufnehmen mußte, wenn der Balken über den Stützen ;

und 4 durchschnitten und von diesen Stützen also frei unterstützt würde. Die beiden anderen Strecken ON und NL haben die Werte:

$$ON = -\frac{l_3 - x}{l_3} M_3$$

$$NL = -\frac{x}{l_3} M_4,$$

und folglich ist

$$M = \mathfrak{M} + \frac{l_3 - x}{l_3} M_3 + \frac{x}{l_3} M_4. \quad (5)$$

Die Schubkraft V des Balkenquerschnittes L , d. h. die Resultante aller *links* vom Querschnitt L von dem kontinuierlichen Balken aufzunehmenden Lasten und Stützdrucke hat nach (VII, 8, Gleichung 21) die Größe

$$V = \frac{dM}{dx}$$

oder

$$V = \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + \frac{M_4 - M_3}{l_3}. \quad (6)$$

Die Schubkraft V trägt nach (VII, 8) das *positive* Vorzeichen, wenn die bezeichnete Resultante nach *oben* zeigt. Wir bezeichnen die Grenzwerte von V innerhalb eines Balkenfeldes, also für die Abszissen 0 und l mit A und B , demnach für das dritte Feld mit A_3 , B_3 , für das vierte Feld mit A_4 , B_4 usf., ferner die nach oben zeigenden Drücke der Stützen 1, 2, 3 . . . gegen den Balken mit Q_1 , Q_2 , Q_3 . . . Die Schubkraft A_4 des Querschnitts unmittelbar rechts neben der vierten Stütze bildet also die Summe aus der Schubkraft B_3 unmittelbar links neben jener Stütze und der Stützkraft Q_4 :

$$A_4 = B_3 + Q_4;$$

daher haben die Stützkraften Q die Größen:

$$Q_1 = A_1, \quad Q_2 = A_2 - B_1, \quad Q_3 = A_3 - B_2, \quad Q_4 = A_4 - B_3 \text{ usf.} \quad (7)$$

Als Beispiel zur Erläuterung der vorstehenden Beziehungen wählen wir den Fall, in welchem die Belastung eines jeden Balkenfeldes über dessen Länge l *gleichmäßig* verteilt ist. Das dritte Feld trägt die gleichmäßig verteilte Last $p_3 l_3$ und daher ist für dieses Feld:

$$\mathfrak{M} = \frac{p_3}{2} (l_3 x - x^2)$$

$$M = M_3 + \left(\frac{M_4 - M_3}{l_3} + \frac{p_3 l_3}{2} \right) x - \frac{p_3}{2} x^2 \quad (8)$$

$$V = \frac{M_4 - M_3}{l_3} + \frac{p_3 l_3}{2} - p_3 x. \quad (9)$$

Für x gleich null und gleich l_3 nimmt V die Werte an:

$$A_3 = \frac{M_4 - M_3}{l_3} + \frac{p_3 l_3}{2} \quad (10)$$

$$B_3 = \frac{M_4 - M_3}{l_3} - \frac{p_3 l_3}{2}. \quad (11)$$

Ebenso ist

$$A_4 = \frac{M_5 - M_4}{l_4} + \frac{p_4 l_4}{2}$$

und folglich nach Gleichung 7)

$$Q_4 = A_4 - B_3 = \frac{M_5 - M_4}{l_4} - \frac{M_4 - M_3}{l_3} + \frac{p_4 l_4}{2} + \frac{p_3 l_3}{2}. \quad (12)$$

Das größte *positive* Bieugungsmoment M'_3 innerhalb des dritten Feldes ist von dem Balkenquerschnitt aufzunehmen, für den

$$\frac{dM}{dx} = V = 0$$

also

$$x = \frac{l_3}{2} + \frac{M_4 - M_3}{p_3 l_3} = \frac{A_3}{p_3} \quad (13)$$

ist. Da nach Gleichung 8):

$$M = M_3 + A_3 x - \frac{p_3 x^2}{2} \quad (14)$$

ist, so ergibt sich durch Einsetzen des Wertes von x

$$M'_3 = M_3 + \frac{A_3^2}{2 p_3}. \quad (15)$$

Diese Maximalmomente und die größten Stützenmomente kommen bei der Wahl der Balkenquerschnitte hauptsächlich in Betracht.

4. Die Berechnung der Stützenmomente. Wir numerieren wie im vorigen Abschnitt die Stützen und die Balkenfelder von links nach rechts, so daß z. B. das dritte Balkenfeld zwischen den Stützen 3 und 4 liegt, und bezeichnen: die Stützweiten der Balkenfelder 1, 2, 3 . . . mit $l_1, l_2, l_3 \dots$, die Ordinaten der Stützen 1, 2, 3 . . ., bezogen auf das im Abschnitt 2 beschriebene Koordinatensystem, mit $y_1, y_2, y_3 \dots$ und die Neigungen $\frac{dy}{dx}$ der elastischen Linie über den Stützen 1, 2, 3 . . . mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$; die Zahlen α tragen also das positive Vorzeichen, wenn die elastische Linie von links nach rechts

fällt. Wir nehmen an, daß das Trägheitsmoment J des Balkenquerschnittes veränderlich ist, und setzen zur Abkürzung die im übrigen nach Gleichung 5) zu bestimmende GröÙe

$$\frac{M}{\varepsilon J} = k, \quad (16)$$

wodurch die Differentialgleichung der elastischen Linie die Form

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -k$$

annimmt. Die hier in Frage kommende Beziehung ergibt sich, indem man diese Gleichung für zwei aufeinanderfolgende Balkenfelder, z. B. für die Felder 2 und 3 integriert. Für das zweite Balkenfeld legen wir die y -Achse durch die Stütze 2 und erhalten, indem wir einmal von 0 bis x , das zweite Mal von 0 bis l_2 integrieren, die beiden Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} - \alpha_2 = - \int_0^x k \, dx = w \quad (17)$$

und

$$\alpha_3 - \alpha_2 = - \int_0^{l_2} k \, dx = w_2, \quad (18)$$

Aus Gleichung 17) folgt durch eine zweite Integration von 0 bis l_2 :

$$y_3 - y_2 - l_2 \alpha_2 = \int_0^{l_2} w \, dx. \quad (19)$$

Da nach einer bekannten Formel der Integralrechnung:

$$\int_0^{l_2} w \, dx = l_2 w_2 - \int_{x=0}^{x=l_2} x \, dw$$

und nach Gleichung 17)

$$dw = -k \, dx$$

ist, so folgt aus Gleichung 19)

$$y_3 - y_2 = l_2 \alpha_2 + l_2 (\alpha_3 - \alpha_2) + \int_0^{l_2} x k \, dx$$

oder

$$\frac{y_3 - y_2}{l_2} = \alpha_3 + \frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} x k \, dx. \quad (20)$$

In gleicher Weise ergibt sich für das dritte Balkenfeld, wenn

die x -Achse in ihrer Lage bleibt, die y -Achse aber durch die Stütze 3 gelegt wird, nach den Gleichungen 18) und 20):

$$\alpha_4 - \alpha_3 = - \int_0^{l_3} k \, dx \quad (21)$$

und

$$\frac{y_4 - y_3}{l_3} = \alpha_4 + \frac{1}{l_3} \int_0^{l_3} x \, k \, dx. \quad (22)$$

Wir folgern aus den Gleichungen 20) und 22):

$$\frac{y_3 - y_2}{l_2} - \frac{y_4 - y_3}{l_3} = \alpha_3 - \alpha_4 + \frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} x \, k \, dx - \frac{1}{l_3} \int_0^{l_3} x \, k \, dx \quad (23)$$

und aus den Gleichungen 21) und 23):

$$\frac{y_3 - y_2}{l_2} + \frac{y_3 - y_4}{l_3} = \frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} x \, k \, dx + \int_0^{l_3} k \, dx - \frac{1}{l_3} \int_0^{l_3} x \, k \, dx. \quad (24)$$

Diese Beziehung läßt sich durch Abb. 2 und 4 in folgender Weise veranschaulichen. Man belastet einen Balken, der an seinen Enden von den Stützen 2 und 3 frei gestützt wird, auf jeder unendlich kleinen Strecke dx mit der zugehörigen unbenannten Zahl

$$k \, dx = \frac{M \, dx}{\varepsilon J}$$

und gibt diesen Lasten den Sinn nach unten oder nach oben, je nachdem M für die Strecke dx positiv oder negativ ist. Dann bezeichnet das Integral

$$\frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} x \, k \, dx = \text{III}_2 \quad (25)$$

den Stützendruck, den das Balkenfeld 2 auf die Stütze 3 überträgt. Ebenso bezeichnet die unbenannte Zahl

$$\int_0^{l_3} k \, dx - \frac{1}{l_3} \int_0^{l_3} x \, k \, dx = \text{III}_3 \quad (26)$$

den Stützendruck, den das Balkenfeld 3 (Abb. 4) auf die Stütze 3 überträgt. Die algebraische Summe dieser beiden Stützendrücke muß also gleich der auf der linken Seite der Gleichung 24) angegebenen algebraischen Zahl sein:

$$\frac{y_3 - y_2}{l_2} + \frac{y_3 - y_4}{l_3} = \text{III}_2 + \text{III}_3. \quad (27)$$

Liegen alle Stützen in *gleicher* Höhe, so wird

$$\text{III}_2 + \text{III}_3 = 0.$$

Die beiden Stützendrücke sind dann also der Größe nach gleich, dem Sinne nach einander entgegengesetzt.

Indem man die Gleichung 24) für je zwei aufeinanderfolgende Balkenfelder bildet und die Integrale mit Hilfe der Gleichung 5) und der gegebenen Werte von J berechnet, ergeben sich ebenso viele Bedingungen, wie unbekannte Stützenmomente vorhanden sind.

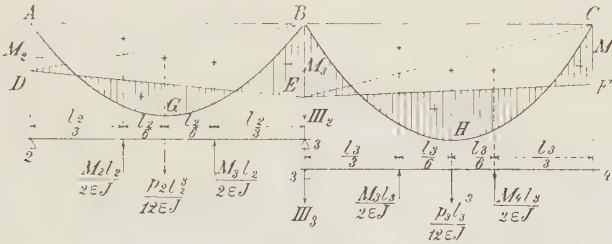


Abb. 5.

Als Beispiel der Anwendung betrachten wir einen kontinuierlichen Balken *konstanten* Querschnittes, dessen Felder 1, 2, 3 ... die gleichmäßig verteilten Lasten $p_1 l_1$, $p_2 l_2$, $p_3 l_3$... tragen (Abb 5). Die von der Ordinate

$$k = \frac{M}{\varepsilon J}$$

beschriebene Belastungsfläche des zweiten Balkenfeldes läßt sich zerlegen in das positive Parabelsegment

$$AGB = \frac{2}{3} \cdot l_2 \cdot \frac{p_2 l_2^2}{8 \varepsilon J} = \frac{p_2 l_2^3}{12 \varepsilon J}$$

und die beiden negativen Dreiecke

$$ADB = \frac{M_2 l_2}{2 \varepsilon J} \quad \text{und} \quad BED = \frac{M_3 l_2}{2 \varepsilon J}.$$

Diese drei Teilflächen erzeugen einen Druck III_2 des Balkens 2, 3 auf die Stütze 3 von der Größe

$$\text{III}_2 = \frac{1}{2} \frac{p_2 l_2^3}{12 \varepsilon J} + \frac{1}{3} \frac{M_2 l_2}{2 \varepsilon J} + \frac{2}{3} \frac{M_3 l_2}{2 \varepsilon J},$$

also

$$\text{III}_2 = \frac{p_2 l_2^3 + 4 M_2 l_2 + 8 M_3 l_2}{24 \varepsilon J}, \quad (28)$$

wobei zu beachten ist, daß die Stützenmomente mit ihren *negativen*

Werten einzusetzen sind. In gleicher Weise ergibt sich der Druck III_3 , der von den Belastungsflächen $\frac{p_3 l_3^3}{12 \varepsilon J}$, $\frac{M_3 l_3}{2 \varepsilon J}$, $\frac{M_4 l_3}{2 \varepsilon J}$ des dritten Balkenfeldes auf die Stütze 3 übertragen wird:

$$\text{III}_3 = \frac{p_3 l_3^3 + 8 M_3 l_3 + 4 M_4 l_3}{24 \varepsilon J}. \quad (29)$$

Werden diese Größen in die Gleichung 27) eingesetzt, so entsteht für die beiden Balkenfelder 2 und 3 die Bedingung:

$$24 \varepsilon J \left(\frac{y_3 - y_2}{l_2} + \frac{y_3 - y_4}{l_3} \right) = p_2 l_2^3 + p_3 l_3^3 + 4 M_2 l_2 + 8 M_3 (l_2 + l_3) + 4 M_4 l_3. \quad (30)$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\frac{24 \varepsilon J (y_3 - y_2)}{l_2^4} = u_2, \quad \frac{24 \varepsilon J (y_4 - y_3)}{l_3^4} = u_3 \quad \text{usf.} \quad (31)$$

und geben der Bedingung hierdurch die Form:

$$0 = (p_2 - u_2) l_2^3 + (p_3 + u_3) l_3^3 + 4 M_2 l_2 + 8 M_3 (l_2 + l_3) + 4 M_4 l_3. \quad (32)$$

Liegen alle Stützen in gleicher Höhe, so werden die Größen $u_2, u_3 \dots$ gleich null, und die Gleichungen zur Bestimmung der Stützenmomente erhalten die Form:

$$0 = p_2 l_2^3 + p_3 l_3^3 + 4 M_2 l_2 + 8 M_3 (l_2 + l_3) + 4 M_4 l_3. \quad (33)$$

5. Der kontinuierliche Balken konstanten Querschnittes mit zwei Feldern von gleicher Länge (Abb. 6, 7, 8). Der in Abb. 6 dargestellte Balken hat die Länge

$$L = 2l_1 = 2l_2.$$

Seine Mittelstütze 2 liegt um y tiefer als die beiden in gleicher Höhe liegenden Endstützen 1 und 3. Die beiden Felder 1 und 2 sind mit

$p_1 l_1$ und $p_2 l_2$ gleichmäßig belastet. Da die beiden Stützenmomente für die Endstützen:

$$M_1 = M_3 = 0$$

Abb. 6.

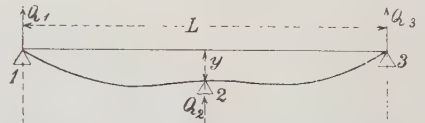


Abb. 7.

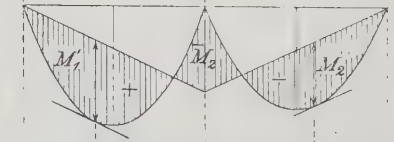
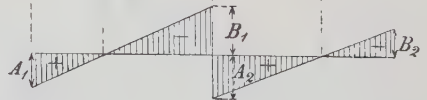


Abb. 8.



sind, so ergibt Gleichung 32) zur Bestimmung des Stützenmoments M_2 die Bedingung

$$0 = (p_1 - u_1) l_1^3 + (p_2 + u_2) l_2^3 + 8 M_2 (l_1 + l_2). \quad (34)$$

Die Größen u_1, u_2 haben nach Gleichung 31) die Werte

$$u_1 = -u_2 = \frac{24 \varepsilon \cdot J y}{l_1^4} = \frac{384 \varepsilon \cdot J y}{L^4} = u. \quad (35)$$

Folglich ist

$$M_2 = -\frac{L^2}{64} (p_1 + p_2 - 2u) \quad (36)$$

Hierdurch wird die graphische Darstellung der Biegemomente (Abb. 7) bestimmt; denn die Pfeilhöhen der beiden Parabelsegmente

$$\frac{p_1 l_1^2}{8} = \frac{p_1 L^2}{32} \quad \text{und} \quad \frac{p_2 l_2^2}{8} = \frac{p_2 L^2}{32}$$

sind gegeben.

Um die graphische Darstellung der Schubkräfte V (Abb. 8) auftragen zu können, müssen nach den Gleichungen 10) und 11) die Kräfte:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{M_2}{l_1} + \frac{p_1 l_1}{2} = \frac{L}{32} (7p_1 - p_2 + 2u) \\ B_1 &= \frac{M_2}{l_1} - \frac{p_1 l_1}{2} = \frac{L}{32} (-9p_1 - p_2 + 2u) \\ A_2 &= -\frac{M_2}{l_2} + \frac{p_2 l_2}{2} = \frac{L}{32} (p_1 + 9p_2 - 2u) \\ B_2 &= -\frac{M_2}{l_2} - \frac{p_2 l_2}{2} = \frac{L}{32} (p_1 - 7p_2 - 2u) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

berechnet werden. Hieraus ergeben sich die Größen der Stützkkräfte nach den Gleichungen 7):

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= A_1 = \frac{L}{32} (7p_1 - p_2 + 2u) \\ Q_2 &= A_2 - B_1 = \frac{L}{32} (10p_1 + 10p_2 - 4u) \\ Q_3 &= -B_2 = \frac{L}{32} (-p_1 + 7p_2 + 2u). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Man bestimmt endlich die größten positiven Biegemomente der beiden Felder nach Gleichung 15):

$$\left. \begin{aligned} M'_1 &= \frac{A_1^2}{2p_1} = \frac{L^2}{2048} \frac{(7p_1 - p_2 + 2u)^2}{p_1} \\ M'_2 &= M_2 + \frac{A_2^2}{2p_2} = \frac{B_2^2}{2p_2} = \frac{L^2}{2048} (-p_1 + 7p_2 + 2u)^2. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Die Belastungen der Längeneinheit p_1, p_2 schwanken in der Regel zwischen zwei *gegebenen* Grenzen p und q , und es sind dann die größten Werte zu ermitteln, die von den Bieugungsmomenten M_2, M'_1 und M'_2 innerhalb jener Grenzen angenommen werden können. Aus der Gleichung 36) geht hervor, daß das Stützenmoment M_2 seinen größten negativen Wert erreicht, wenn p_1 und p_2 möglichst groß werden, wenn also

$$p_1 = p_2 = q$$

ist. Dann wird

$$M_{2\max} = -\frac{L^2}{32}(q - u). \quad (40)$$

Das Bieugungsmoment M'_1 nimmt dagegen, wie aus Gleichung 39) hervorgeht, seinen größten Wert an, wenn

$$p_1 = q \quad \text{und} \quad p_2 = p$$

ist:

$$M'_{1\max} = \frac{L^2(7q - p + 2u)^2}{2048q} \quad (41)$$

Ebenso groß ist der Maximalwert von M'_2 .

Die Senkung y der Mittelstütze ist zweckmäßig so zu wählen, daß der numerisch größte Wert der beiden Bieugungsmomente $M_{2\max}$ und $M'_{1\max}$ möglichst klein wird. Da mit wachsendem u der negative Wert von $M_{2\max}$ abnimmt, der positive Wert von $M'_{1\max}$ dagegen zunimmt, so ergibt sich der *vorteilhafteste* Wert von u aus der Bedingung

$$-M_{2\max} = +M'_{1\max} \quad (42)$$

oder

$$\frac{q - u}{32} = \frac{(7q - p + 2u)^2}{2048q}.$$

Da hier nur eine *Senkung* der Mittelstütze, also ein *positiver* Wert von

$$u = \frac{24 \varepsilon J y}{l_1^4} = \frac{384 \varepsilon J y}{L^4}$$

in Betracht kommt, so gilt die positive Wurzel

$$u = \frac{-23q + p}{2} + 2\sqrt{34q^2 - 2pq}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{p}{q} = r,$$

so ergibt sich als vorteilhafteste Senkung der Mittelstütze

$$y = \frac{q L^4 (r - 23 + 4\sqrt{34 - 2r})}{768 \varepsilon J}. \quad (43)$$

Die folgende Tabelle enthält zur besseren Uebersicht für verschiedene Werte von r die zugehörigen Werte von y und $M_{\max}$ nach den Gleichungen 43) und 40).

Tabelle 1.

$r = \frac{p}{q} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$y : \frac{q L^4}{1\,000\,000 \, \varepsilon J} =$	421	503	583	662	740	817
$M_{\max} : \frac{q L^2}{32} =$	0,838	0,807	0,776	0,746	0,716	0,686

Demnach bestehen mit großer Annäherung die folgenden einfacheren Beziehungen:

$$M_{\max} = \frac{L^2}{32} (0,84 q - 0,15 p) \quad (44)$$

und

$$y = \frac{L^4 (0,42 q + 0,40 p)}{1000 \, \varepsilon J} \quad (45)$$

Die dritte Reihe der vorstehenden Tabelle läßt den Vorteil erkennen, der durch eine Senkung der Mittelstütze erreicht werden kann. Liegen alle drei Stützen in *gleicher* Höhe, ist also u gleich null, so nehmen nach den Gleichungen 40) und 41) das größte negative und das größte positive Biegemoment die folgenden Werte an:

$$M_{2 \max} = - \frac{q L^2}{32} \quad (46)$$

und

$$M_{1 \max} = \frac{L^2 (7q - p)^2}{2048 q} \quad (47)$$

Von diesen beiden Werten ist numerisch der erste stets der größere, und für die Wahl des Balkenquerschnittes ist daher $\frac{q L^2}{32}$ das maßgebende Biegemoment. Durch eine Senkung der Mittelstütze kann man, wie die Tabelle zeigt, das maßgebende Biegemoment um 16 bis 31 vH. vermindern, und zwar wächst der Vorteil mit der Größe des Verhältnisses von p zu q . Der Ausnutzung dieses Vorteils steht freilich der Umstand entgegen, daß die Senkung *sehr klein* und daher schwierig herzustellen und zu erhalten ist, so daß durch kleine zufällige Veränderungen der Stützenlage der Vorteil

beseitigt und in einen Nachteil verwandelt werden kann. Man bringt dies in folgender Weise zur Anschauung. Beseitigt man die Mittelstütze ganz, so wird

$$Q_2 = 0 = \frac{L}{32} (10 p_1 + 10 p_2 - 4 u)$$

oder

$$u = \frac{10 p_1 + 10 p_2}{4} = \frac{384 \varepsilon J y_2}{L^4},$$

also die Senkung des Balkens in der Mitte:

$$y_2 = \frac{5}{768} \frac{(p_1 + p_2) L^4}{\varepsilon J}.$$

In den beiden Grenzfällen, wenn nämlich $(p_1 + p_2)$ gleich $2p$ und gleich $2q$ wird, erhält diese Senkung die Werte:

$$y' = \frac{10}{768} \frac{p L^4}{\varepsilon J} = 0,013 \frac{p L^4}{\varepsilon J}$$

und

$$y'' = 0,013 \frac{q L^4}{\varepsilon J}.$$

Die durch Gleichung 45) bestimmte vorteilhafteste Senkung der Mittelstütze beträgt demnach:

$$y = \frac{40 y' + 42 y''}{1300} = \frac{y'}{33} + \frac{y''}{31}.$$

Diese Senkung ist offenbar so klein, daß auf eine dauernde Erhaltung derselben und der mit ihr verbundenen Vorteile in der Regel nicht gerechnet werden kann.

Wenn in Ausnahmefällen dieses Bedenken nicht besteht, so kann man die vorteilhafteste Senkung y vermittle der vorstehenden Gleichung bestimmen, indem man eine Beobachtung zu Hilfe nimmt. Man beobachtet die Senkung y' , die bei der Belastung durch das Eigengewicht oder durch eine gleichmäßig verteilte Belastung pL des Balkens eintritt, und da

$$y'' = \frac{q y'}{p} = \frac{y'}{r}$$

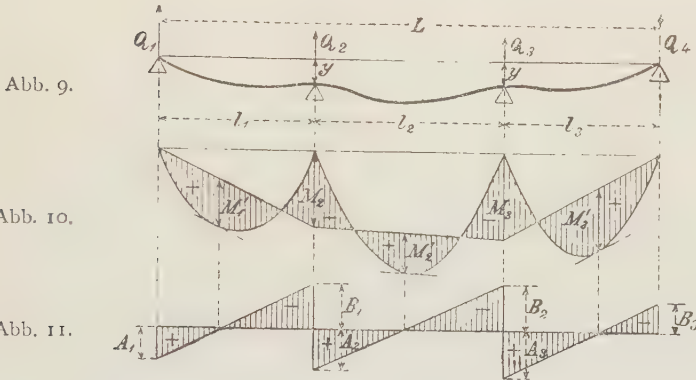
ist, so erhält man

$$y = y' \left(\frac{1}{33} + \frac{1}{31r} \right).$$

Man macht sich hierdurch frei von den Ungenauigkeiten, die mit der Bestimmung der Größen ε und J stets verbunden sind.

6. Der kontinuierliche Balken konstanten Querschnittes auf vier zur Balkenmitte symmetrisch liegenden Stützen (Abb. 9, 10 und 11). Die Symmetrie fordert:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{l_2}{l_3} = m, \quad u_2 = 0, \quad u_1 = -u_3 = u.$$



Die beiden unbekannten Stützenmomente M_2 und M_3 werden bestimmt durch die Hauptgleichung 32) für die Felder 1, 2 und 2, 3:

$$\begin{aligned} 8M_2(l_1 + l_2) + 4M_3l_2 + l_1^3(p_1 - u) + l_2^3p_2 &= 0 \\ 4M_2l_2 + 8M_3(l_2 + l_3) + l_2^3p_2 + l_3^3(p_3 - u) &= 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man wieder mit L die ganze Länge des Balkens, so ist

$$l_1 = \frac{L}{2+m}, \quad l_2 = \frac{Lm}{2+m},$$

und aus den vorstehenden Gleichungen folgt:

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= -\frac{L^2}{4} \frac{p_1(2+2m) + p_2m^3(2+m) - p_3m - u(2+m)}{(2+m)^3(2+3m)} \\ M_3 &= -\frac{L^2}{4} \frac{-p_1m + p_2m^3(2+m) + p_3(2+2m) - u(2+m)}{(2+m)^3(2+3m)} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Durch die Gleichungen 10) und 11) ergeben sich hieraus die Schubkräfte der Balkenquerschnitte neben den Stützen:

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 &= \frac{L}{4} \frac{p_1 (6 + 14m + 6m^2) - p_2 m^3 (2 + m) + p_3 m + u (2 + m)}{(2 + m)^2 (2 + 3m)} \\
 B_1 &= -\frac{L}{4} \frac{p_1 (10 + 18m + 6m^2) + p_2 m^3 (2 + m) - p_3 m - u (2 + m)}{(2 + m)^2 (2 + 3m)} \\
 A_2 &= \frac{L}{4} \frac{p_1 + 2p_2 m^2 (2 + m) - p_3}{m (2 + m)^2} \\
 B_2 &= -\frac{L}{4} \frac{-p_1 + 2p_2 m^2 (2 + m) + p_3}{m (2 + m)^2} \\
 A_3 &= \frac{L}{4} \frac{-p_1 m + p_2 m^3 (2 + m) + p_3 (10 + 18m + 6m^2) - u (2 + m)}{(2 + m)^2 (2 + 3m)} \\
 B_3 &= -\frac{L}{4} \frac{p_1 m - p_2 m^3 (2 + m) + p_3 (6 + 14m + 6m^2) + u (2 + m)}{(2 + m)^2 (2 + 3m)}
 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Mit Hilfe dieser Werte berechnet man nach den Gleichungen 7) die Stützkräfte:

$$\left. \begin{aligned}
 Q_1 &= A_1 \\
 Q_2 &= A_2 - B_1 \\
 Q_3 &= A_3 - B_2 \\
 Q_4 &= -B_3.
 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Endlich bestimmt man die größten positiven Bieugungsmomente innerhalb der drei Balkenfelder nach Gleichung 15):

$$\left. \begin{aligned}
 M_1 &= \frac{A_1^2}{2p_1} \\
 M'_2 &= M_2 + \frac{A_2^2}{2p_2} \\
 M'_3 &= \frac{B_3^2}{2p_3} = M_3 + \frac{A_3^2}{2p_3}
 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Die Senkung y der beiden Mittelstützen und das Verhältnis m der Stützweite l_2 zu l_1 sind zweckmäßig so zu wählen, daß die größten positiven und negativen Bieugungsmomente $M'_1 \max$, $M'_2 \max$, $M'_3 \max$, $M_2 \max$, $M_3 \max$ numerisch einander gleich werden; denn jede Aenderung dieser Stützenlage führt eine Vergrößerung von wenigstens einem dieser Momente herbei. Da der Symmetrie wegen $M'_1 \max$ und $M'_3 \max$ sowie $M_2 \max$ und $M_3 \max$ gleiche Werte haben, so lauten die beiden Bedingungen:

$$M'_1 \max = M'_2 \max \quad (52)$$

und

$$M'_2 \max = -M_2 \max. \quad (53)$$

Das Stützenmoment M_2 erreicht seinen größten Wert, wenn die

beiden ersten Balkenfelder eine möglichst große Last tragen, während das dritte Balkenfeld möglichst wenig belastet ist, wenn also

$$p_1 = p_2 = q \quad \text{und} \quad p_3 = p$$

ist:

$$M_{2\max} = -\frac{L^2}{4} \frac{q(2+2m+2m^3+m^4) - pm - u(2+m)}{(2+m)^3(2+3m)}. \quad (54)$$

Das positive Biegemoment M_1 wird möglichst groß, wenn

$$p_1 = p_3 = q \quad \text{und} \quad p_2 = p$$

ist:

$$M_{1\max} = \frac{L^2}{32q} \left(\frac{q(3+6m) - pm^3 + u}{(2+m)(2+3m)} \right)^2. \quad (55)$$

Endlich erreicht M_2 seinen größten Wert in dem Belastungsfall

$$p_1 = p_3 = p, \quad p_2 = q:$$

$$M_{2\max} = \frac{L^2 q}{8} \frac{(2+m)m^2 - 2p + 2u}{(2+m)^2(2+3m)}. \quad (56)$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\frac{p}{q} = r \quad \text{und} \quad \frac{u}{q} = z$$

und erhalten durch Einsetzen der Werte 54), 55), 56) in die Bedingungen 53) und 52):

$$z = \frac{4 + 4m - 4m^2 + m^4 + 4r}{4(2+m)} \quad (57)$$

$$(3 + 6m - rm^3 + z)^2 = 4(2 + 3m)(2m^2 + m^3 - 2r + 2z) \quad (58)$$

und durch Verbindung dieser beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 = & (272 + 2048m + 3296m^2 + 128m^3 - 2360m^4 - 1408m^5 - 248m^6 + m^8) \\ & + r(736 + 2048m + 1568m^2 - 64m^3 - 1240m^4 - 832m^5 - 160m^6 \\ & - 16m^7 - 8m^8) + r^2(16 - 64m^3 - 32m^4 + 64m^6 + 64m^7 + 16m^8). \end{aligned} \quad (59)$$

Berechnet man nach den vorstehenden Gleichungen für verschiedene Werte von r die entsprechenden Werte von m , z und $M_{\max}$, so findet man, wie aus der folgenden Tabelle zu ersehen ist, daß diese drei Größen nahezu gleichmäßig mit r sich verändern:

Tabelle 2.

$r = \frac{p}{q} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$m = \frac{l_2}{l_1} =$	1,13	1,14	1,15	1,16	1,165	1,17
$z = \frac{u}{q} =$	0,40	0,47	0,53	0,59	0,65	0,72
$M_{\max} : \frac{qL^2}{72} =$	0,82	0,78	0,74	0,69	0,65	0,61

Man kann also mit großer Annäherung die obigen verwickelten Beziehungen durch die folgenden einfacheren ersetzen:

$$m = 1,13 + \frac{p}{25q} \quad (60)$$

$$u = 0,40q + 0,32p = \frac{24 \varepsilon J y}{l_1^4} \quad (61)$$

$$M_{\max} = \frac{L^2}{72} (0,82q - 0,21p). \quad (62)$$

Für einen einfachen Balken von der Feldlänge $\frac{L}{3}$ ist das größte Biegemoment gleich $\frac{qL^2}{72}$. Die letzte Reihe der Tabelle zeigt im Vergleich hiermit, daß bei einem kontinuierlichen Balken mit drei Feldern von der Gesamtlänge L das maßgebende Biegemoment um 18 bis 39 vH. herabgemindert werden könnte, wenn es möglich wäre, die vorteilhafteste Stützenlage dauernd zu erhalten.

7. Der kontinuierliche Balken konstanten Querschnittes auf vier Stützen, die zur Balkenmitte symmetrisch und in gleicher Höhe liegen. Die für den vorhergehenden allgemeinen Fall entwickelten Formeln für die Größen der Biegemomente und der Schubkräfte gelten auch in dem vorliegenden Falle, wenn u gleich null gesetzt wird. Nach den Gleichungen 54), 55) und 56) ist also:

$$M_{2\max} = -\frac{qL^2}{4} \frac{2 + 2m + 2m^3 + m^4 - rm}{(2+m)^3 (2+3m)} \quad (63)$$

$$M'_{1\max} = \frac{qL^2}{32} \left(\frac{3+6m-rm^3}{(2+m)(2+3m)} \right)^2 \quad (64)$$

$$M'_{2\max} = \frac{qL^2}{8} \frac{(2+m)m^3-2r}{(2+m)^2(2+3m)} \quad (65)$$

Wählt man die Verhältniszahl m so, daß die größten Stützenmomente M_2 und M_3 möglichst klein werden, so findet man, wie die folgende Tabelle zeigt, daß die zugehörigen Werte von M'_1 und M'_2 *kleiner* als die Stützenmomente sind. Für die Wahl des Balkenquerschnittes ist daher stets das Stützenmoment M_2 maßgebend. Die Bedingung des Minimums

$$\frac{dM_{2\max}}{dm} = 0$$

führt zu der Gleichung

$0 = 14m^4 + 40m^3 + 6m^2 - 32m - 16 + r(9m^2 + 4m - 4)$, (66)
welche für alle in Betracht kommenden Werte von r nur *eine* reelle positive Wurzel hat. Die nachstehende Tabelle enthält diese Wurzeln und die zugehörigen Werte der größten Biegemomente.

Tabelle 3.

$r = \frac{p}{q} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$m = \frac{l_2}{l_1} =$	0,91	0,90	0,89	0,88	0,87	0,86
$M_{2\max} : -\frac{qL^2}{72} =$	0,93	0,90	0,87	0,84	0,81	0,78
$M'_{1\max} : \frac{qL^2}{72} =$	0,85	0,82	0,80	0,78	0,76	0,74
$M'_{2\max} : \frac{qL^2}{72} =$	0,54	0,44	0,34	0,24	0,14	0,03

Man pflegte früher schätzungsweise anzunehmen, daß es auch bei wagerechter Stützenlage zweckmäßig sei, das Mittelfeld l_2 *größer* zu wählen als die beiden Seitenfelder l_1 und l_3 . Die zweite Reihe der Tabelle zeigt, daß diese Annahme nicht richtig war.

Nimmt man, wie schon oben geschehen ist, beim Vergleich das Biegemoment $\frac{qL^2}{72}$ als Einheit an, so ersieht man aus der

dritten Reihe der Tabelle, daß in den beiden Grenzfällen p gleich null und gleich q eine Herabminderung des maßgebenden Biegemoments um 7 und um 22 vH. erreicht werden kann. Der Vorteil in gleichem Sinne, den man durch eine Senkung der Mittelstützen erreichen kann, wurde im vorigen Abschnitt zu 18 bis 39 vH. ermittelt. Die Senkung der Mittelstützen ermöglicht demnach einen Vorteil von 11 bis 17 vH.

Um eine Uebersicht darüber zu geben, in welchem Maße das Verhältnis der Feldlängen

$$m = \frac{l_2}{l_1}$$

auf das größte Biegemoment einwirkt, sind die nach Gleichung 63) berechneten Werte von $M_{\max}$ bezogen auf $\frac{qL^2}{72}$ als Einheit für verschiedene Werte von m in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 4.

Werte von $M_{\max} : \frac{1}{72} qL^2$ bei horizontaler Stützenlage.

$r = \frac{p}{q} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
m nach Tabelle 3	0,93	0,90	0,87	0,84	0,81	0,78
$m = 1$	0,93	0,91	0,88	0,85	0,83	0,80
$m = 7 : 6$	0,97	0,94	0,92	0,89	0,87	0,85
$m = 6 : 5$	0,97	0,95	0,93	0,90	0,88	0,86
$m = 5 : 4$	0,99	0,97	0,95	0,93	0,90	0,88

Man kann hieraus den Nutzen ersehen, den die vorteilhaftesten Größen von m im Vergleich mit den Werten gewähren, welche in der Praxis bei Balken konstanten Querschnitts am meisten angewandt worden sind.

8. Senkung der Mittelstützen bei bereits ausgeführten Balken mit drei Feldern. Es kann in Frage kommen, welchen Nutzen die Senkung der Mittelstützen zu gewähren imstande ist, wenn für das Verhältnis m nicht der vorteilhafteste, durch Gleichung 60) angegebene Wert gewählt wurde.

Bei einer Senkung der beiden Mittelstützen wachsen die Biegemomente $M'_{1\max}$ und $M'_{2\max}$, während der numerische Wert von $M_{2\max}$ abnimmt. Um das größte Biegemoment möglichst klein zu machen, ist also die Senkung bis zu dem *kleineren* der beiden Werte von y fortzusetzen, welche den beiden Bedingungen

$$M'_{1\max} = -M_{2\max} \quad \text{und} \quad M'_{2\max} = -M_{2\max}$$

entsprechen. Welche von diesen beiden Bedingungen zur Anwendung kommt, erkennt man, wenn man den vorliegenden Fall mit der Anordnung vergleicht, die *beide* Bedingungen erfüllt. Liegt z. B. der Fall

$$\frac{p}{q} = 0,4 \quad \text{und} \quad \frac{l_2}{l_1} = 1,25$$

vor, so ersieht man aus der Tabelle 2, daß die Bedingung

$$M_{2\max} = M'_{2\max}$$

anzuwenden ist, da im Vergleich mit der vorteilhaftesten Anordnung, welche

$$\frac{l_2}{l_1} = 1,15$$

fordert, in dem vorliegenden Falle l_2 zu groß und l_1 zu klein ist, und daß infolgedessen

$$M'_{2\max} > M'_{1\max}$$

ist. Aus der Bedingung

$$-M_{2\max} = M'_{1\max}$$

folgt nach den Gleichungen 54) und 55):

$$\left. \begin{aligned} 8(2+3m)(2+2m+2m^3+m^4-rm-z(2+m)) = \\ (2+m)(3+6m-rm^3+z)^2, \end{aligned} \right\} (67)$$

während die Bedingung:

$$-M_{2\max} = M'_{2\max}$$

nach den Gleichungen 54) und 56) fordert:

$$z = \frac{4+4m-4m^2+m^4+4r}{4(2+m)}. \quad (68)$$

Nach diesen beiden Gleichungen wurden für die in der Praxis gebräuchlichen Werte von m die Größen von

$$z = \frac{24 \varepsilon J y}{q l_1^4}$$

berechnet und in der nachstehenden Tabelle 5 zusammengestellt. Für m gleich 1 gilt nach der obigen Bemerkung die Bedingung 67), während in den anderen Fällen Gleichung 68) zur Anwendung kommt.

Tabelle 5.

Werte von $\frac{24 \varepsilon J y}{q l_i^4}$

$r = \frac{p}{q} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$m = 1$	0,21	0,23	0,24	0,26	0,27	0,28
$m = 7 : 6$	0,40	0,46	0,53	0,59	0,65	0,72
$m = 6 : 5$	0,40	0,46	0,52	0,59	0,65	0,71
$m = 5 : 4$	0,40	0,46	0,52	0,58	0,65	0,71

Wenn die Senkung der Mittelstützen nach den Angaben dieser Tabelle ausgeführt wird, so nimmt das nach den Gleichungen 54) und 63) berechnete Verhältnis: ($M_{\max}$ bei gesenkten Mittelstützen) zu ($M_{\max}$ bei gleicher Höhe der Stützen) die in Tabelle 6 zusammengestellten Werte an.

Tabelle 6.

Werte von $\frac{M_{\max} \text{ bei gesenkten Mittelstützen}}{M_{\max} \text{ bei gleich hohen Stützen}}$

$r = \frac{p}{q} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$m = 1$	0,91	0,90	0,89	0,88	0,87	0,86
$m = 7 : 6$	0,87	0,84	0,81	0,79	0,76	0,72
$m = 6 : 5$	0,87	0,85	0,83	0,80	0,77	0,74
$m = 5 : 4$	0,88	0,86	0,84	0,81	0,79	0,76

Durch die Senkung der Mittelstützen kann also das größte Biegemoment verkleinert werden:

- um 9—14 vH., wenn $l_2 = l_1$ ist;
 „ 13—28 „ „ $l_2 : l_1 = 7 : 6$ ist;
 „ 13—26 „ „ $l_2 : l_1 = 6 : 5$ „
 „ 12—24 „ „ $l_2 : l_1 = 5 : 4$ „

Endlich sind in Tabelle 7 die größten Biegemomente bei vorteilhaftester Höhenlage der Stützen und bezogen auf $q \frac{L^2}{72}$ als Einheit zusammengestellt worden.

Tabelle 7.

Werte von $M_{\max} : \frac{1}{72} q L^2$ bei vorteilhaftester Höhenlage der Stützen.

$r = \frac{p}{q} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$m = 1$	0,85	0,81	0,78	0,75	0,72	0,69
m nach Tabelle 2	0,82	0,78	0,74	0,69	0,65	0,61
$m = 7 : 6$	0,84	0,79	0,75	0,70	0,66	0,61
$m = 6 : 5$	0,85	0,81	0,77	0,72	0,68	0,63
$m = 5 : 4$	0,87	0,83	0,79	0,75	0,71	0,67

Aus dieser Tabelle ist zu ersehen, daß das Verhältnis der Feldweiten auf die Größe des Maximalmomentes einen empfindlichen Einfluß nicht ausübt; denn die Werte in einer Spalte weichen nur um wenige Prozente voneinander ab.

9. Schädliche Folgen einer zufälligen Aenderung der Stützenhöhen. Bei der Berechnung eines kontinuierlichen Balkens wird in der Regel vorausgesetzt, daß die Stützen genau in gleicher Höhe liegen, und daß die Punkte des Balkens, welche von den Stützen berührt werden, im spannungslosen Zustande des Balkens ebenfalls genau in einer Geraden liegen. Abweichungen von der ersten Voraussetzung haben ihren Grund in mancherlei Zufälligkeiten, denen das Bauwerk ununterbrochen ausgesetzt ist, wie Nachgeben des Fundaments, Sackungen des Mauerwerks, Temperaturänderungen usw. Solche Fehler können beobachtet und nötigenfalls beseitigt werden. Dagegen haben Abweichungen von der zweiten Annahme ihren Grund allein in einer mangelhaften Ausführung und können, wenn sie nicht *vor* der Aufstellung des Balkens bemerkt und unschädlich gemacht worden sind, nicht mehr entdeckt und also auch nicht verbessert werden. In ihrem Einfluß auf die Aenderung der Biegemomente und Schubkräfte sind beide Ab-

weichungen einander gleich; denn es leuchtet ein, daß z. B. ein Balken auf drei Stützen, dessen Mittelstütze sich um 1 cm gesenkt hat genau in derselben Lage sich befindet wie unter sonst gleichen Umständen ein anderer, der auf gleich hohen Stützen ruht, dessen Unterkante aber im spannungslosen Zustande des Balkens in der Mitte um 1 cm überhöht ist (Abb. 12). Man bringt also den Einfluß beider Abweichungen gleichzeitig in Rechnung, wenn man die Höhenänderungen auf die Linie bezieht, die von der Unterkante des Balkens in seinem spannungslosen Zustande gebildet wird.

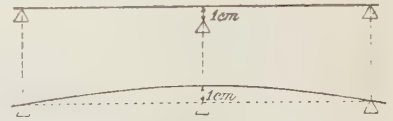


Abb 12.

Um ein Maß für den Nachteil solcher Abweichungen zu erhalten, wird man zunächst annehmen müssen, daß die Aenderungen innerhalb gewisser Grenzen bleiben. Das gesuchte Maß ergibt sich dann, wenn man das größte Biegemoment, welches bei der ungünstigsten Stützenlage innerhalb jener Grenzen sich bilden kann, vergleicht mit dem Maximalmoment bei wagerechter Stützenlage. Diese Rechnung soll beispielsweise für einen kontinuierlichen Balken mit drei gleich langen Feldern ausgeführt werden.

In diesem Falle ist, wenn l die Stützweite der Felder bezeichnet, nach Gleichung 32):

$$\begin{aligned} 16 M_2 + 4 M_3 + l^2 (p_1 - u_1 + p_2 + u_2) &= 0 \\ 4 M_2 + 16 M_3 + l^2 (p_2 - u_2 + p_3 + u_3) &= 0, \end{aligned}$$

folglich

$$M_2 = -\frac{l^2}{60} (4 p_1 + 3 p_2 - p_3 - 4 u_1 + 5 u_2 - u_3) \quad (69)$$

$$M_3 = -\frac{l^2}{60} (-p_1 + 3 p_2 + 4 p_3 + u_1 - 5 u_2 + 4 u_3). \quad (70)$$

Ferner ist nach Gleichung 10):

$$A_1 = \frac{l}{60} (26 p_1 - 3 p_2 + p_3 + 4 u_1 - 5 u_2 + u_3)$$

$$A_2 = \frac{l}{60} (5 p_1 + 30 p_2 - 5 p_3 - 5 u_1 + 10 u_2 - 5 u_3)$$

und nach Gleichung 15):

$$M'_1 = \frac{l^2}{7200 p_1} (26 p_1 - 3 p_2 + p_3 + 4 u_1 - 5 u_2 + u_3)^2 \quad (71)$$

$$M'_2 = \frac{l^2}{7200 p_2} (5p_1 + 30p_2 - 5p_3 - 5u_1 + 10u_2 - 5u_3)^2 \left\{ \begin{array}{l} \\ - \frac{l^2}{60} (4p_1 + 3p_2 - p_3 - 4u_1 + 5u_2 - u_3) \end{array} \right\} \quad (72)$$

Wir bezeichnen mit $+u$ und $-u$ die Grenzen, zwischen welchen die Größen u_1, u_2, u_3 sich verändern können. Innerhalb dieser Grenzen erreicht das Stützenmoment M'_2 seinen größten negativen Wert, wenn

ist: $p_1 = p_2 = q, \quad p_3 = p, \quad u_1 = u_3 = -u, \quad u_2 = +u$

$$M'_{2 \max} = - \frac{l^2}{60} (7q - p + 10u). \quad (73)$$

Das Biegemoment M'_1 erhält, wie aus Gleichung 71) zu ersehen ist, seinen größten Wert, wenn

ist: $p_1 = p_3 = q, \quad p_2 = p, \quad u_1 = u_3 = +u, \quad u_2 = -u$

$$M'_{1 \max} = \frac{l^2}{7200 q} (27q - 3p + 10u)^2. \quad (74)$$

Aus der Gleichung 72) ergeben sich die Bedingungen des Maximums für M'_2 nicht so unmittelbar; berücksichtigt man jedoch, daß das größte Moment in der Mitte des Mittelfeldes nur bei einer symmetrischen Stützenlage und bei einer symmetrischen Belastung entstehen kann, daß also

$$p_1 = p_3, \quad u_1 = -u_3, \quad u_2 = 0$$

sein muß, so erkennt man, daß das Maximum eintritt, wenn

ist: $p_1 = p_3 = p, \quad p_2 = q, \quad u_1 = +u, \quad u_3 = -u$

$$M'_{2 \max} = \frac{l^2}{40} (3q - 2p + 2u). \quad (75)$$

Die vorstehenden Gleichungen zeigen, daß $M'_{2 \max}$ unter allen Umständen größer ist als $M'_{1 \max}$, und daß $M'_{2 \max}$ auch größer als $M'_{1 \max}$ bleibt, solange

$$u < 6,76 q$$

ist. Diese Grenze kann in Wirklichkeit nicht erreicht werden, weil der Balken vorher brechen würde; denn er müßte nach Gleichung 73) ein Biegemoment aufnehmen von der Größe

$$M = - \frac{l^2}{60} (7q - p + 68q).$$

Innerhalb der hier in Betracht kommenden Grenzen hat demnach das Stützenmoment $M_{2\max}$ den größten Wert:

$$M_2 = -\frac{l^2}{60} (7q - p + 10u).$$

Bei gleicher Höhe der Stützen hat dieses Stützenmoment nach Gleichung 63) den Wert $-\frac{l^2}{60}(7q - p)$.

Als das oben bezeichnete Maß für den Nachteil von Höhenänderungen, welche den Grenzen $+u$ und $-u$ entsprechen, ergibt sich also das Verhältnis

$$\frac{7q - p + 10u}{7q - p} = 1 + \frac{10u}{7q - p}. \quad (76)$$

In diesem Verhältnis kann das bei der Querschnittsberechnung zugrunde gelegte Biegemoment überschritten werden.

Wir wählen als Beispiel einen schmiedeisernen Balken, dessen Höhe h gleich $\frac{1}{10}l$ und dessen Querschnitt so gewählt wurde, daß das größte Biegemoment bei gleich hohen Stützen die zulässige Spannung von 800 kg/qcm hervorruft:

$$800 = \frac{l^2}{60} (7q - p) \frac{h}{2J},$$

woraus folgt:

$$7q - p = \frac{960J}{h^3}.$$

Bezeichnet y den größten Höhenunterschied zwischen zwei Stützen, so ist nach Gleichung 31):

$$u = \frac{24 \varepsilon J y}{l^4} = \frac{24 \cdot 2\,000\,000 J y}{10\,000 h^4} = \frac{4800 J y}{h^4}.$$

Demnach ist in diesem Beispiele:

$$1 + \frac{10u}{7q - p} = 1 + \frac{50y}{h}.$$

Der Balken würde also der Gefahr ausgesetzt sein, anstatt der zulässigen 800 kg/qcm eine doppelt so große Spannung aufnehmen zu müssen, wenn die Höhenunterschiede der Stützen nur $\frac{1}{50}$ der Balkenhöhe erreichen könnten.

Die vorstehende Untersuchung zeigt, daß der Vorteil der kontinuierlichen Balken von Bedingungen abhängt, die praktisch unerfüllbar sind.

10. Die Berechnung des kontinuierlichen Balkens von veränderlichem Querschnitt. Große Balken aus Schmiedeisen erhalten in der Regel nicht die prismatische Form, weil es aus wirtschaftlichen Gründen vorteilhaft ist, das Material so zu verteilen, daß die zulässige Grenze der Spannungen in allen Querschnitten des Balkens nahezu erreicht wird. In manchen Teilen des Balkens, nämlich dort, wo die Biegemomente und Schubkräfte ihren kleinsten Werten sich nähern, ist jene Anordnung freilich nur unvollkommen zu erreichen, weil man aus anderen praktischen Rücksichten genötigt ist, dem Balken an diesen Stellen erheblich größere Querschnitte zu geben, als die Festigkeitsbedingungen verlangen. Für die bezeichneten Balkenteile ist eine genaue Bestimmung der größten Momente und Kräfte daher unnötig. Es genügt vielmehr, nur die *volle* Belastung der einzelnen Balkenfelder zu berücksichtigen, weil bei diesen Belastungen die größten Momente und Schubkräfte eintreten, welche bei der Wahl der Querschnittsmaße in Betracht kommen. Beim Entwerfen eines solchen Balkens wählt man die Querschnitte zunächst nach Maßgabe der Kräfte, die unter sonst gleichen Umständen von einem prismatischen Balken aufzunehmen sein würden. Für den auf diesem Wege bestimmten Balken veränderlichen Querschnittes werden alsdann die genaueren Werte der größten Biegemomente und Schubkräfte nach dem im folgenden beschriebenen Verfahren berechnet. Wenn die Querschnittsänderungen, die sich hierbei als nötig ergeben, beträchtlich sind, so muß die Rechnung von neuem ausgeführt werden. In der Regel aber sind die Aenderungen nicht erheblich, so daß die einmalige Rechnung ausreicht.

Der Gang der Rechnung ist bereits in den Abschnitten 3 und 4 beschrieben worden. Man bildet zunächst, um die Stützenmomente zu bestimmen, für je zwei aufeinanderfolgende Balkenfelder, z. B. für die beiden Felder 2 und 3 die Gleichung 27):

$$\frac{y_3 - y_2}{l_2} + \frac{y_3 - y_4}{l_3} = III_2 + III_3,$$

also nach den Gleichungen 25), 26) und 8) die Größen:

$$III_2 = \frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} xk \, dx = \frac{M_2}{\varepsilon l_2^2} \int_0^{l_2} \frac{l_2 x - x^2}{J} \, dx + \frac{M_3}{\varepsilon l_2^2} \int_0^{l_2} \frac{x^2}{J} \, dx + \frac{p_2}{2\varepsilon l_2} \int_0^{l_2} \frac{l_2 x^2 - x^3}{J} \, dx \quad (77)$$

und

$$\text{III}_3 = \int_0^{l_3} k \, dx - \frac{1}{l_3} \int_0^{l_3} x k \, dx = \frac{1}{l_3} \int_0^{l_3} k (l_3 - x) \, dx,$$

folglich

$$\left. \begin{aligned} \text{III}_3 = & \frac{M_3}{\varepsilon l_3^2} \int_0^{l_3} \frac{(l_3 - x)^2}{J} \, dx + \frac{M_4}{\varepsilon l_3^2} \int_0^{l_3} \frac{l_3 x - x^2}{J} \, dx \\ & + \frac{p_3}{2 \varepsilon l_3} \int_0^{l_3} \frac{x (l_3 - x)^2}{J} \, dx. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Demnach sind für jedes Balkenfeld die folgenden vier Integrale zu berechnen:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l \frac{dx}{J}, & S' &= \frac{1}{\varepsilon l} \int_0^l \frac{x \, dx}{J}, \\ S'' &= \frac{1}{\varepsilon l^2} \int_0^l \frac{x^2 \, dx}{J}, & S''' &= \frac{1}{\varepsilon l^3} \int_0^l \frac{x^3 \, dx}{J}. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Durch Anfügung der Kennziffer 2 oder 3 an den Buchstaben S wird angegeben, ob sich das Integral auf das Feld 2 oder auf das Feld 3 bezieht. Mit Hilfe dieser Größen ergeben sich aus den Gleichungen 77) und 78) die Werte:

$$\text{III}_2 = M_2 (S'_2 - S_2') + M_3 S_2'' + \frac{p_2 l_2^2}{2} (S_2'' - S_2''') \quad (80)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \text{III}_3 = & M_3 (S_3 - 2S_3' + S_3'') + M_4 (S_3' - S_3'') \\ & + \frac{p_3 l_3^2}{2} (S_3' - 2S_3'' + S_3'''). \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Gleichung 27) enthält also für die beiden Balkenfelder 2 und 3 die Bedingung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_3 - y_2}{l_2} + \frac{y_3 - y_4}{l_3} = & M_2 (S'_2 - S_2') + M_3 (S_2'' + S_3 - 2S_3' + S_3'') \\ & + M_4 (S_3' - S_3'') + \frac{p_2 l_2^2}{2} (S_2'' - S_2''') + \frac{p_3 l_3^2}{2} (S_3' - 2S_3'' + S_3'''). \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Indem man für je zwei aufeinanderfolgende Balkenfelder eine Bedingung von dieser Form bildet, entstehen die Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Stützenmomente $M_2, M_3, M_4 \dots$. Im übrigen können wir auf die Abschnitte 3 und 4 verweisen.

In dem besonderen Falle, wenn das Trägheitsmoment des Balkenquerschnittes konstant ist, wird nach den Gleichungen 79):

$$S_2 = 2S'_2 = 3S''_2 = 4S'''_2 = \frac{l_2}{\varepsilon J}$$

$$S_3 = 2S'_3 = 3S''_3 = 4S'''_3 = \frac{l_3}{\varepsilon J}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung 82), so entsteht die Gleichung 30):

$$\begin{aligned} 24\varepsilon J \left(\frac{y_3 - y_2}{l_2} + \frac{y_3 - y_4}{l_3} \right) \\ = 4M_2l_2 + 8M_3(l_2 + l_3) + 4M_4l_3 + p_2l_2^3 + p_3l_3^3. \end{aligned}$$

11. Die Annäherungswerte der Größen S, S', S'', S''' für ein Balkenfeld. Um die Gleichungen 82) bilden zu können, müssen für jedes Balkenfeld oder, wenn der Balken in bezug auf seine Mitte symmetrisch geformt ist, für die Felder einer Balkenhälfte die vier Größen S, S', S'', S''' annähernd berechnet werden, wozu man die Simpsonsche Regel benutzen kann. Man teilt zu diesem Zweck die Länge l des Balkenfeldes (Abb. 13) durch die Teilpunkte 0, 1, 2, 3 ... 8, 9, 10 in eine *gerade* Anzahl, z. B. in 10 gleiche Teile, bestimmt die Trägheitsmomente $J_0, J_1, J_2, J_3 \dots J_8, J_9, J_{10}$ der Balkenquerschnitte in den Teilpunkten und bezeichnet die Größen $\frac{1}{J_0}, \frac{4}{J_1}, \frac{2}{J_2}, \frac{4}{J_3} \dots \frac{2}{J_8}, \frac{4}{J_9}, \frac{1}{J_{10}}$ mit $i_0, i_1, i_2, i_3 \dots i_8, i_9, i_{10}$.

Dann ist bekanntlich nach Simpsons Regel annähernd:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon S &= \int_0^l \frac{dx}{J} = \frac{l}{3 \cdot 10} (i_0 + i_1 + i_2 + i_3 \dots + i_8 + i_9 + i_{10}) \\ \varepsilon S' &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{x dx}{J} = \frac{l}{3 \cdot 10^2} (i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \dots + 8i_8 + 9i_9 + 10i_{10}) \\ \varepsilon S'' &= \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{x^2 dx}{J} = \frac{l}{3 \cdot 10^3} (i_1 + 2^2i_2 + 3^2i_3 + \dots + 8^2i_8 + 9^2i_9 + 10^2i_{10}) \\ \varepsilon S''' &= \frac{1}{l^3} \int_0^l \frac{x^3 dx}{J} = \frac{l}{3 \cdot 10^4} (i_1 + 2^3i_2 + 3^3i_3 + \dots + 8^3i_8 + 9^3i_9 + 10^3i_{10}). \end{aligned} \right\} (83)$$

In manchen Fällen, insbesondere bei schmiedeisernen Balken, ändern sich die Balkenquerschnitte nicht stetig, sondern in einzelnen

Punkten plötzlich durch Hinzufügung neuer Gurtungsplatten, so daß die graphische Darstellung der Trägheitsmomente J die Treppenform annimmt. Diese

Form ist schätzungsweise zu berichtigen, wie in Abb. 13 angedeutet ist, indem man berücksichtigt, daß das Ende der neuen Gurtungsplatte spannungslos ist, und

daß die Spannungen durch die Nietverbindungen allmählich auf die Platte übertragen werden.

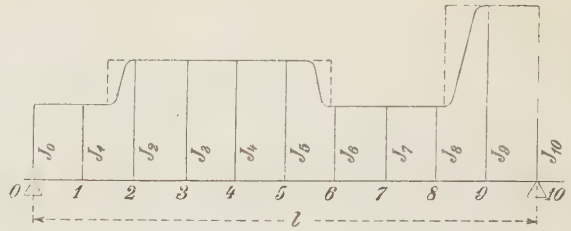
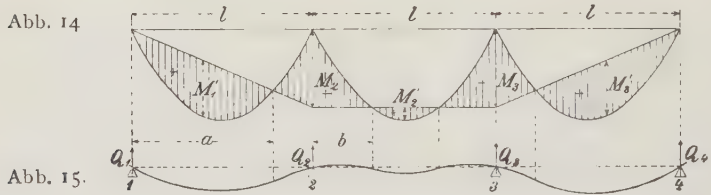


Abb. 13.

12. Einfluß der Veränderlichkeit des Balkenquerschnittes. Im Abschnitt 10 wurde angedeutet, daß die Biegemomente und Schubkräfte, welche von einem kontinuierlichen Balken



konstanten Querschnittes aufzunehmen sind, sich nicht erheblich ändern, wenn man die Balkenquerschnitte so anordnet, daß $\frac{M}{\epsilon J}$ und

bei konstanter Balkenhöhe auch die Spannungen der äußersten Balkenfasern annähernd eine unveränderliche Größe erhalten. Um diese Behauptung an einem einfachen Beispiel zu prüfen, berechnen wir für einen gleichmäßig belasteten Balken mit drei gleichen Feldern die in Betracht kommenden Größen einmal für konstanten Querschnitt und das zweitemal unter der Voraussetzung, daß

$$k = \frac{M}{\epsilon J}$$

von genau konstanter Größe sei. Im ersten Falle ergeben die Gleichungen 73), 74), 75), wenn q die konstante Belastung der

Längeneinheit bezeichnet, und wenn die Stützen in gleicher Höhe liegen:

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= -0,100 \, q l^2 \\ M'_1 &= 0,080 \, q l^2 \\ M'_2 &= 0,025 \, q l^2 \\ Q_1 &= 0,400 \, q l = Q_4 \\ Q_2 &= 1,100 \, q l = Q_3 \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Im *zweiten* Falle, wenn k konstant ist, bezeichnen wir mit a und b (Abb. 14 und 15) die Abszissen der beiden Balkenquerschnitte neben der zweiten Stütze, für die das Biegemoment gleich null wird. Zwischen diesen beiden Abszissen ergibt sich die Beziehung

$$a = l - b + \frac{b^2}{l}, \quad (85)$$

wenn man Gleichung 8) für die Balkenfelder 1 und 2 bildet, in die erste Gleichung

$$x = a, \quad M = 0$$

und in die zweite Gleichung

$$x = b, \quad M = 0$$

einsetzt, wobei zu beachten ist, daß der Symmetrie wegen M_2 und M_3 gleich groß sind. Eine zweite Beziehung folgt aus Gleichung 27):

$$0 = \Pi_1 + \Pi_2.$$

Da k konstant ist, so ist

$$\Pi_1 = \frac{k}{2l} (a^2 - (l - a)(l + a)) = \frac{k}{2l} (2a^2 - l^2)$$

und

$$\Pi_2 = k \left(\frac{l}{2} - b - b \right) = \frac{k}{2} (l - 4b).$$

Folglich ist

$$a^2 = 2bl. \quad (86)$$

Die beiden Bedingungen 85) und 86) führen zu der Gleichung:

$$\frac{b^4}{l^4} - \frac{2b^3}{l^3} + \frac{3b^2}{l^2} - \frac{4b}{l} + 1 = 0, \quad (87)$$

die zwischen 0 und +1 nur die *eine* Wurzel

$$\frac{b}{l} = +0,309$$

hat. Demnach ist

$$a = 0,7865 \, l$$

$$\left. \begin{aligned}
 M_2 &= \frac{q(b^2 - lb)}{2} = -0,1067 \, ql^2 \\
 Q_1 &= \frac{qa}{2} = 0,3933 \, ql \\
 M_1 &= \frac{Q_1^2}{2q_1} = 0,0773 \, ql^2 \\
 M_2 &= \frac{1}{8} \, ql^2 + M_2 = 0,0183 \, ql^2 \\
 Q_2 &= 1,50 \, ql - Q_1 = 1,1067 \, ql
 \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Vergleicht man diese Werte mit denen der Gleichungen 84), so zeigt sich, daß der Unterschied sehr gering ist. Es ist jedoch keineswegs zulässig, dieses Ergebnis zu verallgemeinern und etwa anzunehmen, daß der Einfluß der Veränderlichkeit des Balkenquerschnittes stets geringfügig sei. In solchen Fällen, die *nicht* zwischen den beiden Grenzen liegen, in denen die Größen J oder $\frac{M}{J}$ konstant sind, kann der bezeichnete Einfluß sehr beträchtlich werden.

13. Literarische Notizen. Die vorstehende Abhandlung enthält in erheblich gekürzter Form den Inhalt der *Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen* in der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1860, S. 323 und 407, und 1862, S. 245.

Die Beziehung zwischen den drei Stützenmomenten für den Fall, in dem die Stützen in gleicher Höhe liegen (Gleichung 33) wurde zuerst von *Bertot* veröffentlicht; *Comptes rendus de la Société des Ingénieurs civils* 1855, p. 278.

Die Gleichung 30), welche die Höhenlage der Stützen berücksichtigt, kommt zuerst in meiner Abhandlung vom Jahre 1860 (S. 328) vor.

Beide Gleichungen werden in Deutschland irrtümlicherweise die *Clapeyronschen Gleichungen* genannt. Die von Clapeyron in den *Comptes rendus* vom Dezember 1857 mitgeteilte Gleichung stimmt mit der von Bertot überein.

Der Einfluß der Höhenlage der Stützen wurde zuerst untersucht von:

Köpcke, Ueber die Dimensionen von Balkenlagen: Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1856.

Scheffler, Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken, Braunschweig 1857.

Grashof, Ueber die relative Festigkeit mit Rücksicht auf deren möglichste Vergrößerung durch angemessene Unterstutzung; Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1857—1859.

Ferner sind zu nennen:

Winkler, Beiträge zur Theorie der kontinuierlichen Brückenträger; Zivilingenieur 1862.

Bresse, Cours de Mécanique appliquée, Troisième Partie; Paris 1865.

Weyrauch, Allgemeine Theorie der kontinuierlichen und einfachen Träger; Leipzig 1873.

Handbuch der Ingenieurwissenschaften, Bd. II, Der Brückenbau, 3. Auflage, 1901, S. 364.

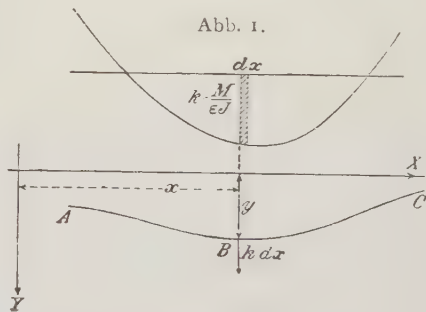
Abhandlung X.

Die elastische Linie.

1. Darstellung der elastischen Linie eines geraden Balkens als Seilkurve. Im Abschnitt 2 der Abhandlung IX wurde die Differentialgleichung der elastischen Linie eines geraden Balkens:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{\epsilon J} \quad (1)$$

abgeleitet. In dieser Gleichung bezeichnen x, y die Koordinaten eines Punktes B der elastischen Linie ABC (Abb. 1 und 2), bezogen auf eine nach rechts zeigende wagerechte x -Achse und eine nach unten zeigende lotrechte y -Achse; ferner bezeichnet M das Biegemoment und J das Trägheitsmoment des Balkenquerschnittes B , endlich ϵ den Elastizitätsmodul des Balkenmaterials. Das Biegemoment M ist positiv, wenn die konkave Seite des gebogenen Balkens nach oben gekehrt ist.



Eine Differentialgleichung von derselben Form:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{k}{H} \quad (2)$$

hat nach (II, 11) die Seilkurve, deren lotrechte Belastung auf der unendlich kleinen Strecke dx die veränderliche Größe $k dx$ hat, und deren Horizontalkraft mit H bezeichnet wird. Die Koordinatenachsen sind dieselben wie für Gleichung 1), und die Lasten $k dx$ sind positiv wenn sie nach unten zeigen.

Aus der Uebereinstimmung der beiden Differentialgleichungen geht hervor, daß die elastische Linie als eine Seilkurve angesehen werden kann, wenn entweder

$$\frac{M}{\varepsilon J} = k \quad \text{und} \quad H = 1 \quad (3)$$

$$\text{oder} \quad \frac{M}{J} = k \quad \text{und} \quad H = \varepsilon \quad (4)$$

$$\text{oder} \quad M = k \quad \text{und} \quad H = \varepsilon J \quad (5)$$

gesetzt wird.

Die Ordinaten y der elastischen Linie sind in den meisten Fällen der Anwendung so klein, daß sie nicht darstellbar wären, wenn man sie in demselben Maßstabe auftragen müßte wie die Abszissen x . Man kann aber nach (II, 7) die Ordinaten einer Seilkurve in einem beliebigen Verhältnis *vergrößern*, indem man die Horizontalkraft H in dem gleichen Verhältnis *verkleinert*. Trägt man also z. B. die Belastungen k gleich $\frac{M}{\varepsilon J}$ und die Horizontal-

kraft H anstatt eins gleich $\frac{1}{1000}$ auf, so ergibt die Seilkurve die Ordinaten y der elastischen Linie in *tausendfacher Vergrößerung*. In manchen Fällen ist es zweckmäßig, die Ordinaten y in *natürlicher Größe* darzustellen. Ist der Maßstab der Abszissen $1:n$, so hat man zu diesem Zweck die Horizontalkraft H anstatt gleich eins

$$H = \frac{1}{n}$$

aufzutragen. Diese Eigenschaft der Seilkurve ermöglicht die Anwendung des graphischen Verfahrens auf die Darstellung der elastischen Formänderungen eines geraden Balkens. Aber auch für die *Berechnung* dieser Formänderungen bietet die oben beschriebene Beziehung wesentliche Vorteile, wie im nächsten Abschnitt an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

2. Beziehungen zwischen der elastischen Linie und den Biegemomenten und Stützkraften eines Balkens.

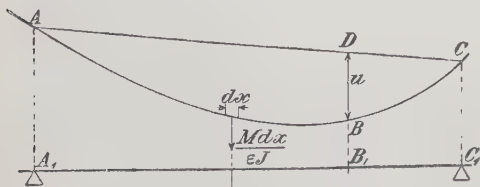


Abb. 3.

1) In Abb. 3 bezeichnen A, B, C drei beliebige Punkte einer elastischen Linie und u die lotrechte Ordinate BD des Punktes B in bezug auf die Sehne AC . Ferner ist $A_1 C_1$ ein wage-

rechter Balken, der lotrecht unter A und C in den Punkten A_1 und C_1 frei unterstützt ist. Wir lassen die Belastungen $\frac{M dx}{\epsilon J}$ der elastischen Linie auf den Balken einwirken und bestimmen das hierdurch erzeugte Biegemoment m im Balkenquerschnitt B_1 . Zu diesem Zweck ist nach (II, 8) die Seilkurve der Lasten $\frac{M dx}{\epsilon J}$, also die elastische Linie ABC zu bilden, und die Ordinate u im Lote des Balkenquerschnittes B_1 zu messen. Es ist dann

$$m = Hu$$

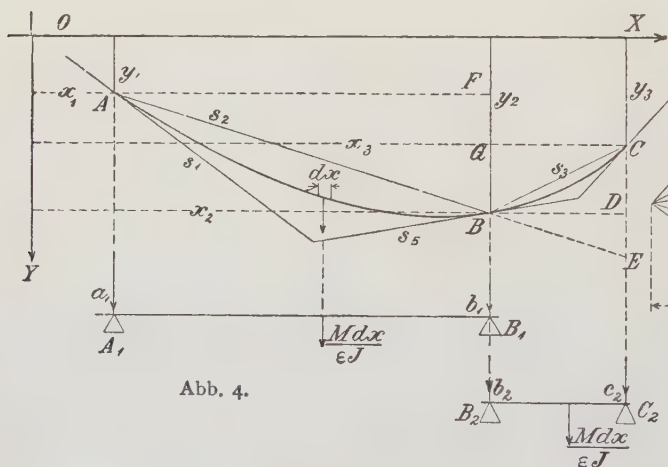
oder, weil

$$H = 1$$

ist:

$$m = u. \quad (6)$$

Demnach ist u das Biegemoment, das im Balkenquerschnitt B_1 von den Lasten $\frac{M dx}{\epsilon J}$ des Balkens $A_1 C_1$ erzeugt wird.



2) In Abb. 4 sind A , B , C drei beliebige Punkte einer elastischen Linie, die in bezug auf eine wagerechte nach rechts zeigende x -Achse und eine lotrechte nach unten zeigende y -Achse die Koordinaten (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) haben. Ferner sind $A_1 B_1$ und $B_2 C_2$ zwei wagerechte, an ihren Enden *frei unterstützte* Balken, deren Stützen in den Loten der Punkte A , B , C liegen.

Wir lassen auf diese Balken die Belastungen $\frac{M dx}{\epsilon J}$ der elastischen Linie einwirken und bestimmen die beiden Stützkkräfte b_1 und b_2 ,

die von den beiden Balken auf die Stützen B_1 und B_2 übertragen werden. Zu dem Zweck ist nach (II, 4) und (II, 10) die Seilkurve ABC zu bilden. Die Tangenten der Punkte A, B, C sind mit s_1, s_5, s_4 , die Schlußlinien AB, BC mit s_2, s_3 bezeichnet. Der Kräfteplan (Abb. 5) bestimmt die Kräfte a_1, b_1, b_2, c_2 , die von den Balken auf die Stützen übertragen werden. Aus der Aehnlichkeit des Dreiecks $S_3 b_2 b_1 S_2$ im Kräfteplan mit dem Dreieck BCE im Lageplan und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BDE, AFB folgt:

$$\frac{b_1 + b_2}{H} = \frac{DE}{BD} + \frac{CD}{BD} = \frac{FB}{AF} + \frac{CD}{BD}$$

oder, weil H gleich eins ist:

$$b_1 + b_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_2 - y_3}{x_3 - x_2}. \quad (7)$$

Die Koordinaten der drei Punkte A, B, C bestimmen also die Summe der beiden Stützkkräfte b_1, b_2 (vergl. IX, 4). Bei Anwendung der vorstehenden Beziehungen ist zu beachten, daß die Balken-

lasten $\frac{M dx}{\epsilon J}$ unbenannte Zahlen sind. Daher sind auch die Stütz-

kräfte b_1, b_2 unbenannte Zahlen, und das Biegemoment m ist wie die Ordinate u eine Strecke.

Beispiel 1. Ein Balken AC (Abb. 7) von prismatischer Form

und der Stützweite l ist gleichmäßig mit $p l$ belastet; es ist die elastische Einsenkung

$$BD = y_2$$

in der Balkenmitte zu berechnen. Die Belastungsfläche (Abb. 6) $A_1 E_1 C_1$ der elastischen Linie ist ein Parabelsegment von der Scheitelhöhe

$$B_1 E_1 = \frac{p l^2}{8 \epsilon J}.$$

Jeder der beiden Balken $A_1 B_1, B_1 C_1$ trägt also eine Belastungsfläche

$$A_1 B_1 E_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{p l^2}{8 \epsilon J} = \frac{p l^3}{24 \epsilon J},$$

deren Schwerpunkte von den Stützen A_1, C_1 um die Strecken

$$A_1 F_1 = C_1 G_1 = \frac{5}{16} l$$

Abb. 6.

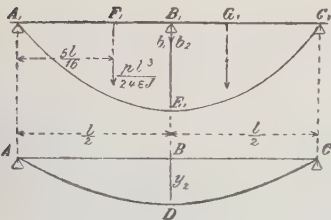


Abb. 7.

abstehen. Daher haben die Stützkräfte b_1, b_2 die Größen

$$b_1 = b_2 = \frac{5}{8} \frac{p l^3}{24 \epsilon J} = \frac{5 p l^3}{192 \epsilon J},$$

und da die Ordinaten der Punkte A, C :

$$y_1 = y_3 = 0$$

sind, so ist nach Gleichung 7):

$$-\frac{2}{l} y_2 + \frac{2}{l} y_2 = b_1 + b_2,$$

also

$$y_2 = \frac{5 p l^4}{384 \epsilon J}.$$

Beispiel 2. Ein prismatischer Balken AB (Abb. 8) von der Stützweite l trägt in dem Punkte C von der Abszisse

$$AC = c > \frac{l}{2}$$

die Last P ; es sind die Koordinaten

$A_1 E_1 = x_1, E_1 F_1 = y_1$ des tiefsten Punktes F_1 seiner elastischen Linie $A_1 F_1 B_1$ (Abb. 9) zu bestimmen. Wir betrachten die Ordinaten y als Darstellung der Bie-

Abb. 8.

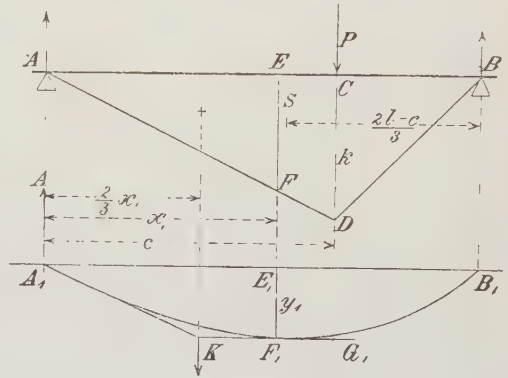


Abb. 9.

gungsmomente des Balkens, die von der Belastungsfläche ADB hervorgerufen werden. Dieses Dreieck hat die Höhe

$$CD = k = \frac{Pc(l-c)}{l \epsilon J},$$

und da sein Schwerpunkt S von der Stütze B den wagerechten Abstand $\frac{2l-c}{3}$ hat, so ist die von ihm in A erzeugte Stützkraft:

$$A = \frac{2l-c}{3l} \cdot \frac{kl}{2} = \frac{k(2l-c)}{6}.$$

Die Tangente $F_1 G_1$ der elastischen Linie im tiefsten Punkte F_1 ist zur Schlußlinie $A_1 B_1$ parallel; daher ist die von dem Dreieck AEF

dargestellte Belastung K der Strecke AE gleich der Stutzkraft A .
Da die Strecke

$$EF = \frac{x_1}{c} k$$

ist, so folgt:

$$A = \frac{k(2l - c)}{6} = K = \frac{x_1}{2} \frac{x_1 k}{c}$$

und hieraus

$$x_1 = \sqrt{\frac{c(2l - c)}{3}}.$$

Das von den beiden Kräften A und K erzeugte Biegemoment y_1 hat die Größe

$$y_1 = Ax_1 - K \frac{x_1}{3} = \frac{2}{3} K x_1 = \frac{k x_1^3}{3c}$$

oder, wenn die Werte von k und x_1 eingesetzt werden:

$$y_1 = \frac{P(l - c)}{9l\epsilon J} \sqrt{\frac{c^3(2l - c)^3}{3}}.$$

Ist der Balken in seiner *Mitte* belastet, also

$$c = \frac{l}{2},$$

so wird

$$x_1 = \frac{l}{2} \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{Pl^3}{48\epsilon J}.$$

3. Graphische Bestimmung der elastischen Linie eines geraden Balkens. *Beispiel 1.* Für den Balken sind gegeben: die im Maßstabe 1 : 200 dargestellte Stützweite

$$AC = 1200 \text{ cm},$$

ferner die graphische Darstellung der Trägheitsmomente J des Balkenquerschnittes (Abb. 10) im Maßstabe

$$1 \text{ cm} = 60\,000 \text{ cm}^4$$

und die graphische Darstellung der Biegemomente M (Abb. 11) im Maßstabe

$$1 \text{ cm} = 1\,000\,000 \text{ cm kg},$$

endlich der Elastizitätsmodul

$$\epsilon = 2\,000\,000 \text{ kg cm}^{-2}.$$

Hieraus ergab sich die Belastungsfläche der elastischen Linie (Abb. 12), d. h. die graphische Darstellung von

$$k = \frac{M}{\varepsilon J}$$

im Maßstabe

$$200\,000\text{ cm} = 1\text{ cm}^{-1}.$$

Die Belastungsfläche wurde in vier Flächenteile 1, 2, 3, 4 zerlegt, deren Größen durch unbenannte Zahlen ausgedrückt werden und im Kräfteplan (Abbildung 13) in dem Maßstabe

$$500\text{ cm} = 1$$

dargestellt worden sind. Die Horizontalkraft des Seilpolygons wurde

$$H = \frac{1}{400} = 1,25\text{ cm}$$

gewählt. Da der Maßstab der Abszissen

$$1\text{ cm} = 200\text{ cm}$$

ist, so werden die Ordinaten der elastischen Linie im Maßstabe

$$1\text{ cm} = 200\text{ cm} \cdot \frac{1}{400} = \frac{1}{2}\text{ cm}$$

dargestellt. Die elastische Linie berührt nach (II, 10) das Seilpolygon der Lasten 1, 2, 3, 4 in den Ordinaten, welche diese Flächenteile voneinander trennen. Die zur Schlußlinie A_1C_1 parallele Tangente B_1E_1 bestimmt den Punkt B_1 der tiefsten Einsenkung u der elastischen Linie.

Beispiel 2. Der gleichmäßig belastete Balken AD (Abb. 15) besteht aus drei prismatischen Teilen, deren Querschnitte die Träg-

Abb. 10.

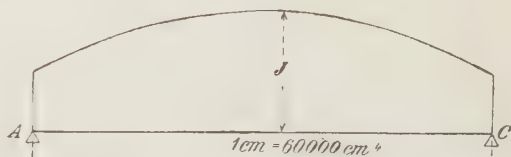


Abb. 11.

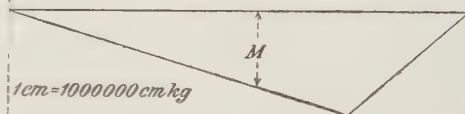


Abb. 12.

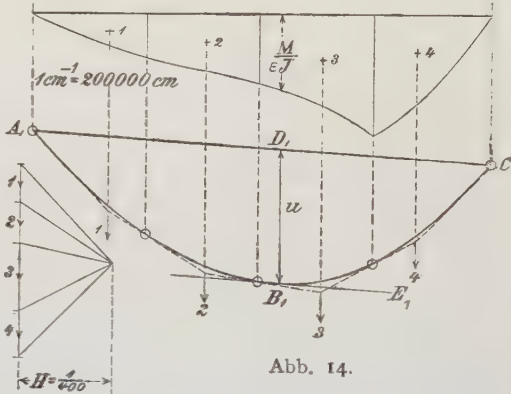
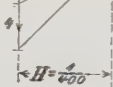


Abb. 13.

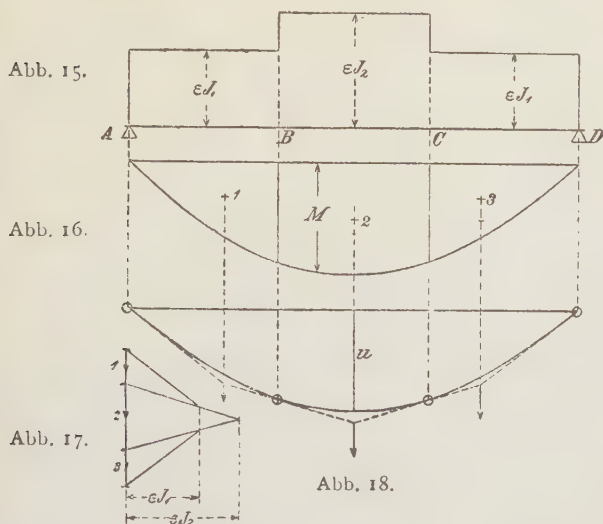


Abb. 14.



heitsmomente J_1, J_2, J_1 haben. Es wurden dargestellt: die Größen εJ durch Abb. 15 im Maßstabe $1 \text{ cm} = 16 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2 \text{ kg}$, die Größen M

in Abb. 16 im Maßstabe $1 \text{ cm} = 12 \cdot 10^5 \text{ cm kg}$. Diese Belastungsfläche wurde der Deutlichkeit wegen nur in drei Teile zerlegt, deren Größen 1, 2, 3 im Kräfteplan Abb. 17 im Maßstabe $1 \text{ cm} = 8 \cdot 10^8 \text{ cm}^2 \text{ kg}$ aufgetragen wurden. Für die Horizontalkräfte εJ diente der 200-fach kleinere



Maßstab $1 \text{ cm} = 16 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2 \text{ kg}$. Da der Maßstab der Abszissen $1:200$ ist, so erhielten die Ordinaten u der elastischen Linie in Abb. 18 ihre natürliche Größe.

4. Gegenseitige Beziehung zwischen den Senkungen zweier Punkte eines an seinen Enden frei unterstützten Balkens. In Abb. 19 bezeichnet AD einen in den Punkten A und D frei unterstützten Balken von veränderlichem oder konstantem Querschnitt. B und C sind zwei beliebige Punkte der Balkenachse. Wird der Balken im Punkte B mit einer gegebenen Last P belastet, so entsteht die elastische Linie AC_1D und im Punkte C eine elastische Einsenkung

$$CC_1 = y_c.$$

Wird dagegen dieselbe Last P im Punkte C angebracht, so entsteht die elastische Linie AB_1D und im Punkte B eine elastische Einsenkung

$$BB_1 = y_b.$$

Die zu beweisende Beziehung besteht darin, daß

$$y_c = y_b$$

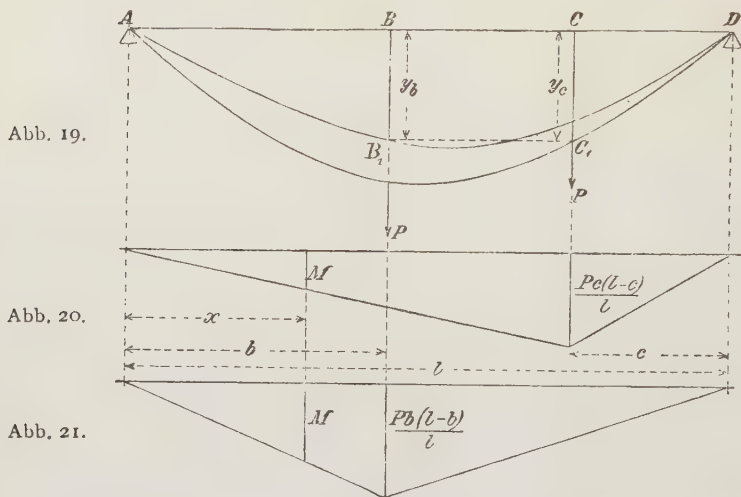
ist, daß also die Senkung des Punktes C infolge einer Belastung P

des Punktes B eben so groß ist wie die Senkung des Punktes B infolge der Belastung P des Punktes C .

Um diese Behauptung zu beweisen, bestimmen wir zuerst die Senkung y_b und betrachten, wie im Abschnitt 2 beschrieben wurde, y_b als das Biegemoment des Balkenquerschnittes B , das von den Lasten

$$k dx = \frac{M dx}{\epsilon J}$$

der elastischen Linie AB_1D erzeugt wird. Wir bezeichnen die



Strecken AB , CD , AD (Abb. 19) mit b , c und l und die Abszisse irgend einer Last $k dx$ mit x . Die Darstellung von M wird durch Abb. 20 gegeben. M hat die Größe

$$M = \frac{Pcx}{l} \quad \text{oder} \quad M = \frac{P(l-c)(l-x)}{l}$$

je nachdem $x < l - c$ oder $x > l - c$

ist. Eine der unendlich kleinen Lasten $k dx$ von der Abszisse x erzeugt in dem Balkenquerschnitt B das unendlich kleine Biegemoment

$$dy_b = k dx \frac{x}{l} (l - b) \quad \text{oder} \quad dy_b = k dx \frac{l - x}{l} b,$$

je nachdem $x < b$ oder $x > b$ ist.

Für jeden Punkt der Strecke AB ist $x < l - c$ und $x < b$

„ „ „ „ „ BC „ $x < l - c$ „ $x > b$

„ „ „ „ „ CD „ $x > l - c$ „ $x > b$.

Demnach erzeugt jede Last $k dx$ der Strecke

$$AB \text{ das Biegemoment } dy_b = \frac{Pcx}{l\epsilon J} dx \frac{x}{l} (l-b)$$

$$BC \quad , \quad , \quad dy_b = \frac{Pcx}{l\epsilon J} dx \frac{l-x}{l} b$$

$$CD \quad , \quad , \quad dy_b = \frac{P(l-c)(l-x)}{l\epsilon J} dx \frac{l-x}{l} b.$$

Die Integration ergibt also:

$$y_b = \frac{P}{\epsilon l^2} \left\{ (l-b)c \int_0^b \frac{x^2 dx}{J} + bc \int_b^{(l-c)} \frac{x(l-x) dx}{J} + b(l-c) \int_{(l-c)}^l \frac{(l-x)^2 dx}{J} \right\} \quad (8)$$

Im zweiten Falle, wenn der Punkt B die Last P trägt und die Größen M durch Abb. 21 dargestellt werden, ist

$$M = \frac{P(l-b)x}{l} \quad \text{oder} \quad M = \frac{Pb(l-x)}{l},$$

je nachdem $x < b$ oder $x > b$

ist. Eine Last $k dx$ von der Abszisse x erzeugt im Balkenquerschnitt C ein Biegemoment

$$dy_c = k dx \frac{x}{l} c \quad \text{oder} \quad dy_c = k dx \frac{l-x}{l} (l-c),$$

je nachdem $x < l-c$ oder $x > l-c$

ist. Demnach erzeugt jede Last $k dx$ der Strecke

$$AB \text{ das Biegemoment } dy_c = \frac{P(l-b)x}{l\epsilon J} dx \frac{x}{l} c$$

$$BC \quad , \quad , \quad dy_c = \frac{Pb(l-x)}{l\epsilon J} dx \frac{x}{l} c$$

$$CD \quad , \quad , \quad dy_c = \frac{Pb(l-x)}{l\epsilon J} dx \frac{l-x}{l} (l-c),$$

woraus durch Integration folgt:

$$y_c = \frac{P}{\epsilon l^2} \left\{ (l-b)c \int_0^b \frac{x^2 dx}{J} + bc \int_b^{(l-c)} \frac{x(l-x) dx}{J} + b(l-c) \int_{(l-c)}^l \frac{(l-x)^2 dx}{J} \right\} \quad (9)$$

Die Gleichungen 8) und 9) zeigen, daß

$$y_b = y_c$$

ist, wie oben behauptet wurde.

5. Bestimmung der elastischen Senkungen eines Balkenpunktes bei verschiedenen Belastungen des Balkens. Es kommt nicht selten die Aufgabe vor, die Senkungen eines bestimmten Balkenpunktes C (Abb. 22) für eine Reihe von gegebenen, einfachen oder zusammengesetzten Belastungen des Balkens zu bestimmen. In einem solchen Falle kann das im Abschnitt 3 beschriebene Verfahren durch ein einfacheres ersetzt werden, das

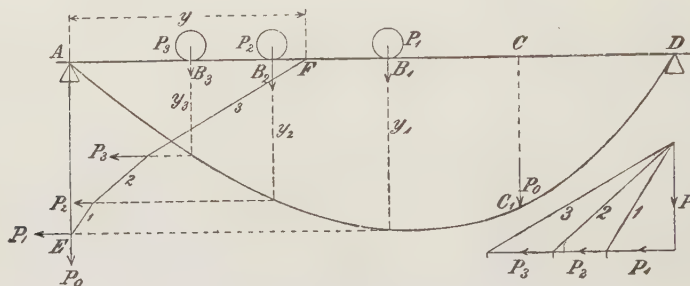


Abb. 22.

Abb. 23.

an einem Beispiel erklärt werden möge. Es soll die Senkung y des Balkenpunktes C bestimmt werden, die bei der gegebenen Belastung P_1, P_2, P_3 eintritt.

Die Kurve AC_1D zeigt die elastische Linie des Balkens in dem Falle, wenn er nur eine einzige, im Punkte C angebrachte Last P_0 trägt. Die Balkenpunkte B_1, B_2, B_3 erleiden in diesem Belastungsfalle die Senkungen y_1, y_2, y_3 . Würde im Punkte B_1 als einzige Last des Balkens P_0 angebracht, so würde sich nach der im vorigen Abschnitt bewiesenen Beziehung der Balkenpunkt C um y_1 senken. Da die Senkung der Last proportional ist, so erzeugt die Last P_1 des Punktes B_1 eine Senkung des Balkenpunktes C von der Größe $\frac{P_1}{P_0} y_1$. Ebenso ergeben sich die Senkungen $\frac{P_2}{P_0} y_2$ und $\frac{P_3}{P_0} y_3$ des Punktes C , die von den Lasten P_2 und P_3 erzeugt werden. Die ganze Senkung des Punktes C bei der Belastung P_1, P_2, P_3 hat also die Größe

$$y = \frac{1}{P_0} (P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3).$$

Die Länge y kann vermittels eines Seilpolygons bestimmt werden.

Bringt man in den Endpunkten der Ordinaten y_1, y_2, y_3 die Horizontalkräfte P_1, P_2, P_3 an und bildet mit der Normalkraft P_0 (Abb. 23) das Seilpolygon EF in Abb. 22, so ist nach (II, 7):

$$y = AF.$$

Um sonach für *jede* gegebene zusammengesetzte Belastung des Balkens die Senkung y des Punktes C vermittels einer Gleichung von der Form

$$y = \frac{\sum P y}{P_0} \quad (10)$$

bestimmen zu können, braucht nur die *eine* elastische Linie AC_1D gebildet zu werden. Es ist zu beachten, daß das Verfahren in gleicher Weise anwendbar ist für Balken veränderlichen Querschnittes wie für prismatische Balken.

Die Ordinaten y_1, y_2, y_3 bestimmen den *Einfluß*, den die Lasten P_1, P_2, P_3 auf die Größe der Senkung y des Punktes C ausüben. Mit Rücksicht auf diesen Zweck nennt man die Kurve AC_1D eine *Einflußlinie*, welche die Entstehung der Größe y veranschaulicht und ihre Bestimmung ermöglicht.

6. Die Stützkkräfte eines kontinuierlichen Balkens. Bei der Berechnung eines kontinuierlichen Balkens werden entweder die Stützkkräfte der Mittelstützen oder die Biegemomente der Balkenquerschnitte über den Mittelstützen, die sogenannten Stützenmomente, als statisch unbestimmbare Größen in die Rechnung eingeführt. Bei einem Balken *veränderlichen* Querschnittes gestaltet sich die Rechnung am einfachsten, wenn die *Stützkkräfte* als Unbekannte gewählt werden, während es vorzuziehen ist, die *Stützenmomente* zunächst zu bestimmen, wenn der Balken prismatisch, sein Querschnitt also *konstant* ist.

In Abb. 24 ist ein kontinuierlicher Balken veränderlichen Querschnittes dargestellt; derselbe ist in den Punkten A, B_1, C_1, D gestützt und trägt in den Punkten E, F, G, H die Lasten P_1, P_2, P_3, P_4 . Die Trägheitsmomente J der Balkenquerschnitte sind gegeben. Die Endstützen A und D liegen in einer Horizontalen. Die Höhenlage der Mittelstützen B_1, C_1 ist durch die Ordinaten

$$BB_1 = y_I, \quad CC_1 = y_{II}$$

gegeben. Diese Ordinaten sind in demselben Maßstabe wie die Ordinaten der elastischen Linien aufzutragen.

Um die unbekannten Stützkkräfte X_I, X_{II} der Mittelstützen B_1, C_1 zu bestimmen, beseitigen wir diese Stützen, nicht aber die Stütz-

kräfte und bilden hierdurch einen Balken, der an seinen Enden A, D gestützt ist und außer den gegebenen positiven Lasten P_1, P_2, P_3, P_4 die unbekannten negativen Lasten X_I, X_{II} trägt. Wenn durch zwei Gleichungen von der Form der Gleichung 10) ausgedrückt wird, daß bei dieser Belastung die Balkenpunkte B und C die gegebenen Senkungen y_I und y_{II} annehmen müssen, so ergeben sich zwei Bedingungen, aus denen die Unbekannten X_I, X_{II} zu berechnen sind. Das Verfahren ändert sich nicht, wenn die Anzahl der Mittelstützen größer oder kleiner als zwei ist.

Zu dem angegebenen Zweck wurden die beiden elastischen Linien AB_2C_2D und AB_3C_3D des Balkens gebildet, die entstehen,

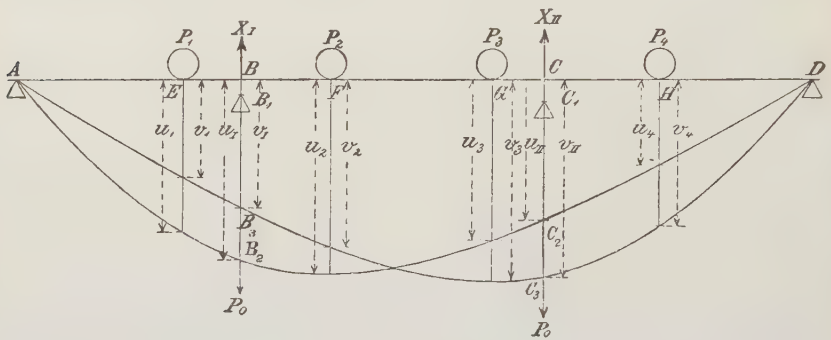


Abb. 24.

wenn eine Last von willkürlich gewählter Größe P_0 im ersten Falle im Punkte B , im zweiten Falle im Punkte C angebracht wird, und wenn alle übrigen Lasten beseitigt werden. Die Ordinaten der beiden Kurven in den belasteten Punkten E, B, F, G, C, H werden in dieser Reihenfolge mit $u_1, u_I, u_2, u_3, u_{II}, u_4$ und $v_1, v_I, v_2, v_3, v_{II}, v_4$ bezeichnet. Daß der Balkenpunkt B in dem gegebenen Zustande die elastische Senkung

$$BB_1 = y_I$$

annehmen soll, wird nach Gleichung 10) durch die Bedingung:

$$P_0 y_I = P_1 u_1 - X_I u_I + P_2 u_2 + P_3 u_3 - X_{II} u_{II} + P_4 u_4$$

ausgedrückt. Ebenso fordert die Gleichung:

$$P_0 y_{II} = P_1 v_1 - X_I v_I + P_2 v_2 + P_3 v_3 - X_{II} v_{II} + P_4 v_4,$$

daß die Ordinate der elastischen Linie im Punkte C_1 die gegebene Größe

$$CC_1 = y_{II}$$

annehmen muß. Die beiden Bedingungen bestimmen die Größen

der Stützkräfte X_I und X_{II} . Diese Kräfte zeigen nach oben, wenn ihre Werte positiv sind. Die Rechnung wird in der Regel noch dadurch vereinfacht, daß die Ordinaten y_I, y_{II} die Werte null haben. Nachdem die Stützkräfte X_P, X_{II} der Mittelstützen in der angegebenen Weise berechnet worden sind, können die Stützkräfte der Endstützen A und D vermittels eines Seilpolygons bestimmt werden (II, 4), welches zugleich die Biegemomente der Balkenquerschnitte ergibt (II, 8).

7. Einflußlinien. Die vorstehende Untersuchung zeigt, daß die Stützkräfte X und folglich auch die Biegemomente M und die Schubkräfte T der Balkenquerschnitte (VII, 8) Funktionen *ersten Grades* der Lasten P und der Stützordinaten y sind. Jede dieser Größen, z. B. das Biegemoment M des Balkenquerschnittes von der gegebenen Abszisse x , kann also dargestellt werden durch eine Gleichung von der Form

$$M = e_1 P_1 + e_2 P_2 + \dots + E_1 y_I + E_2 y_{II} + \dots, \quad (11)$$

in welcher $e_1, e_2 \dots$ und $E_1, E_2 \dots$ Größen bezeichnen, die von den Lasten P und von den Stützordinaten y *unabhängig* sind. Jede dieser unbekannten Größen e und E kann *unabhängig* von den anderen bestimmt werden. Um z. B. die Größe e_1 zu ermitteln, bestimmt man das Biegemoment M_1 des Balkenquerschnittes, welches entsteht, wenn alle Lasten P mit Ausnahme von P_1 und alle Stützordinaten y gleich null gesetzt werden, und erhält e_1 aus der Gleichung

$$M_1 = e_1 P_1.$$

Die Linie, welche durch ihre Ordinate für jede Abszisse x der Last P die zugehörige Größe e darstellt, wird die *Einflußlinie* des Biegemomentes M genannt, weil die Ordinate e für jede Lage der Last P den Einfluß darstellt, den die Last P auf die Größe von M ausübt. Ein Beispiel solcher Einflußlinien wurde bereits im Abschnitt 5 gegeben.

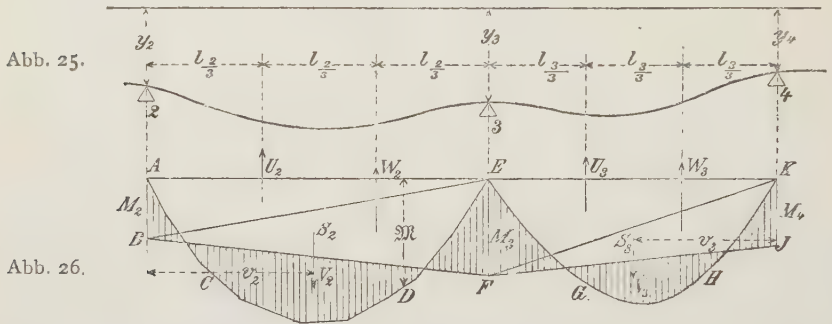
8. Beziehung zwischen drei aufeinanderfolgenden Stützenmomenten eines kontinuierlichen Balkens von konstantem Querschnitt. Die durch Gleichung 7) ausgedrückte Bedingung gilt für je drei Punkte der elastischen Linie, also auch für die Punkte, die von drei aufeinander folgenden Stützen 2, 3, 4 (Abb. 25) des kontinuierlichen Balkens berührt werden. Um die Gleichung 7) für diese drei Punkte zu bilden, sind in Abb. 26 die Biegemomente der Balkenfelder 2 und 3 dargestellt worden.

Wir bezeichnen mit l_2 und l_3 die Stützweiten der beiden Felder, mit y_2, y_3, y_4 die gegebenen Ordinaten der Stützen 2, 3, 4, mit M_2, M_3, M_4 die unbekannten Stützenmomente, denen wir das *positive* Vorzeichen beilegen, wenn, wie es in der Regel der Fall ist, die *konkave* Seite des gebogenen Balkens über der Stütze nach *unten* gekehrt ist.

Die Momentenfläche des *zweiten* Balkenfeldes läßt sich in drei Teile zerlegen. Die Fläche

$$ACDE = V_2$$

stellt die gegebenen, positiven Biegemomente $\mathfrak{M}$ dar, die eintreten würden, wenn der Balken über jeder Stütze durchschnitten



würde. Zu diesen positiven Momenten treten die negativen Biegemomente hinzu, die von der Trapezfläche $ABFE$ oder den beiden Dreiecken

$$ABE = U_2 = -\frac{1}{2} M_2 l_2$$

und

$$EFB = W_2 = -\frac{1}{2} M_3 l_2$$

dargestellt werden. Wird diese Belastungsfläche der elastischen Linie, deren Horizontalkraft gleich εJ ist, in den Punkten A und E gestützt, so haben die drei von den Flächen V_2, U_2, W_2 in E erzeugten Stützkkräfte die Größen

$$\frac{V_2 v_2}{l_2}, \quad \frac{U_2}{3} = -\frac{M_2 l_2}{6} \quad \text{und} \quad \frac{2}{3} W_2 = -\frac{M_3 l_2}{3}.$$

In Gleichung 7) ist also

$$b_1 = \frac{V_2 v_2}{l_2} - \frac{M_2 l_2}{6} - \frac{M_3 l_2}{3}.$$

v_2 bezeichnet in diesen Formeln den Horizontalabstand des Schwerpunktes S_2 der Fläche $ACDE$ von dem Lot des Punktes A .

Wir zerlegen in gleicher Weise die Momentenfläche des *dritten* Balkenfeldes in die drei Teilflächen:

$$EGHK = V_3$$

$$EFK = U_3 = -\frac{M_3 l_3}{2}$$

$$KJF = W_3 = -\frac{M_4 l_3}{2}.$$

Der Schwerpunkt S_3 der Fläche $EGHK$ hat vom Lot der Stütze 4 den Abstand v_3 . Wird die Momentenfläche als Belastung des Balkens EK angesehen, so überträgt sie auf E die Stützkraft

$$b_2 = \frac{V_3 v_3}{l_3} - \frac{M_3 l_3}{3} - \frac{M_4 l_3}{6}.$$

Aus Gleichung 7) ergibt sich also die Bedingung:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon J \left(\frac{y_3 - y_2}{l_2} + \frac{y_3 - y_4}{l_3} \right) &= \frac{V_2 v_2}{l_2} + \frac{V_3 v_3}{l_3} - \frac{M_2 l_2}{6} \\ &\quad - \frac{M_3 (l_2 + l_3)}{3} - \frac{M_4 l_3}{6}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Die Anzahl der Bedingungen dieser Art, die für je zwei benachbarte Balkenfelder gebildet werden können, ist ebenso groß wie die Anzahl der zu bestimmenden unbekannten Stützenmomente.

Sind beispielsweise die beiden Balkenfelder 2 und 3 *gleichmäßig* mit $p_2 l_2$ und $p_3 l_3$ belastet, und liegen die drei Stützen 2, 3, 4 in gleicher Höhe, so ist

$$V_2 = \frac{2}{3} l_2 \frac{p_2 l_2^2}{8} = \frac{p_2 l_2^3}{12}$$

$$V_3 = \frac{p_3 l_3^3}{12}$$

$$v_2 = \frac{1}{2} l_2, \quad v_3 = \frac{1}{2} l_3$$

$$y_2 = y_3 = y_4$$

und folglich (vergl. IX, Gleichung 33):

$$M_2 l_2 + 2 M_3 (l_2 + l_3) + M_4 l_3 = \frac{p_2 l_2^3}{4} + \frac{p_3 l_3^3}{4}. \quad (13)$$

9. Die Biegemomente eines kontinuierlichen Balkens von konstantem Querschnitt in dem Fall, wenn nur *ein* Balkenfeld belastet ist, und alle Stützen in gleicher Höhe liegen. Wenn ein Balkenfeld unbelastet ist, so verschwindet für dieses Feld die im vorigen Abschnitt mit V bezeichnete Be-

lastungsfläche, und die Biegemomente des Feldes werden infolgedessen durch eine gerade Linie dargestellt. Die Abb. 27 zeigt einen Balken mit sieben Feldern, von denen nur eins, das vierte, belastet ist, während alle anderen keine Lasten tragen. Für die beiden ersten Felder nimmt, da das Biegemoment des Balkenquerschnittes über der Endstütze

$$M_1 = 0$$

ist, die Bedingung der Gleichung 12) die folgende Form an:

$$0 = \frac{M_2(l_1 + l_2)}{3} + \frac{M_3 l_2}{6},$$

woraus folgt:

$$\frac{M_3}{M_2} = - \frac{2(l_1 + l_2)}{l_2}. \quad (14)$$

Die Gleichung 14) zeigt, daß die beiden Stützenmomente M_2 und M_3 verschiedene Vorzeichen haben, und daß ihr Größenverhältnis *unveränderlich* und von der gegebenen Belastung des Balkens unab-

Abb. 27.

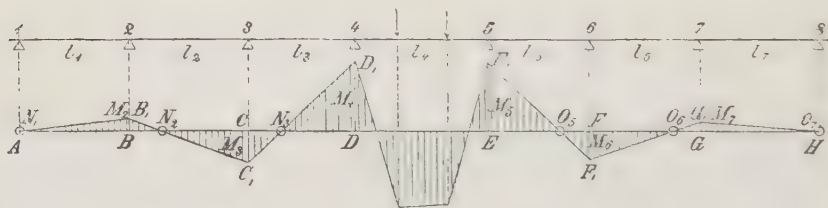


Abb. 28.

hängig ist. Die gerade Linie B_1C_1 , welche die Biegemomente innerhalb des zweiten Feldes graphisch darstellt, schneidet die Abszissenachse ABC daher in einem *festen* Punkte N_2 , dessen Lage durch Gleichung 14) bestimmt wird.

Für die beiden unbelasteten Balkenfelder 2 und 3 gilt nach Gleichung 12) die Bedingung:

$$0 = M_2 l_2 + 2 M_3 (l_2 + l_3) + M_4 l_3,$$

woraus in Verbindung mit Gleichung 14) folgt:

$$\frac{M_4}{M_3} = - \frac{2(l_2 + l_3)}{l_3} + \frac{l_2}{l_3} \frac{l_2}{2(l_1 + l_2)}. \quad (15)$$

Die gerade Linie C_1D_1 , welche die Biegemomente des dritten unbelasteten Feldes darstellt, geht also ebenfalls durch einen festen Punkt N_3 der Abszissenachse, dessen Lage durch die Gleichung 15) bestimmt wird.

In gleicher Weise kann man die Lage der festen Punkte O_7, O_6, O_5 ermitteln, durch welche die Form der graphischen Darstellung der Bieugsmomente der unbelasteten Felder am *rechten* Balkenende bestimmt wird. Da die Stützenmomente für die *Endstützen* 1 und 8 gleich null sind, so fallen die festen Punkte N_1 und O_7 mit den Punkten A und H (Abb. 28) zusammen.

Die vorstehende Betrachtung zeigt, daß, wenn *ein* Balkenfeld belastet ist, nur die beiden Stützenmomente M_4 und M_5 neben dem belasteten Felde zu ermitteln sind. Für die anschließenden unbelasteten Balkenfelder wird dann die graphische Darstellung der Bieugsmomente durch die festen Punkte N und O bestimmt.

Aus der Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{\epsilon J}$$

geht hervor, daß die *Wendepunkte* dieser Kurve dort liegen, wo das Bieugsmoment M sein Vorzeichen wechselt, wo also

$$M = 0$$

ist. Die Abszissen der Wendepunkte werden demnach *links* von dem belasteten Balkenfelde durch die festen Punkte N und *rechts* von diesem Felde durch die festen Punkte O bestimmt.

Abb. 29

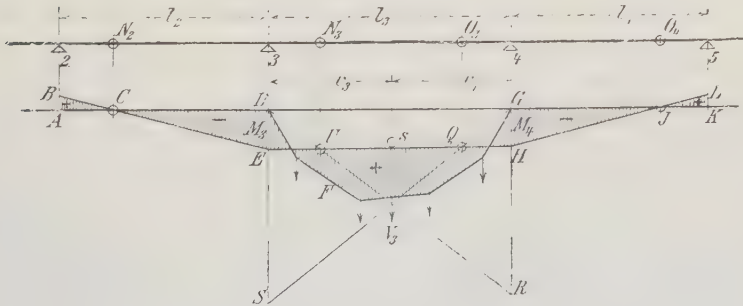


Abb. 30

10. Die Bestimmung der beiden Stützenmomente neben dem belasteten Balkenfelde. Von dem in Abb. 29 dargestellten kontinuierlichen Balken konstanten Querschnittes ist nur das *dritte* Feld belastet. Das Polygon DFG zeigt die gegebenen positiven Bieugsmomente M . Zu bestimmen sind die beiden unbekannten Stützenmomente M_3 und M_4 . Die festen Punkte N, O

der übrigen Balkenfelder, die nach den Regeln des Abschnittes 9 bestimmt worden sind, ergeben in bekannter Weise die Biegemomente der unbelasteten Felder. Wir bezeichnen wieder mit V_3 die Größe der positiven Momentenfläche DFG und die Abstände ihres Schwerpunktes s von den Loten der Stützen 3 und 4 mit v_3 und v_4 .

Die Gleichungen 12) für die Felder 2, 3 und 3, 4 lauten dann:

$$0 = \frac{V_3 v_4}{l_3} - \frac{M_2 l_2}{6} - \frac{M_3 (l_2 + l_3)}{3} - \frac{M_4 l_3}{6}, \quad (16)$$

$$0 = \frac{V_3 v_3}{l_3} - \frac{M_3 l_3}{6} - \frac{M_4 (l_3 + l_4)}{3} - \frac{M_5 l_4}{6}. \quad (17)$$

Wäre das dritte Balkenfeld unbelastet, dagegen eins der folgenden Felder, z. B. das vierte Feld, so belastet, daß die Darstellung der Biegemomente $ABCDE$ innerhalb des *zweiten* Feldes unverändert bliebe, so würden die Biegemomente innerhalb des unbelasteten dritten Feldes durch die negative Fläche DEU und die positive Fläche UHR dargestellt werden. Die Gleichung 12) ergibt für diesen Belastungsfall die Bedingung:

$$0 = -\frac{M_2 l_2}{6} - \frac{M_3 (l_2 + l_3)}{3} + \frac{l_3}{6} HR.$$

In Verbindung mit Gleichung 16) folgt hieraus:

$$0 = \frac{V_3 v_4}{l_3} - \frac{l_3}{6} (M_4 + HR)$$

oder

$$GR = \frac{6 V_3 v_4}{l_3^2}. \quad (18)$$

Eine ähnliche Betrachtung, bei der man voraussetzt, das dritte Feld sei unbelastet und eins der *links* liegenden Felder 1 oder 2 werde so belastet, daß die Darstellung $GHJLK$ der Biegemomente im vierten Felde unverändert bleibt, führt in Verbindung mit Gleichung 17) zu der Bedingung (Abb. 30):

$$DS = \frac{6 V_3 v_3}{l_3^2}. \quad (19)$$

Werden die beiden durch die Gleichungen 18) und 19) bestimmten Strecken GR und DS aufgetragen, so bestimmen der Schnittpunkt U der Geraden DR mit dem Lot von N_3 und der Schnittpunkt Q der Geraden GS mit dem Lot von O_3 die Lage der Geraden $EUQH$ und hierdurch die Größen der Stützenmomente:

$$M_3 = DE \quad \text{und} \quad M_4 = GH.$$

Besonders einfach gestaltet sich die Konstruktion, wenn die Belastung $p_3 l_3$ gleichmäßig über das Feld verteilt ist (Abb. 31).

Dann ist die Fläche V_3 ein Parabelsegment DFG von der Größe

$$V_3 = \frac{2}{3} l_3 \cdot \frac{p_3 l_3^2}{8} = \frac{p_3 l_3^3}{12}$$

$$v_3 = v_4 = \frac{1}{2} l_3$$

und

$$GR = DS = \frac{3V_3}{l_3} = 2TF.$$

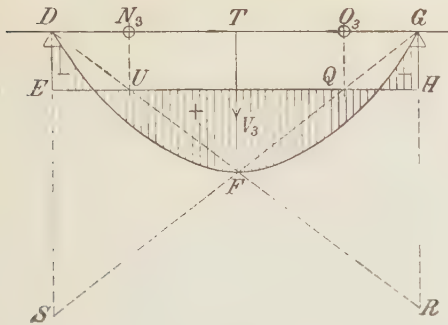


Abb. 31.

Die Geraden DR und GS schneiden sich also im Scheitel F der Parabel DFG .

II. Die von einer Einzellast erzeugten Biegemomente eines kontinuierlichen Balkens von konstantem Querschnitt. Die Abb. 32 zeigt einen Balken auf vier Stützen

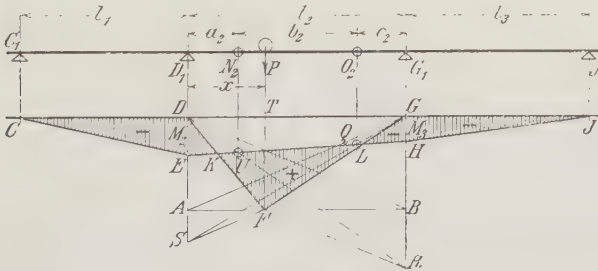


Abb. 32.

von gleicher Höhe. Nur das zweite Feld ist belastet, und zwar mit einer Last P , deren Abstand von der zweiten Stütze mit x bezeichnet ist. Die positive Belastungsfläche V_2 des zweiten Feldes ist daher ein Dreieck von der Höhe

$$TF = \frac{Px(l_2 - x)}{l_2}$$

und der Größe

$$DFG = V_2 = \frac{Px(l_2 - x)}{2}.$$

Der Schwerpunkt dieses Dreiecks hat von den Loten der zweiten und dritten Stütze die Abstände:

$$v_2 = \frac{l_2 + x}{3} \quad \text{und} \quad v_3 = \frac{2l_2 - x}{3}.$$

Die Strecken DS und GR (Abb. 30 und 32) haben daher in diesem Falle die Größen:

$$GR = \frac{6 V_2 v_3}{l_2^2} = \frac{Px(l_2 - x)}{l_2} \frac{2l_2 - x}{l_2} = TF \left(1 + \frac{l_2 - x}{l_2} \right) \quad (20)$$

$$DS = \frac{6 V_2 v_2}{l_2^2} = \frac{Px(l_2 - x)}{l_2} \frac{l_2 + x}{l_2} = TF \left(1 + \frac{x}{l_2} \right). \quad (21)$$

Man zieht also, um die Punkte R und S auf geometrischem Wege zu bestimmen (Abb. 32):

$$AFB \parallel DG$$

$$FR \parallel DB$$

und

$$FS \parallel GA.$$

Die Gerade EH , die auf den Stützenordinaten die Stützenmomente

$$DE = M_2 \quad \text{und} \quad GH = M_3$$

abschneidet, wird dann wie im vorigen Abschnitt bestimmt durch den Schnittpunkt U der Geraden DR mit dem Lot von N_2 und den Schnittpunkt Q der Geraden GS mit dem Lot von O_2 . Die graphische Darstellung der von der Einzellast P erzeugten Biegemomente wird demnach durch das Polygon $CDKFLGJHLKEC$ gebildet. Die Ordinaten der Flächen $CDKE$ und $JGLH$ bestimmen negative Biegemomente, während die Ordinaten der Fläche KFL positive Biegemomente darstellen. Die Wendepunkte der elastischen Linie liegen auf den Loten der Punkte K und L .

Es ist zu beachten, daß für alle Lagen der Last P innerhalb des zweiten Feldes die Biegemomente der Strecke N_2O_2 zwischen den beiden festen Punkten N_2 und O_2 stets *positiv* sind.

Wenn die beschriebene Konstruktion für mehrere Lagen der Last P auszuführen ist, so benutzt man die Parabel DFG als geometrischen Ort des Punktes F . Der Scheitel dieser Parabel hat die Abszisse $\frac{1}{2} l_2$ und die Ordinate $P \frac{l_2}{4}$.

Um die beiden Stützenmomente *durch Rechnung* zu bestimmen, bezeichnen wir die drei Strecken (Abb. 32) D_1N_2 , N_2O_2 , O_2G_1 mit a_2 , b_2 , c_2 und beachten, daß nach den Gleichungen 20) und 21)

$$GR = GH + HR = \frac{Px(l_2 - x)(2l_2 - x)}{l_2^2} = M_3 + M_2 \frac{b_2 + c_2}{a_2}$$

$$DS = DE + ES = \frac{Px(l_2 - x)(l_2 + x)}{l_2^2} = M_2 + M_3 \frac{a_2 + b_2}{c_2}$$

ist, woraus folgt:

$$M_2 = \frac{P a_2}{l_2^2 b_2} x (l_2 - x) (2 l_2 - 3 c_2 - x) \quad (22)$$

$$M_3 = \frac{P c_2}{l_2^2 b_2} x (l_2 - x) (l_2 - 3 a_2 + x). \quad (23)$$

Nach diesen Gleichungen läßt sich die Beziehung zwischen jedem der beiden Stützenmomente M_2 , M_3 und der Abszisse x der Last P ,

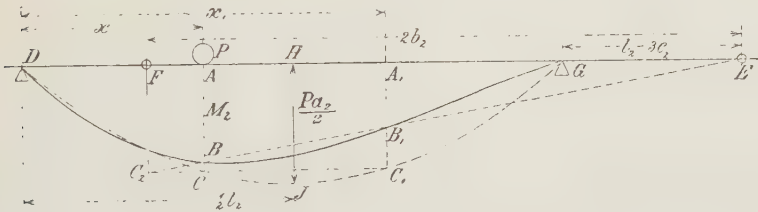


Abb. 33.

welche die beiden Momente erzeugt, graphisch darstellen. Abb. 33 gibt die Darstellung von M_2 . D und G sind die Stützen 2, 3, und A ist der mit P belastete Punkt; also ist

$$DG = l_2 \quad \text{und} \quad DA = x.$$

Um für jede Abszisse x durch die Ordinate AB das Biegemoment

$$AB = M_2 = \frac{Pa_2}{l_2^2 b_2} x(l_2 - x)(2l_2 - 3c_2 - x)$$

zu bestimmen, ist aufzutragen:

$$GE = l_2 - 3c_2, \quad EF = 2b_2, \quad DH = \frac{1}{2} l_2, \quad HJ = \frac{Pa_2}{2}.$$

Es ist dann die Parabel DJG zu bilden, deren Scheitel mit dem Punkte J zusammenfällt. Durch den Endpunkt C der Parabelordinate AC zieht man die Gerade

$$C_1 C C_2 \parallel DG,$$

welche das Lot von F in C_2 schneidet. Die Gerade EBC_2 bestimmt dann den Endpunkt B der Ordinate AB ; denn es ist

$$AC = FC_2 = \frac{Pa_2}{2} \frac{4x(l_2 - x)}{l_2^2}$$

und

$$AB = FC_2 \frac{EA}{EF} = FC_2 \frac{l_2 + (l_2 - 3c_2) - x}{2b_2},$$

folglich

$$AB = \frac{2Pa_2 x (l_2 - x)}{l_2^2} \frac{2l_2 - 3c_2 - x}{2b_2} = M_2.$$

Der geometrische Ort DBB_1G des Punktes B bildet die Einflußlinie des Stützenmomentes M_2 innerhalb des zweiten Balkenfeldes; denn ihre Ordinate AB bestimmt für jede Lage A der Last P den Einfluß dieser Last auf die Bildung des genannten Momentes.

Auf der Geraden $EB C_2$ liegt, wie man leicht erkennt, noch ein zweiter Punkt B_1 der Einflußlinie, nämlich auf der Parabelordinate

$$A_1 C_1 = AC = FC_2.$$

In ganz ähnlicher Weise entsteht die Einflußlinie DJG (Abb. 34) des Stützenmomentes M_3 nach Anleitung der Gleichung 23). Im vorliegenden Bei-

spiel stehen die vier Stützen C_1, D_1, G_1, J_1 (Abbildung 32) symmetrisch zur Balkenmitte. Daher sind die beiden

Einflußlinien DBG und DJG (Abb. 34) kongruent und symmetrisch gegen

die Balkenmitte. Mit Hilfe dieser beiden Kurven und der Parabel DFG von der Scheitelhöhe

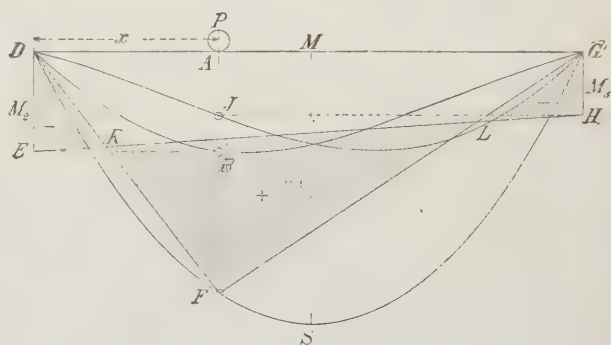


Abb. 34.

$$MS = \frac{1}{4} Pl_2$$

bildet man die graphische Darstellung der Biegemomente für jede Lage A der Last P innerhalb des zweiten Feldes in folgender Weise: Man zieht die Parabelordinate des Punktes A

$$AF = P \frac{x(l_2 - x)}{l_2},$$

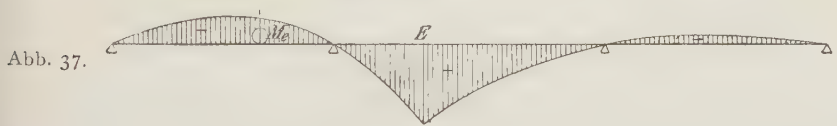
trägt

$$M_2 = DE = AB$$

$$M_3 = GH = AJ$$

auf, und bestimmt hierdurch die ebenso wie in Abb. 32 bezeichnete Momentenfläche $EDKFLGH$.

12. Die Einflußlinien der Biegemomente eines kontinuierlichen Balkens von konstantem Querschnitt. Um eine vollständige Uebersicht über die Entstehung der Biegemomente zu gewinnen, zerlegt man jedes Balkenfeld durch Querschnitte in sechs bis acht gleiche Teile, bringt nacheinander über jedem der Querschnitte die Einzellast P an und bildet für diese Lastlagen nach Anleitung der Abb. 32 oder 34 die graphischen Darstellungen der Biegemomente. Die Einflußlinie des Biege-



momentes M_e eines bestimmten Balkenquerschnittes E (Abb. 37) entsteht dann, indem man in jeder Lage der Last P das im Balkenquerschnitt E erzeugte Biegemoment M_e als Ordinate aufträgt. Auf diesem Wege ist beispielsweise in Abb. 35 die Einflußlinie für den Balkenquerschnitt D über der zweiten Stütze, also für das Stützenmoment M_2 , ferner in Abb. 36 für den Querschnitt B und in Abb. 37 für den Querschnitt E gebildet worden.

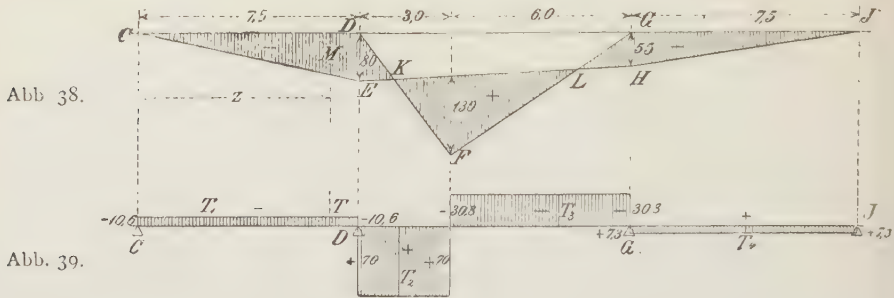
Ein anderes Verfahren wird in der Abhandlung XII, Abschnitt 17 beschrieben.

13. Die von einer Einzellast P erzeugten Schubkräfte T der Querschnitte eines kontinuierlichen Balkens. Wenn für einen Belastungsfall durch die graphische Darstellung die Beziehung zwischen dem Biegemoment M und der Abszisse z des Balkenquerschnittes gegeben ist, so bestimmt man nach Gleichung 21) der Abhandlung VII die Schubkraft oder Querkraft des Querschnittes durch die Formel

$$T = \frac{dM}{dz}. \quad (24)$$

Die Größe T trägt das *positive* Vorzeichen, wenn auf den Balkenteil *links* vom Querschnitt eine nach *oben* zeigende Resultante wirkt.

Wir wählen als Beispiel die in den Abb. 32 und 38 gegebene Darstellung der von einer Einzellast P erzeugten Biegemomente. Die Maße sind in die Zeichnungen eingeschrieben, und zwar die Längen in Meter, die Biegemomente in Meter-Tonnen und die



in Abb. 39 dargestellten Schubkräfte in Tonnen. Für das erste Balkenfeld CD hat T die konstante Größe

$$T_1 = \frac{dM}{dz} = -\frac{DE}{CD} = -\frac{80}{7,5} = -10,6 \text{ t.}$$

Für den Abschnitt DF des zweiten Balkenfeldes hat die Schubkraft den konstanten positiven Wert:

$$T_2 = +\frac{130 + 80}{3,0} = +70 \text{ t,}$$

ferner für die Querschnitte des zweiten Abschnittes FG den negativen Wert:

$$T_3 = -\frac{130 + 55}{6,0} = -30,8 \text{ t,}$$

und für die Querschnitte des dritten Balkenfeldes GJ ist

$$T_4 = +\frac{55}{7,5} = +7,3 \text{ t.}$$

Die *Einflußlinie* der Schubkraft eines bestimmten Balkenquerschnittes kann auf dem im Abschnitt 12 beschriebenen Wege ge-

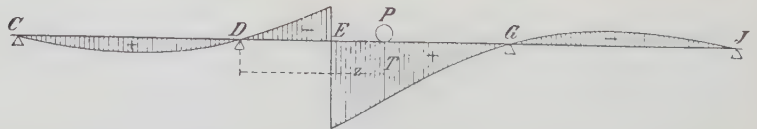


Abb. 40.

bildet werden. Beispielsweise ergibt sich für den Querschnitt E des zweiten Balkenfeldes die in Abb. 40 dargestellte Einflußlinie. Die

zugehörigen Darstellungen der Schubkräfte für eine Reihe von Lagen der Last P wurden, da sie nichts Bemerkenswertes bieten, hier fortgelassen.

14. Graphische Bestimmung der Bieugungsmomente eines kontinuierlichen Balkens von konstantem Querschnitt bei gegebener Belastung und Stützenlage. Das im folgenden zu beschreibende Verfahren soll an dem in den Abb. 41 bis 46 dargestellten Beispiel erläutert werden. Der Längenmaßstab der Abszissen ist 1 : 100. Die Horizontalkraft H der als Seilkurve anzusehenden elastischen Linie wurde gleich $\frac{1}{100}$ gewählt; daher sind die Ordinaten der elastischen Linie sowie die gegebenen Ordinaten y_2, y_3 der Mittelstützen in bezug auf die wagerechte Achse $B_1 B_4$ der Endstützen in *natürlicher* GröÙe dargestellt.

Wie im Abschnitt 8 wird die von der Ordinate

$$k = \frac{M}{\varepsilon J}$$

beschriebene Belastungsfläche der elastischen Linie für jedes Balkenfeld zerlegt in die gegebene positive Fläche V und die beiden unbekannten negativen Dreiecksflächen U und W . Die Lasten U und W zerlegen die Länge l eines jeden Balkenfeldes in drei gleiche Teile $\frac{l}{3}$. Für das erste Balkenfeld ist

$$U_1 = 0, \quad W_1 = -\frac{M_2 l_1}{2\varepsilon J},$$

für das zweite:

$$U_2 = -\frac{M_2 l_2}{2\varepsilon J}, \quad W_2 = -\frac{M_3 l_2}{2\varepsilon J}$$

und für das dritte Feld

$$U_3 = -\frac{M_3 l_3}{2\varepsilon J}, \quad W_3 = 0.$$

Die Darstellung der gegebenen Belastungsflächen V ist fortgelassen.

Nach Abschnitt 2 können die Ordinaten y_2, y_3 der Mittelstützen angesehen werden als die Darstellung der Bieugungsmomente, welche in den Balkenquerschnitten über den Mittelstützen 2, 3 entstehen, wenn der Balken nur in den Endstützen 1, 4 gestützt und mit den Lasten $V_1, W_1, U_2, V_2, W_2, U_3, V_3$ belastet wird, mit anderen Worten: das durch die beiden Endstützen B_1, B_4 gelegte

Seilpolygon der Lasten U, V, W muß auch durch die Mittelstützen B_2, B_3 gehen. Zeichnet man (Abb. 41) *gesondert voneinander* das Seilpolygon $B_1 C_2 C_3 B_4$ der *gegebenen* positiven Lasten V_1, V_2, V_3

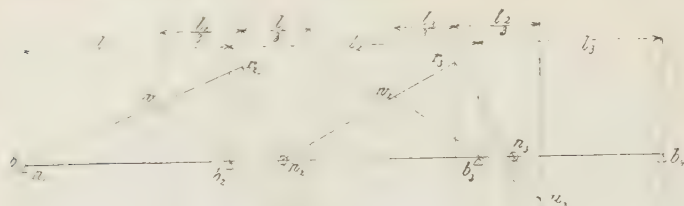


Abb. 44.

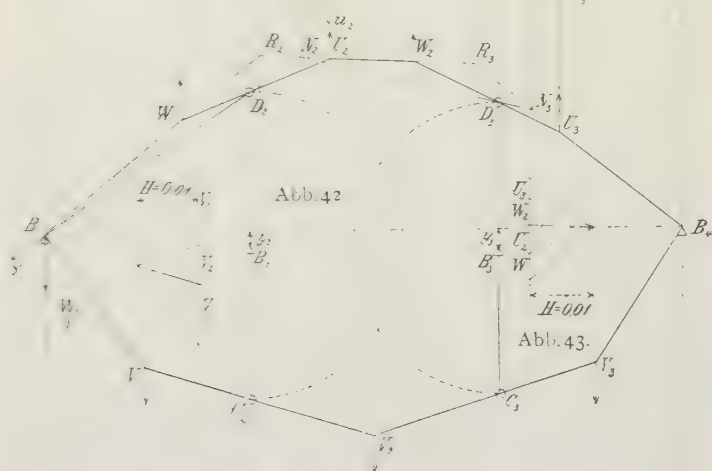


Abb. 41.

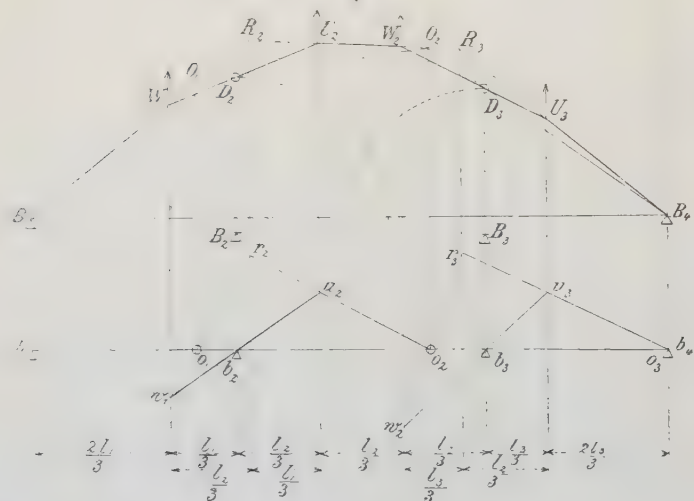


Abb. 45.

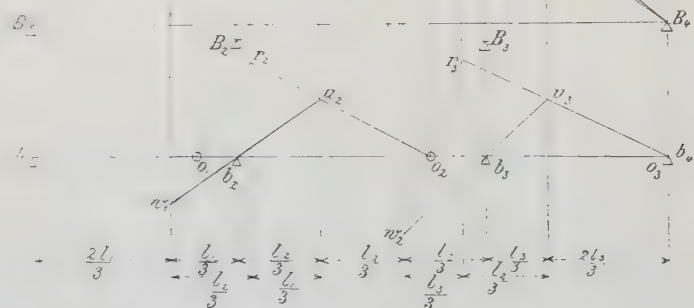


Abb. 46.

und das Seilpolygon $B_1 D_2 D_3 B_4$ der unbekannten negativen Lasten W_1, U_2, W_2, U_3 , so müssen demnach die Ordinaten der

beiden Polygone in den Loten der Mittelstützen die Bedingungen erfüllen:

$$B_2 D_2 = -B_2 C_2, \quad B_3 D_3 = -B_3 C_3.$$

Hierdurch sind die Punkte D_2, D_3 des unbekannten Seilpolygons bestimmt. Die drei ersten Seiten $B_1 W_1, W_1 U_2, U_2 W_2$ dieses Polygons haben folgende drei Bedingungen zu erfüllen:

1. Die Seiten $B_1 W_1, W_1 U_2$ gehen durch die gegebenen Punkte B_1, D_2 .

2. Die beiden Seiten $B_1 W_1, U_2 W_2$ schneiden sich auf der Resultanten R_2 der beiden Lasten W_1, U_2 . Die Lage von R_2 ist bestimmt durch das Verhältnis:

$$W_1 : U_2 = l_1 : l_2 = \frac{l_1}{3} : \frac{l_2}{3}.$$

Daher ist der Abstand zwischen W_1 und R_2 gleich $\frac{1}{3} l_2$, und der zwischen R_2 und U_2 gleich $\frac{1}{3} l_1$.

3. Die Gerade $B_1 D_2$ schneidet die Polygonseite $U_2 W_2$ in einem festen Punkte N_2 ; denn fügt man zu den Lasten des Seilpolygons im Punkte B_1 noch eine nach unten zeigende Last von der Größe $\frac{1}{3} W_1$ hinzu, so fällt die neue Polygonseite S_0 mit der festen Geraden $B_1 D_2$ zusammen, weil die Resultante der beiden Lasten $+\frac{1}{3} W_1$ und $-W_1$ mit dem Lot des Punktes D_2 zusammenfällt. Die durch den Punkt N_2 gehende Resultante der drei Lasten $+\frac{1}{3} W_1, -W_1, -U_2$ hat eine *feste* Lage, weil das Größenverhältnis dieser drei Lasten:

$$+\frac{1}{3} W_1 : -W_1 : -U_2 = +\frac{l_1}{3} : -l_1 : -l_2$$

unveränderlich ist. Man bestimmt den festen Punkt N_2 , indem man der Geraden $B_1 W_1 R_2$ zunächst eine beliebige Lage gibt. Man zieht darauf die Geraden $W_1 D_2 U_2, R_2 U_2$ und bestimmt N_2 durch die Gerade $B_1 D_2 N_2$. Um die Zeichnung des Seilpolygons nicht mit Linien zu überladen, ist es vorzuziehen, die Projektion n_2 des festen Punktes N_2 auf die Horizontale $b_1 b_4$ in einer Hilfsabbildung 44 zu bestimmen. Man gibt also der durch b_1 gelegten Geraden $b_1 w_1 r_2$ eine beliebige Richtung und zieht darauf die beiden Geraden $w_1 b_2 u_2$ und $r_2 n_2 u_2$.

Von den drei Polygonseiten $U_2 W_2$, $W_2 U_3$, $U_3 B_4$ (Abb. 41) sind folgende Bedingungen zu erfüllen:

1. Die Seiten $U_2 W_2$ und $W_2 U_3$ gehen durch die gegebenen Punkte N_2 und D_3 .

2. Die beiden Seiten $U_2 W_2$ und $U_3 B_4$ schneiden sich auf der Resultanten R_3 der beiden Lasten W_2 , U_3 . Das Verhältnis

$$W_2 : U_3 = l_2 : l_3$$

bestimmt die Lage von R_3 .

3. Die Gerade $N_2 D_3$ schneidet die Polygonseite $U_3 B_4$ in einem festen Punkt N_3 . Um in Abb. 44 die Projektion n_3 des Punktes N_3 zu bestimmen, zieht man durch n_2 irgend eine Gerade $n_2 w_2 r_3$ und darauf die Geraden $w_2 b_3 u_3$ und $r_3 n_3 u_3$.

Das Seilpolygon $B_1 W_1 U_2 W_2 U_3 B_4$ (Abb. 41) entsteht demnach auf folgendem Wege. Man bestimmt zunächst die Punkte n_2 , n_3 durch Abb. 44, darauf die Punkte N_2 , N_3 durch den Linienzug $B_1 D_2 N_2$, $N_2 D_3 N_3$. Dann ist die Polygonseite

$B_4 U_3 N_3 R_3$	bestimmt durch die Punkte	B_4 , N_3
$U_3 D_3 W_2$	„ „ „ „	U_3 , D_3
$R_3 W_2 U_2 N_2 R_2$	„ „ „ „	R_3 , W_2 , N_2
$U_2 D_2 W_1$	„ „ „ „	U_2 , D_2
$R_2 W_1 B_1$	„ „ „ „	R_2 , W_1 , B_1 .

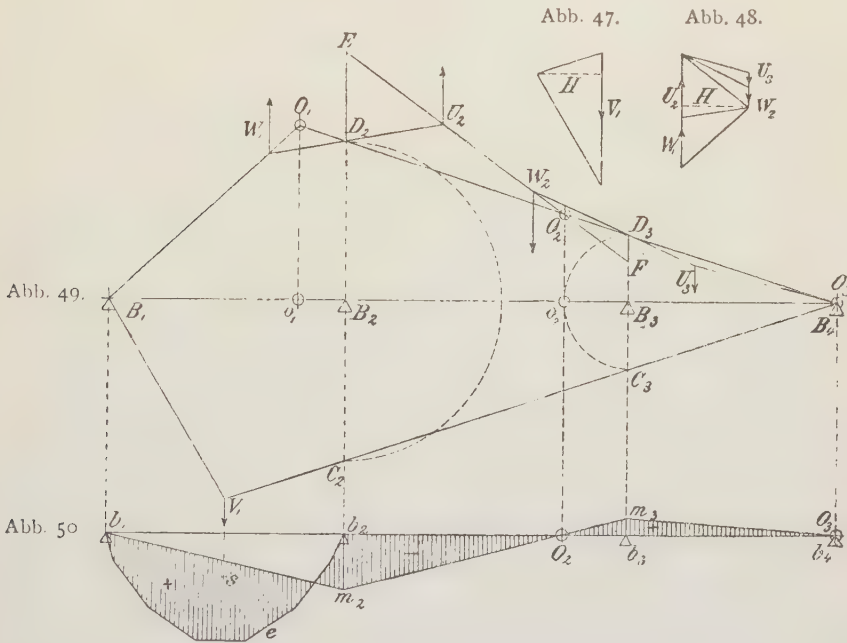
Man gewinnt also Proben für die Richtigkeit und Genauigkeit der Zeichnung aus den Bedingungen, daß die Punkte R_3 , W_2 , N_2 und R_2 , W_1 , B_1 auf geraden Linien liegen müssen.

Die Lasten W_1 , U_2 , W_2 , U_3 und dadurch die unbekannten Stützenmomente M_2 , M_3 werden durch den Kräfteplan des Seilpolygons in Abb. 43 bestimmt. Die Horizontalkraft H ist, wie bereits oben angegeben wurde, gleich der Zahl $\frac{1}{100}$.

Das Seilpolygon der Lasten U , W kann ein zweites Mal in entgegengesetzter Reihenfolge der Seiten gebildet werden, indem man in Abb. 45 von der letzten Stütze B_4 beginnend, genau wie oben beschrieben wurde, zunächst die festen Punkte o_2 , o_1 in Abb. 46 und darauf in Abb. 45 durch den Linienzug $B_4 D_3 O_2$, $O_2 D_2 O_1$ die festen Punkte O_2 und O_1 bestimmt. Alsdann kann das Polygon der Seiten $B_1 W_1 O_1 R_2$, $W_1 D_2 U_2$, $R_2 U_2 W_2 O_2 R_3$, $W_2 D_3 U_3$, $R_3 U_3 B_4$ gebildet werden. Auf diesem Wege gewinnt man weitere Proben für die Genauigkeit der Zeichnung.

15. Anwendung auf den Fall, in dem nur ein Balkenfeld belastet ist, und alle Stützen in einer Horizontalen

liegen. Der in Abb. 49 dargestellte kontinuierliche Balken hat dieselben Stützweiten l_1, l_2, l_3 wie der in Abb. 46. Dadurch ist die Lage der festen Punkte o_1, o_2 gegeben. Der Balken ist nur in *einem*, und zwar im *ersten* Felde belastet. Die Momentenfläche $b_1 e b_2$ (Abb. 50) und deren Schwerpunkt s bestimmen Größe und Lage der positiven Last V_1 . Die Lasten V_2 und V_3 sind gleich null, weil das zweite und das dritte Balkenfeld unbelastet sind. Das Seil-



polygon $B_1 V_1 B_4$ der Last V_1 wurde mittels des Kräfteplans Abb. 47 gebildet, in dem

$$V_1 = \frac{\text{Fläche } b_1 e b_2}{\varepsilon J}$$

und

$$H = \frac{1}{100}$$

aufzutragen war. Da die Abszissen im Maßstabe 1 : 100 dargestellt sind, so erhalten die Ordinaten der elastischen Linie die natürliche Größe. Die Stützen B_1, B_2, B_3, B_4 (Abb. 49) liegen auf einer *Horizontalen*, folglich die Punkte D_2, D_3, B_4 auf einer *Geraden*. Bildet man nun nach Anleitung des vorigen Abschnittes das Seilpolygon der Lasten W_1, U_2, W_2, U_3 , so ergibt sich, daß auch die Punkte $O_1,$

O_2, O_3 auf der Geraden $D_2 D_3 B_4$ liegen. Infolgedessen besteht eine einfache Beziehung zwischen den beiden Stützenmomenten eines jeden Feldes des *unbelasteten* Balkenteils $B_2 B_3 B_4$, z. B. zwischen den Stützenmomenten M_2, M_3 des unbelasteten zweiten Feldes. Da die beiden Lasten U_2, W_2 die Feldweite l_2 in drei gleiche Teile zerlegen, so ist nach (II, 7) in Abb. 49:

$$U_2 \frac{1}{3} l_2 = - H \cdot D_2 E$$

$$W_2 \frac{1}{3} l_2 = + H \cdot D_3 F,$$

folglich

$$U_2 : W_2 = - M_2 : + M_3 = D_2 E : D_3 F$$

oder

$$- M_2 : + M_3 = b_2 o_2 : o_2 b_3,$$

d. h. die gerade Linie $m_2 m_3$, die in Abb. 50 die Biegemomente des zweiten Balkenfeldes darstellt, geht durch den festen Punkt o_2 dieses Feldes. Die gleiche Bedingung gilt für jedes nach rechts folgende Balkenfeld. Im vorliegenden Beispiele ist das dritte Feld bereits das letzte, und daher fällt der feste Punkt o_3 mit der Endstütze b_4 zusammen. Wenn *links* von dem *belasteten* Balkenfelde *unbelastete* Felder liegen, so haben in diesen Feldern die festen Punkte n die oben bezeichnete Eigenschaft.

Die in der vorstehenden Betrachtung verwendeten festen Punkte n und o stimmen demnach überein mit den Punkten N und O , die im Abschnitt 9 auf dem Wege der Rechnung bestimmt wurden.

Der Kräfteplan Abb. 48 der Lasten U und W kommt nur zur Anwendung bei der Bestimmung der Stützenmomente neben dem belasteten Felde, weil der übrige Teil der graphischen Darstellung der Biegemomente durch die festen Punkte n, o bestimmt wird. Im vorliegenden Beispiel war nur

$$M_2 = - \frac{2 W_1 \varepsilon J}{l_1}$$

zu berechnen, und W_1 aus Abb. 48 zu entnehmen.

Die Ausdehnung des in den Abschnitten 14 und 15 beschriebenen graphischen Verfahrens auf die Berechnung der kontinuierlichen Balken von *veränderlichem* Querschnitt bietet zwar keine besonderen Schwierigkeiten, das Verfahren wird jedoch wesentlich umständlicher infolge der weniger einfachen Bestimmung der Lasten U, V, W nach Größe und Lage. Unseres Erachtens verdient

bei der Berechnung des kontinuierlichen Balkens von *veränderlichem* Querschnitt das im Abschnitt 6 entwickelte Hilfsmittel den Vorzug.

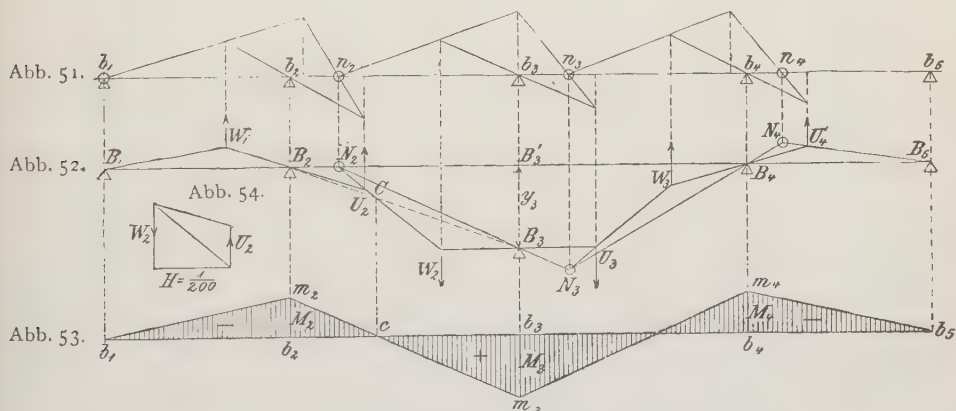
16. Einfluß der Höhenlage einer Stütze. Die Abb. 52 bezieht sich auf einen kontinuierlichen Balken konstanten Querschnittes auf fünf Stützen. Die vier Stützen B_1, B_2, B_4, B_5 liegen auf einer Horizontalen, die Stütze B_3 dagegen um das gegebene Maß

$$B_3 B_3' = y_3$$

unter derselben. Die Stützweiten sind im Maßstabe 1:200 dargestellt, die Ordinate y_3 zeigt ihre natürliche Größe. Daher ist die Horizontalkraft der elastischen Linie:

$$H = \frac{1}{200}.$$

Wenn der *gewichtslose* und *unbelastete* Balken die fünf Stützen berührt, so entstehen die in Abb. 53 dargestellten Biegemomente, welche nach Anleitung des Abschnittes 14 in den Abb. 51 und 52 in folgender Weise bestimmt worden sind.



Alle Lasten V sind gleich null; das Polygon der Lasten U, W muß daher durch die fünf Stützpunkte gehen. Um dieses Polygon zu bilden, wurden zunächst in Abb. 51 die festen Punkte n_2, n_3, n_4 bestimmt. Daraus ergaben sich die festen Punkte N_2, N_3, N_4 in Abb. 52 durch den Linienzug $B_1 B_2 N_2, N_2 B_3 N_3, N_3 B_4 N_4$. Von den sieben Seiten des Polygons der Lasten U, W sind hierdurch je *zwei* Punkte bestimmt, wenn sie in dieser Reihenfolge aufgetragen werden: $B_5 U_4 N_4, U_4 B_4 W_3, W_3 U_3 N_3, U_3 B_3 W_2, W_2 U_2 N_2, U_2 B_2 W_1, W_1 B_1$. Will man die Zeichnung prüfen, so kann man wie in den vorigen Abschnitten die festen Punkte o und O zu Hilfe nehmen.

Der Kräfteplan Abb. 54 ergibt die beiden Lasten

$$U_2 = -\frac{M_2 l_2}{2\varepsilon J}, \quad W_2 = +\frac{M_3 l_2}{2\varepsilon J}$$

und hierdurch die beiden Stützenmomente M_2 , M_3 . Wegen der symmetrischen Stützenlage ist im vorliegenden Beispiel:

$$M_4 = M_2.$$

Die Gerade $B_2 B_3$ schneidet die Polygonseite $U_2 W_2$ im Punkte C . Da die beiden Lasten U_2 , W_2 die Stützweite l_2 in drei gleiche Teile zerlegen, so ist

$$U_2 : W_2 = -M_2 : +M_3 = B_2 C : C B_3.$$

Man gewinnt demnach eine Probe für die Richtigkeit der Zeichnung aus der Bedingung, daß der Punkt c in Abb. 53 in dem Lot des Punktes C liegen muß.

17. Literarische Notizen. Der Inhalt der vorstehenden Abhandlung ist im wesentlichen dem Aufsätze: *Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen*; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1868, S. 19 entnommen. Außer der Behandlung der elastischen Linie als Seilkurve enthält dieser Aufsatz die *erste Anwendung der Einflußkurven*. Es ist hierbei zu bemerken, daß fast gleichzeitig und unabhängig hiervon *Winkler* von den Einflußlinien Gebrauch machte in den Mitteilungen des Architekten- und Ingenieur-Vereins für Böhmen 1868, S. 6.

Die Abschnitte 4 und 5 entstammen dem Aufsätze: *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1875, S. 28, Gleichungen 20) und 21).

Die erste graphostatische Behandlung der Theorie des kontinuierlichen Balkens findet sich bei *Culmann*, *Graphische Statik*; Zürich 1866, woselbst die wichtigsten Teile der Aufgabe jedoch noch auf analytischem Wege gelöst werden. Von späteren Bearbeitungen sind zu nennen:

W. Ritter, *Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den kontinuierlichen Balken*; Zürich 1871.

Lippich, *Theorie des kontinuierlichen Balkens konstanten Querschnittes*. Elementare Darstellung der von *Clapeyron* und *Mohr* begründeten analytischen und graphischen Methoden und ihres Zusammenhanges; Försters Bauzeitung 1871.

Winkler, *Vorträge über Brückenbau*; Wien 1875.

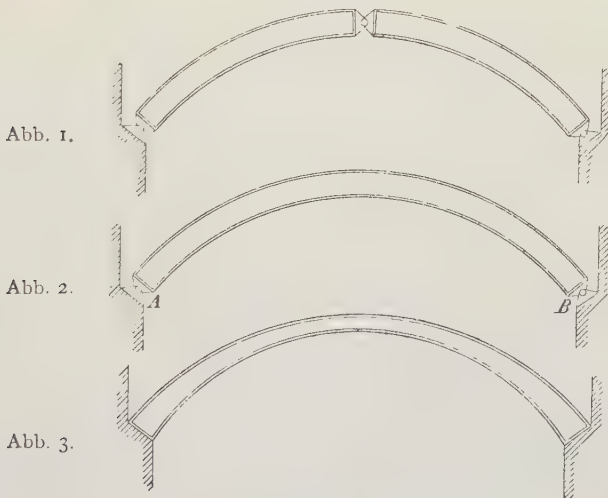
M. Levy, *La Statique Graphique*, II^e Partie; Paris 1886.

Weitere Literaturangaben finden sich im *Handbuch der Ingenieurwissenschaften*, Bd. II: Der Brückenbau, 3. Auflage, S. 364.

Abhandlung XI.

Der vollwandige Bogenträger mit Kämpfergelenken.

1. Einleitende Bemerkungen. Eiserne vollwandige Bogenträger werden bekanntlich in drei verschiedenen Formen ausgeführt (Abb. 1 bis 3). In der ersten Form besteht der Träger aus zwei durch ein Gelenk miteinander verbundenen Teilen, die auch an den Kämpfern gegen gelenkförmige Auflager sich stützen. Diese An-



ordnung gewährt den großen Vorteil, daß die Auflagerkräfte auf statischem Wege aus den gegebenen Belastungen mit voller Bestimmtheit sich berechnen lassen, und daß folglich auch die inneren Kräfte von den Änderungen der Temperatur und der Stützenlage nicht beeinflußt werden. Von allen Ingenieuren, welche die genannten Eigenschaften als wesentliche Erfordernisse einer guten Eisenkonstruktion anerkennen, wird solchen *Bogenträgern mit drei Gelenken* der Vorzug gegeben.

Die Herstellung gelenkförmiger Verbindungen von großen Abmessungen, insbesondere eines Scheitelgelenkes, bietet jedoch nicht geringe konstruktive Schwierigkeiten, und aus diesem Grunde werden oft, selbst bei kleineren Trägern, nur an den Kämpfern Gelenke angebracht. Die vier Komponenten der beiden Auflagerkräfte eines solchen Trägers werden durch die drei Gleichgewichtsbedingungen *nicht* bestimmt. Es muß daher die Biegungslehre zu Hilfe genommen werden, um aus der Bedingung, daß die elastische Formänderung des Trägers eine Längenänderung der Bogensehne AB *nicht* zur Folge habe, den Horizontalschub zu bestimmen. Dieser Rechnung liegen also die ungenauen Voraussetzungen der Elastizitätslehre und die ebenfalls ungenaue Annahme zugrunde, daß *im spannungslosen Zustande* des Trägers die Länge der Bogensehne AB mit der Spannweite AB der Auflager *genau* sich deckt. Die Berechnung der inneren Kräfte eines solchen *Bogenträgers mit zwei Gelenken* wird demnach eine etwa ebenso große oder vielmehr geringe Zuverlässigkeit besitzen wie die Berechnung eines kontinuierlichen Balkens.

Noch unsicherer wird die Rechnung, wenn auch die Kämpfergelenke fehlen. Trotzdem gibt man aus dem angeführten Grunde, namentlich bei großen Fachwerken, dieser dritten Form nicht selten den Vorzug. Die Berechnung solcher *Bogenträger ohne Gelenke* wird in den Abhandlungen XII und XIII beschrieben.

Die Berechnung der vollwandigen Bogenträger mit *zwei* Gelenken gehört in das Anwendungsgebiet der graphischen Statik, weil das graphische Verfahren einfacher und bequemer sich ausführen läßt als die Rechnung.

2. Gang der Untersuchung. Wir gehen aus von der Vorstellung, der gewichtslose Träger, von dem in Abb. 4 nur die Bogenachse dargestellt ist, sei im *festen* Kämpfergelenk A gelagert, während das Gelenk B auf wagerechter Auflagerbahn frei sich verschieben kann. Wir belasten den Bogen in irgend einem Punkte C_1 von der Abszisse x mit einem Gewichte

$$K = 1 \text{ kg}$$

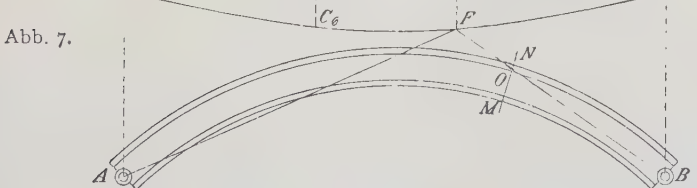
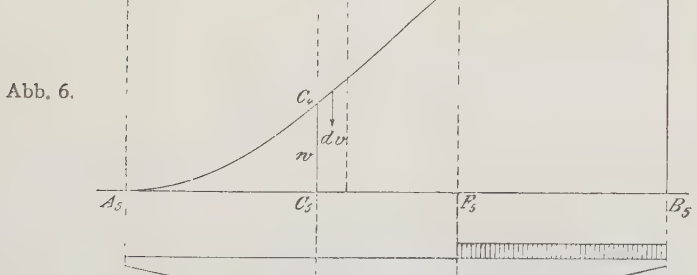
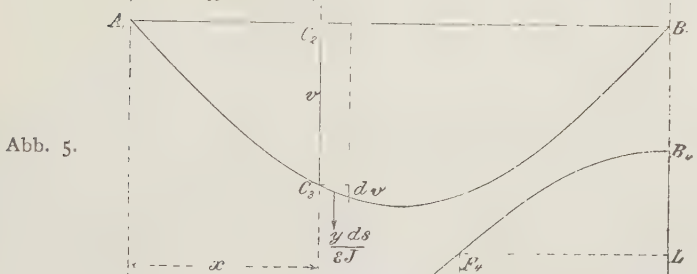
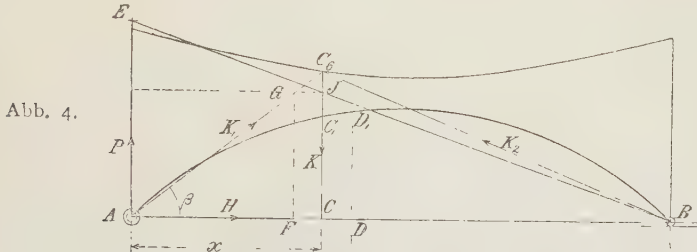
und bestimmen die Verschiebung v , die das bewegliche Gelenk B infolge der hierdurch herbeigeführten Formänderung im Sinne AB erleidet. Es ergibt sich, daß die Verschiebung v proportional der Last K und außerdem nur von den Abmessungen des Trägers und von der Abszisse x der Last K abhängig ist. Die Kurve $A_1C_3B_1$ (Abb. 5),

welche die Beziehung zwischen der Abszisse x und der Ordinate

$$v = C_2 C_3$$

zur Anschauung bringt, kann als *Seilkurve* dargestellt werden.

Wir beseitigen jetzt die Last K und lassen eine ebenso große wagerechte Kraft K im Sinne von B nach A auf das verschiebbare Kämpfergelenk B einwirken. Es zeigt sich, daß die hierdurch



herbeigeführte elastische Verschiebung u des Gelenkes B der Kraft K proportional ist.

Wir lassen ferner gleichzeitig eine lotrechte Last K gleich 1 kg auf den Punkt C_1 des Bogens und einen Horizontalschub H von

unbekannter Größe im Sinne BA auf das Gelenk B einwirken. Wenn hierbei das Gelenk B *keine* Verschiebung erleiden, also seine Lage *nicht* verändern soll, so muß

$$H = \frac{v}{u} K \quad (1)$$

sein; denn die Last K in Verbindung mit ihren lotrechten Auflagerkräften verschiebt das Gelenk B nach außen um die Strecke v , während die Horizontalkraft von der Größe H eine Verschiebung $\frac{H}{K} u$ nach innen bewirkt. Damit beide Verschiebungen einander aufheben, muß

$$v = \frac{H}{K} u$$

sein. Da u eine unveränderliche Strecke bezeichnet, so kann die Ordinate v als graphische Darstellung des Horizontalschubes H gelten, der von einer wandernden Einzellast

$$K = 1 \text{ kg}$$

erzeugt wird. Die Kurve zeigt also den *Einfluß*, den die *Lage* jener Einzellast auf die Größe des von ihr hervorgerufenen Horizontalschubes ausübt, und wird daher die *Einflußkurve* dieses Schubes H genannt.

Nachdem die Strecken v und u bestimmt worden sind, können für jede Lage der Einzellast K Größe und Lage der von ihr erzeugten Kämpferdrücke K_1 und K_2 bestimmt werden; denn die lotrechten Komponenten dieser Drücke werden durch die Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Die drei Kräfte K , K_1 , K_2 schneiden sich in *einem* Punkte C_6 , weil sie eine Gleichgewichtsgruppe bilden. Der geometrische Ort $C_6 F$ dieses Schnittpunktes (Abb. 7) wird die *Kämpferdrucklinie* genannt. Dieselbe wird in folgender Weise benutzt, um nach (VII, 6) die ungünstigsten Lagen der beweglichen Belastung zu ermitteln. Es sei z. B. die Aufgabe, die beiden Lagen der beweglichen Belastung zu bestimmen, bei denen in dem *unteren* Randpunkte M des Bogenquerschnittes MN die Grenzspannungen hervorgerufen werden. Man zieht zu diesem Zweck die Drucklinie $AFOB$ (Abb. 7) durch den *oberen* Randpunkt O des *Querschnittskernes* und bestimmt hierdurch die Belastungsscheide F ; denn für alle Einzellasten, welche *rechts* von F liegen, schneidet die Drucklinie *oberhalb* des Punktes O den Querschnitt. Alle diese Lasten erzeugen in dem Querschnittspunkte M *Zugspannungen*, während die Drucklinien aller Einzellasten *links* von F *unter* O liegen und hier-

durch angeben, daß die von ihnen in M hervorgerufenen Spannungen *Druckspannungen* sind.

Gewöhnlich wird bei solchen Rechnungen angenommen, daß die betreffenden Fahrbahnstrecken *gleichmäßig* belastet sind. Bei Ermittlung der Grenzspannungen der Bogenquerschnitte entsteht dann die Aufgabe, den Horizontalschub H des Bogens zu bestimmen und durch eine Strecke

$$H = C_4 C_5$$

(Abb. 6) graphisch darzustellen, der von einer gleichmäßig verteilten Last kx der Fahrbahnstrecke

$$A_5 C_5 = x$$

hervorgerufen wird. Die Untersuchung zeigt, daß auch diese Kurve $A_5 C_4 F_4 B_4$, welche die Beziehung zwischen H und x darstellt, in einfacher Weise als Seilkurve gebildet werden kann.

Endlich sind die Spannungen des Bogens zu ermitteln, die von Temperaturänderungen und von zufälligen Aenderungen der Stützweite hervorgerufen werden.

3. Die inneren Kräfte und die Formänderung eines Bogenträgers. Die Formänderung eines Bogenträgers wird herbeigeführt durch die Biegemomente, die Normalkräfte und die Schubkräfte, welche von den Trägerquerschnitten aufzunehmen sind.

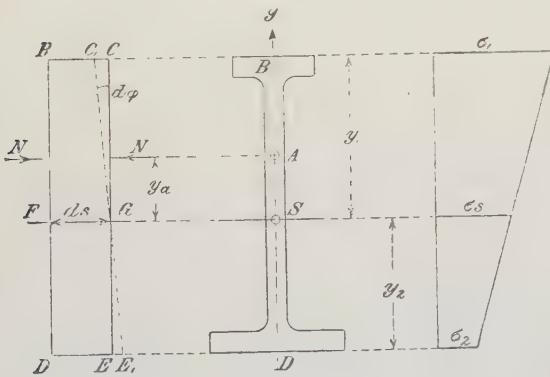


Abb. 8.

Abb. 9.

Abb. 10.

Von diesen drei Ursachenbraucht in praktischen Fällen nur die erste berücksichtigt zu werden, weil gegen den Einfluß der Biegemomente derjenige der Normal- und der Schubkräfte verschwindet. Man vergleiche hier-

über die näheren Angaben in der Abhandlung: *Beitrag zur Theorie der Bogenträger* in der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1870, S. 398. Wir setzen ferner voraus, daß die Höhe des Bogenträgers klein ist im Vergleich zum Krümmungshalbmesser der Bogenachse, so daß ein kleines Bogen-

stück $BCE D$ (Abb. 8) zwischen zwei benachbarten Querschnitten ohne erheblichen Fehler als ein Prisma angesehen werden kann. Demgemäß kommen die folgenden, aus der Abhandlung VII bekannten Beziehungen zur Anwendung. In Abb. 8 bezeichnen BD und CE zwei Nachbarquerschnitte, die auf der Bogenachse FG das unendlich kleine Stück ds abschneiden. Im Querschnitt (Abb. 9) bezeichnet S den Schwerpunkt und A den Angriffspunkt des resultierenden Normaldruckes N . Der Angriffspunkt A liegt auf der Symmetrieachse y , die nach oben zeigt und in S ihren Anfangspunkt hat; die Ordinate y_a des Punktes A ist also positiv, wenn A über S liegt. y_1 und y_2 bezeichnen die positive und die negative Grenzdinate der Querschnittsfläche F , deren Trägheitsradius in bezug auf die wagerechte Schwerpunktsachse mit i bezeichnet wird. Die in Abb. 10 dargestellten Spannungen in dem oberen und dem unteren Randpunkte der Querschnittsfläche und in ihrem Schwerpunkte S werden bestimmt durch die Gleichungen (VII, Gleichung 12)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{N}{F} - \frac{y_1 y_a}{i^2} \frac{N}{F}, \\ \sigma_2 &= -\frac{N}{F} - \frac{y_2 y_a}{i^2} \frac{N}{F}, \\ \sigma_s &= -\frac{N}{F}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

denn der nach dem Schwerpunkt versetzte Normaldruck N erzeugt die gleichmäßig verteilte Druckspannung $\frac{N}{F}$, während von dem Bieugungsmoment

$$M = N y_a$$

im oberen Randpunkte B des Querschnittes die Druckspannung $\frac{M y_1}{F i^2}$

und im unteren Randpunkte D die Zugspannung $\frac{M y_2}{F i^2}$ hervorgerufen wird. Diese Biegungsspannungen haben nach (IX, 2) zur Folge, daß sich der Bogenquerschnitt CE gegen den Querschnitt BD um einen unendlich kleinen Winkel

$$CGC_1 = d\varphi = \frac{M ds}{\varepsilon F i^2} = \frac{M ds}{\varepsilon J} \quad (3)$$

dreht. Die Winkel $d\varphi$ bestimmen die hier in Betracht kommenden Formänderungen des Bogenträgers. Wenn der Bogenträger AB (Abb. 11) im Gelenk A gelagert ist, während das Gelenk B auf der

wagerechten Auflagerbahn frei sich verschieben kann, so läßt sich die mit der Formänderung des unendlich kleinen Bogenteils

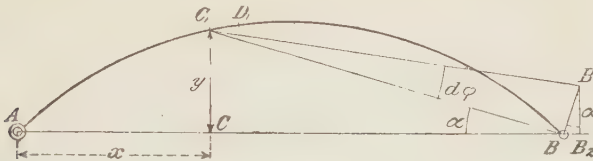


Abb. 11.

$$C_1 D_1 = ds$$

verbundene Bewegung aus folgenden zwei Bewegungen zusammensetzen. Bei der *ersten* Bewegung dreht sich der Bogenteil $C_1 B$ gegen den ruhenden Bogenteil AC_1 um den unendlich kleinen Winkel

$$BC_1 B_1 = d\varphi = \frac{M ds}{\varepsilon J},$$

wobei der Punkt B nach B_1 sich verschiebt. Bei der *zweiten* Bewegung, einer Drehung des ganzen Bogens $AC_1 B_1$ um das Gelenk A gelangt B_1 in die Auflagerbahn nach B_2 . Da die Dreiecke $CC_1 B$, $B_2 B B_1$ geometrisch ähnlich sind, so hat die von der Formänderung des Bogenstückes ds herbeigeführte Verschiebung dv des Gelenkes B die Größe

$$dv = BB_2 = BB_1 \sin \alpha = C_1 B d\varphi \sin \alpha = \frac{M y ds}{\varepsilon J}, \quad (4)$$

wenn mit y die Ordinate $C_1 C$ des Bogenpunktes C_1 in bezug auf die Bogensehne bezeichnet wird. Die Verschiebung besteht in einer Verlängerung oder in einer Verkürzung der Bogensehne AB , je nachdem das Biegemoment M positiv oder negativ ist.

4. Graphische Bestimmung der Strecken v . Das graphische Verfahren soll an einem Beispiel erläutert werden, dessen Zahlenwerte nicht einem ausgeführten Bogenträger entnommen sind, sondern mit Rücksicht auf die Deutlichkeit der Zeichnungen willkürlich gewählt wurden. Gegeben ist die Bogenachse, von der eine Hälfte AE_1 durch Abb. 13 im Maßstabe 1:600 dargestellt wird. Die Bogensehne hat die Länge:

$$2 AE = l = 5800 \text{ cm.}$$

Die Bogenhälfte AE_1 ist durch die Punkte B_1 , C_1 , D_1 in vier mit den Nummern 1, 2, 3, 4 bezeichnete Teile zerlegt. Die folgende Tabelle gibt für diese vier Teile die Längen ds und die Mittelwerte von εJ und y . Mit Rücksicht auf die Deutlichkeit der

Zeichnungen wurde die Anzahl der Bogenteile sehr klein gewählt; steht mehr Raum zur Verfügung, so empfiehlt es sich, jene Anzahl etwa auf das Doppelte zu vergrößern.

Bogenteil	1	2	3	4
Δs in cm	800	800	800	800
y in cm	260	710	1010	1160
ϵJ in 10^{12} kg qcm	28	26	24	22
$(1 \text{ kg} \cdot y \Delta s)$ in 10^3 kg qcm	208	568	808	928

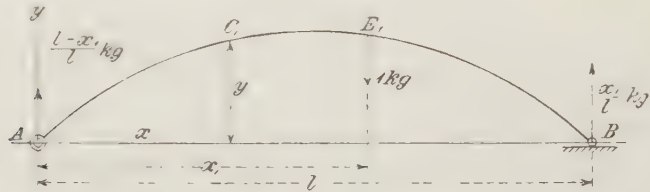


Abb. 12.

Wenn der im Gelenke A (Abb. 12) fest und im Gelenke B verschiebbar gelagerte Träger im Punkte E_1 von der Abszisse x_1 mit 1 kg belastet wird, so ist das Biegemoment für jeden Bogenquerschnitt von der Abszisse x zwischen A und E_1 :

$$M = + 1 \text{ kg} \cdot \frac{x(l - x_1)}{l}$$

und für jeden Querschnitt zwischen E_1 und B:

$$M = + 1 \text{ kg} \cdot \frac{(l - x)x_1}{l}$$

Diese Belastung erzeugt eine Verlängerung der Bogensehne, die nach Gleichung 4) folgende Größe hat:

$$v = \int_{x=0}^{x=l} \frac{M y ds}{\epsilon J} = 1 \text{ kg} \int_{x=0}^{x=x_1} \frac{x(l - x_1) y ds}{l \epsilon J} + 1 \text{ kg} \int_{x=x_1}^{x=l} \frac{x_1(l - x) y ds}{l \epsilon J} \quad (5)$$

Um die Strecke v graphisch darzustellen, belasten wir einen geraden Balken, der in den Punkten A und B frei unterstützt ist, auf der

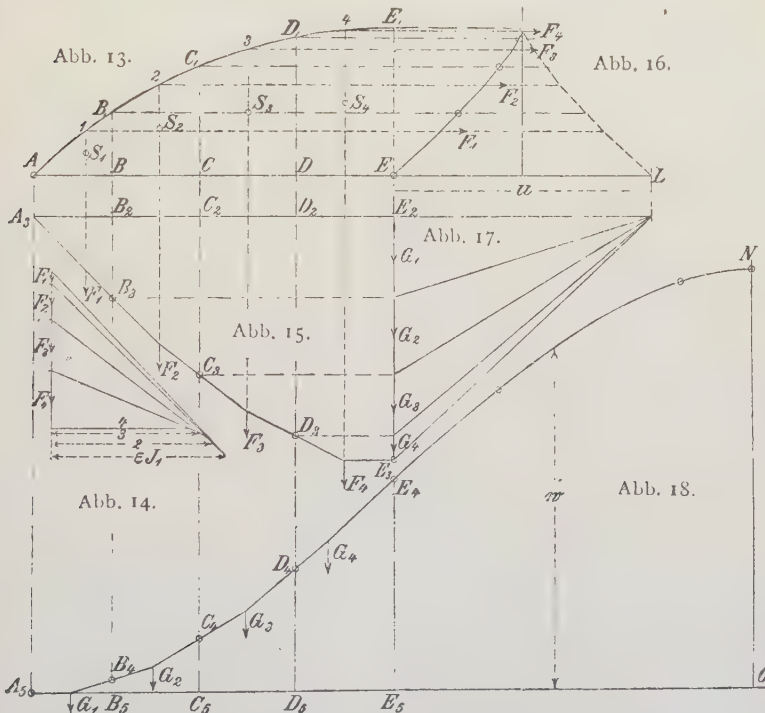
Horizontalprojektion dx eines jeden Bogenelements ds mit einer Last, die für dieses Bogenelement durch die positive Zahl

$$1 \text{ kg} \cdot \frac{y \, ds}{\epsilon J}$$

dargestellt wird. Diese sämtlichen Zahlenlasten erzeugen in dem Balkenquerschnitt E_1 von der Abszisse x_1 ein Biegemoment von der Größe der Strecke v . Es ist hierbei zu beachten, daß die Biegemomente *Strecken* sind, wenn die Lasten durch *unbenannte Zahlen* dargestellt werden. Jede Last von der angegebenen Größe erzeugt in dem Querschnitt E_1 ein Biegemoment

$$1 \text{ kg} \cdot \frac{x(l-x_1)y \, ds}{l \epsilon J} \quad \text{oder} \quad 1 \text{ kg} \cdot \frac{x_1(l-x)y \, ds}{l \epsilon J},$$

je nachdem die Abszisse x der Last kleiner oder größer ist als die Abszisse x_1 des Balkenquerschnittes E_1 . Sämtliche Lasten erzeugen also in dem Querschnitt E_1 die in Gleichung 5) durch die Integrale bezeichnete Biegemomentensumme v .



Zur Bestimmung dieser Biegemomente wurde in den Abb. 14 und 15 das Seilpolygon $A_3 B_3 C_3 D_3 E_3$ gebildet aus dem

10 000 000 fachen der Lasten $1 \text{ kg} \cdot y \Delta s$ und den Normalkräften εJ für die vier Teile der Bogenhälfte, wie es in der Abhandlung II, 8 beschrieben worden ist. Die Seilkurve mit den Ordinaten v berührt nach II, 10 dieses Seilpolygon in den Punkten A_3, B_3, C_3, D_3, E_3 und ist in bezug auf die lotrechte Mittelachse symmetrisch gestaltet, so daß nur eine Hälfte des Polygons gezeichnet zu werden braucht. Die Kurve wurde nicht eingetragen, um die Zeichnung nicht unendlich zu machen. Die Lage der Mittelkräfte F oder $1 \text{ kg} \cdot y \Delta s$ wird durch die Schwerpunkte S_1, S_2, S_3, S_4 der Flächenteile $ABB_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DEE_1D_1$ bestimmt und kann nach Augenmaß ermittelt werden, wenn die Bogenteile Δs klein genug sind.

Der Maßstab des Kräfteplans Abb. 14 ist $1 \text{ cm} = 12 \cdot 10^{12} \text{ kg qcm}$. Da der Längenmaßstab der Abb. 13 $1:600$ ist, so werden die Ordinaten v in Abb. 15 im Maßstabe

$$1 \text{ cm} = \frac{600}{10\,000\,000} \text{ cm} = 0,00006 \text{ cm}$$

dargestellt. Da beispielsweise die Mittelordinate der Seilkurve in Abb. 15

$$E_2 E_3 = 3,3 \text{ cm}$$

ist, so erzeugt eine Last von 1 kg in der Bogenmitte eine Verlängerung der Bogensehne um

$$v = \frac{3,3 \cdot 6}{100\,000} = \frac{1}{5000} \text{ cm}.$$

5. Graphische Bestimmung der Strecke u . Läßt man auf das Gelenk B (Abb. 12) eine Horizontalkraft vom Sinne BA und der Größe 1 kg einwirken, so hat das Biegemoment für den Querschnitt von der Abszisse x die Größe $-y \cdot 1 \text{ kg}$. Nach Gleichung 4) bewirken diese Biegemomente eine *Verkürzung* der Bogensehne AB von der Größe

$$u = 1 \text{ kg} \int_{x=0}^{x=l} \frac{y^2 ds}{\varepsilon J}. \quad (6)$$

Auch diese Strecke kann vermittels eines Seilpolygons (Abb. 16) bestimmt werden. Man läßt zu diesem Zweck auf jedes Element ds der Bogenachse eine *Horizontalkraft*

$$F = 1 \text{ kg } y ds$$

einwirken und bildet die Seilkurve dieser Lasten mit den lotrechten Normalkräften εJ . Der Kräfteplan dieser Seilkurve ist geometrisch

ähnlich dem für die Seilkurve v gebildeten Kräfteplan (Abb. 14) und gegen denselben um 90° gedreht; er braucht daher nicht aufgetragen zu werden. Die Seilkurve (Abb. 16) besteht aus zwei symmetrischen Hälften, von denen daher *eine* genügt. Die Kurve deckt sich mit der Seilkurve, deren wagerechte Lasten durch die positiven Zahlen $\frac{1 \text{ kg} \cdot y \, ds}{\epsilon J}$ und deren lotrechte Normalkraft durch die Zahl $+1$ dargestellt wird. Die Momentengleichung dieser Kräfte in bezug auf den Punkt E ergibt die Strecke

$$EL \cdot 1 = 1 \text{ kg} \int_{x=0}^{x=l} \frac{y^2 \, ds}{\epsilon J}$$

oder

$$u = EL = 3,50 \text{ cm.}$$

Da die Lasten $1 \text{ kg} \cdot y \, ds$ 10 000 000 fach größer aufgetragen wurden als die Normalkräfte ϵJ , so ist der Maßstab für u wie der für v :

$$1 \text{ cm} = \frac{600 \text{ cm}}{10\,000\,000} = 0,00006 \text{ cm.}$$

Ein Horizontalschub von 1 kg verkürzt demnach die Bogensehne AB um

$$u = 3,5 \cdot 0,00006 = 0,00021 \text{ cm.}$$

Nach Gleichung 1) hat der Horizontalschub H , welcher von einer lotrechten Einzellast K hervorgerufen wird, die Größe

$$H = \frac{v}{u} K,$$

wenn v die Ordinate der Seilkurve in dem Lote der Last K bezeichnet. Ist die Einzellast K gleich 1 kg, so wird also der zugehörige Horizontalschub H in jeder Lage der Last gemessen durch die Ordinate v im Maßstabe

$$1 \text{ cm} = \frac{1}{3,5} \text{ kg};$$

denn der obigen Gleichung zufolge wird $H = 1 \text{ kg}$ für

$$v = u = 3,5 \text{ cm.}$$

6. Graphische Bestimmung des Horizontalschubes bei zusammengesetzten Belastungen. Besteht die Belastung des Bogenträgers aus einer Reihe von Einzellasten $K_1, K_2, K_3 \dots$, deren zugehörige Ordinaten v mit $v_1, v_2, v_3 \dots$ bezeichnet werden, so erhält der Horizontalschub H die Größe

$$H = \frac{v_1}{u} K_1 + \frac{v_2}{u} K_2 + \frac{v_3}{u} K_3 + \dots = \frac{1}{u} \sum v K. \quad (7)$$

Die Größe $\frac{1}{u} \sum v K$ kann in bekannter Weise vermittels eines Seilpolygons bestimmt werden, was einer weiteren Erläuterung nicht bedarf.

Ist ferner die Belastung kx_1 *gleichmäßig verteilt* über die horizontale Strecke von

$$x = 0 \quad \text{bis} \quad x = x_1,$$

so erhält der Horizontalschub die Größe:

$$H = \frac{k}{u} \int_0^{x_1} v dx = \frac{k}{u} \left(v_1 x_1 - \int_0^{v_1} x dv \right), \quad (8)$$

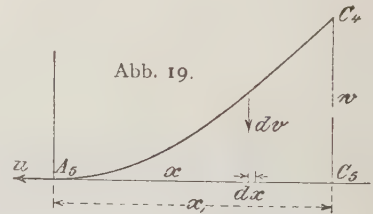
wenn mit v_1 die Ordinate v für die Abszisse x_1 bezeichnet wird.

Wir belasten ein Seil $A_5 C_4$ von der Normalkraft u auf jeder Strecke dx mit der zugehörigen Strecke dv (Abb. 19) und bilden die Momentengleichung dieser Kräfte für den Punkt C_4 des Seiles von der Abszisse x_1 und der Ordinate w ; sie ergibt

$$wu = \int_0^{v_1} (x_1 - x) dv = x_1 v_1 - \int_0^{v_1} x dv.$$

Demnach ist

$$H = \frac{k}{u} wu = kw, \quad (9)$$



d. h. für jede Länge x_1 der belasteten Strecke wird H graphisch dargestellt durch die Ordinate w .

Die Seilkurve w ist für das vorliegende Beispiel in Abb. 18 vermittels des Kräfteplans (Abb. 17) gebildet worden; sie berührt das Seilpolygon $G_1 G_2 G_3 G_4$ in den Punkten A_5, B_4, C_4, D_4, E_4 . Mit Rücksicht auf die Deutlichkeit der Zeichnung wurde die Kurve nicht eingetragen. Da der Symmetrie wegen die Belastungen der ersten und der zweiten Bogenhälfte gleiche Horizontalschübe erzeugen, so ergibt sich die zweite Kurvenhälfte aus der ersten nach den Regeln der Symmetrie. Im Kräfteplan (Abb. 17) bezeichnen G_1, G_2, G_3, G_4 die Summen der Belastungen dv für die vier Bogenteile 1, 2, 3, 4. Diese Strecken können unmittelbar aus der Seilkurve v in Abb. 15 entnommen werden. Die Lage der Lasten G in Abb. 18 ist nach

Augenmaß so zu bestimmen, daß sie mit den Resultanten der Lasten Δv für die einzelnen Bogenteile zusammenfallen. Werden die Strecken Δx klein genug gewählt, so *halbieren* die Lasten G diese Strecken.

Bezeichnen w_1 und w_2 die Ordinaten der Seilkurve w für zwei beliebige Abszissen x_1, x_2 , so hat der Horizontalschub H , der von der gleichmäßig verteilten Belastung $k (x_2 - x_1)$ der Fahrbahnstrecke von x_1 bis x_2 erzeugt wird, offenbar die Größe

$$H = k(w_2 - w_1). \quad (10)$$

Diese Formel bestimmt für jede gleichmäßig belastete Fahrbahnstrecke die Größe des zugehörigen Horizontalschubes. Der Maßstab der Ordinaten w stimmt selbstverständlich überein mit dem Maßstab der Trägerzeichnung in Abbildung 13 und ist im vorliegenden Beispiel also 1:600. Nach diesem Maßstab ist z. B. die Endordinate der Kurve

$$NO = 33,6 \text{ Meter.}$$

Bei gleichmäßiger Belastung der ganzen Brückenfahrbahn z. B. mit 4000 kg auf das laufende Meter oder mit $58 \cdot 4000 = 232\,000$ kg auf den ganzen Träger erhält demnach der Horizontalschub die Größe

$$H = 33,6 \cdot 4000 = 134\,400 \text{ kg.}$$

7. Die Kämpferdrucklinie. Eine Einzellast K von der Abszisse x (Abb. 4) erzeugt in dem Gelenke A einen lotrechten Auflagerdruck

$$P = \frac{l-x}{l} K$$

und einen Horizontalschub

$$H = \frac{v}{u} K.$$

Der resultierende Druck K_1 des Gelenkes A bildet also mit der Horizontalen den Winkel β , der durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{P}{H} = \frac{(l-x)u}{lv}$$

bestimmt wird. Trägt man (Abb. 4 und 5)

$$AE = u \quad \text{und} \quad AF = C_2 C_3 = v$$

auf, so wird

$$FG = CJ = \frac{l-x}{l} u$$

und folglich

$$\sphericalangle GAF = \beta.$$

Die Gerade AGC_6 bestimmt also einen Punkt C_6 der Kämpferdrucklinie. Es ist hierbei zu berücksichtigen, daß die Abb. 4, 5, 6 aus den Abb. 13, 15, 18 durch Verkleinerung im Verhältnis von 3 zu 4 hervorgegangen sind. Der Längenmaßstab von Abb. 4 ist demnach 1 : 800.

8. Wirkung einer Aenderung der Stützenlage und einer Temperaturänderung. Die Länge z der Bogensehne AB des gewichtslosen und spannungslosen Bogenträgers stimmt in der Regel nicht genau überein mit der Stützweite l , d. h. dem Abstände der beiden Kämpfergelenke A und B voneinander. Infolgedessen erleidet der gewichtslose und unbelastete Träger von den Kämpfergelenken einen Horizontalschub von der Größe

$$\frac{z - l}{u} \text{ kg.}$$

Ist

$$z < l,$$

so übertragen die Kämpfergelenke horizontale Zugkräfte von der Größe

$$\frac{l - z}{u} \text{ kg}$$

auf den Träger. Diese Kräfte können also nur bestimmt werden, wenn beide Strecken z und l genau bekannt sind, was in der Regel nicht der Fall ist.

Erhöht sich die Temperatur des Trägers um 1 Grad Celsius, so vergrößert sich z und folglich auch $(z - l)$ um $\frac{1}{80\,000} z$. Diese Aenderung hat zur Folge, daß sich der Horizontalschub um

$$\frac{z}{80\,000 u} \text{ kg,}$$

im vorliegenden Beispiel also um

$$\frac{5800}{80\,000 \cdot 0,00021} = 345 \text{ kg}$$

vergrößert.

Vergrößert sich der Gelenkabstand l z. B. durch Ausweichen oder Zusammendrücken der Widerlager um 1 cm, so ändert sich

$(z - l)$ um -1 cm, und der Horizontalschub des Trägers *vermindert* sich infolgedessen um

$$\frac{1 \text{ cm}}{u} \text{ kg,}$$

im vorliegenden Beispiel um

$$\frac{1}{0,00021} = 4760 \text{ kg.}$$

9. Literarische Notiz. Der Inhalt der vorstehenden Abhandlung wurde entnommen *dem Beitrage zur Theorie der elastischen Bogenträger*; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1870, Heft 4. In betreff der Literatur des Gegenstandes verweisen wir auf das *Handbuch der Ingenieurwissenschaften*, Bd. II: Der Brückenbau.

Abhandlung XII.

Das ebene Fachwerk.

1. Erklärungen. Mit Fachwerk soll im folgenden ein Träger bezeichnet werden, der aus Stäben zusammengesetzt und so gestützt ist, daß eine Aenderung der Form und der Lage des Trägers nur durch Längenänderungen der Stäbe herbeigeführt werden kann. Wenn die Stäbe und die äußeren Kräfte, d. h. die Lasten und die Stützkkräfte, alle in *einer* Ebene liegen, so heißt der Träger ein *ebenes* Fachwerk, im anderen Falle ein *Raumfachwerk*. In dieser Abhandlung ist nur von ebenen Fachwerken die Rede.

Die Punkte, in welchen die Stäbe durch *reibungslose Gelenke* miteinander verbunden sind, heißen die *Knoten* des Fachwerks.

Die Art der Stützung eines Knotens kann zur Anschauung gebracht werden, indem man zum Fachwerk *Stützstäbe* hinzufügt, die den gestützten Knoten entweder mit *zwei* oder mit *einem* festen Punkt der Ebene verbinden. Im ersten Falle wird eine *feste*, im zweiten eine *verschiebbare* Stütze gebildet. Ein Fachwerk mit *einer* festen und *einer* verschiebbaren Stütze wird ein *Balkenfachwerk* genannt. Ein *kontinuierliches* Balkenfachwerk hat *eine* feste und mehrere verschiebbare Stützen; ein *Bogenfachwerk* hat mehr als *eine* feste Stütze. Die Stützstäbe übertragen die *Stützkkräfte* auf das Fachwerk und auf das Fundament. In der Zeichnung werden die Knoten durch einfache Kreise, die festen Punkte durch Doppelkreise dargestellt. *Die letzteren werden nicht zu den Knoten gezählt.*

Es ist unvorteilhaft, den *Biegungswiderstand* der Stäbe in Anspruch zu nehmen, weil die Biegungsspannungen sich ungleichmäßig über den Stabquerschnitt verteilen und daher eine volle Ausnutzung der Festigkeit nicht zulassen. Aus diesem Grunde werden die Lasten des Fachwerks nicht unmittelbar von den Stäben aufgenommen, sondern durch Zwischenträger auf die Knoten übertragen. Zu demselben Zweck legt man die Achse eines jeden Knotengelenkes durch

den gemeinschaftlichen Schnittpunkt der Stabachsen. Infolgedessen haben die Fachwerkstäbe nur Zug- oder Druckkräfte zu übertragen, welche sich *gleichmäßig* über die Stabquerschnitte verteilen. Hierauf beruht der Hauptvorteil des Fachwerks im Vergleich mit anderen Trägern. Die biegende Wirkung des *Eigengewichtes* der Stäbe kann ihrer Kleinheit wegen in der Regel vernachlässigt werden, indem man das Gewicht eines jeden Stabes auf seine beiden Knoten verteilt und als Knotenlast mit in Rechnung bringt.

2. Die Hauptgleichung der Theorie des Fachwerks. Auf die Knoten des ebenen Fachwerks (Abb. 1) mögen die äußeren Kräfte $K_1, K_2, K_3 \dots$ einwirken. In Verbindung mit irgendwelchen anderen Ursachen erzeugen dieselben die unbekannten Stabkräfte $S_1, S_2, S_3 \dots$, welche den aus jedem Stab herausgeschnittenen Teil ersetzen und als *Zugspannungen* mit dem *positiven* Vorzeichen in Rechnung gestellt werden. Jedem Knoten A

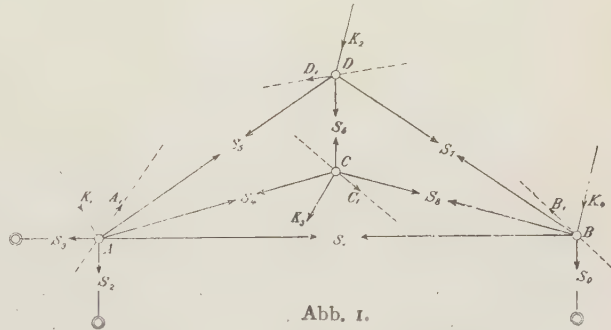


Abb. 1.

werksebene irgend eine durch denselben gehende Gerade und auf dieser eine unendlich kleine Strecke AA_1 beilegt werden. Für die Kräftegruppe eines jeden Knotens A bilde man die Gleichgewichtsbedingung, welche ausdrückt, daß die algebraische Summe der Projektionen der Kräfte auf die dem Knoten beilegte Gerade im Sinne der Strecke AA_1 gleich null ist; man multipliziere alle Glieder der Gleichung mit der Länge der Strecke AA_1 und summiere darauf sämtliche Gleichungen. In der hierdurch entstehenden Gleichgewichtsbedingung kommt jede der Kräfte K nur *einmal*, jede Stabkraft S dagegen *zweimal* vor. Die Glieder mit den Kräften K nehmen die Form an:

$$K_1 dw_1 + K_2 dw_2 + K_3 dw_3 + \dots = \sum K dw,$$

wenn z. B. mit dw_1 die Projektion der Strecke AA_1 auf die Richtung der vom Knoten A aufzunehmenden Kraft K_1 im Sinne dieser Kraft bezeichnet wird.

Die beiden Glieder, welche dieselbe Stabkraft S_1 enthalten, können zusammengefaßt werden. Bezeichnet man die Länge des betreffenden Stabes AB mit l_1 und die Strecke A_1B_1 zwischen den Endpunkten der beiden den Knoten A und B beigelegten Strecken AA_1 , BB_1 mit $l_1 + dl_1$, so ist die Summe der beiden Glieder mit S_1 (Abb. 2)

$$S_1 (AA_2 + BB_2) = S_1 (AB - A_2B_2) = S_1 (AB - A_1B_1) = -S_1 dl_1.$$

Die Länge A_1B_1 darf ihrer Projektion A_2B_2 gleichgesetzt werden, weil diese beiden Strecken einen unendlich kleinen Winkel einschließen und daher nur um eine

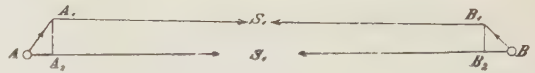


Abb. 2.

unendlich kleine Größe zweiter Ordnung voneinander abweichen. Die Glieder mit den Stabkräften S erhalten also die Form

$$-S_1 dl_1 - S_2 dl_2 - S_3 dl_3 - \dots = -\Sigma S dl.$$

Die resultierende Gleichung

$$\Sigma K dw - \Sigma S dl = 0 \quad (1)$$

hätte auch unmittelbar aus dem *Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten* abgeleitet werden können; sie spricht aus, daß bei jeder unendlich kleinen Verschiebung der frei beweglichen Knoten die Summe der Arbeiten der Kräfte K und S gleich null ist.

Die Gleichung 1) umfaßt nicht nur alle Bedingungen des Gleichgewichtes der äußeren, sowie der äußeren und inneren Kräfte, sondern auch alle Beziehungen, die bei den Formänderungen des Fachwerks in Betracht kommen; sie darf daher als die *Hauptgleichung der Theorie des Fachwerks* bezeichnet werden.

Wenn man alle Glieder der Gleichung durch die Zeitdauer dt der unendlich kleinen Bewegung dividiert und ihr hierdurch die Form

$$\Sigma S \frac{dl}{dt} = \Sigma K \frac{dw}{dt} \quad (2)$$

gibt, so bezeichnet z. B. $\frac{dw_1}{dt}$ die *Schubgeschwindigkeit* der Kraft K_1 ,

während $\frac{dl_1}{dt}$ die *Dehnungsgeschwindigkeit* der Stabstrecke l_1 angibt.

Die Gleichung spricht aus, daß bei jeder unendlich kleinen Bewegung der Knoten die *Arbeitsgeschwindigkeiten* der Kräfte S und K die Summe null haben.

Man kann ferner die Verschiebung eines jeden Knotens zerlegen in zwei Verschiebungen dx , dy parallel zu den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, ebenso jede Knotenlast K in zwei Lasten K_x , K_y von diesen Richtungen. Da die Arbeit $K dw$ der Kraft K gleich ist der Summe der beiden Arbeiten $K_x dx$ und $K_y dy$ ihrer Komponenten, so kann man der Gleichung auch die Form geben:

$$\sum S dl = \sum K_x dx + \sum K_y dy. \quad (3)$$

In dieser Gleichung bezeichnen dx und dy also die *willkürlich gewählten* unendlich kleinen Verschiebungen der Knoten in den Richtungen der beiden Koordinatenachsen.

3. Einfache und zusammengesetzte Fachwerke. Nach Anleitung der vorstehenden Gleichungen kann eine unendlich große Anzahl von Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Lasten K und den Stabkräften S gebildet werden; es kommt daher zunächst in Frage, *wie groß die Anzahl der voneinander unabhängigen Bedingungen ist*. Die auf *einen* Knoten wirkenden Kräfte K und S befinden sich im Gleichgewicht, wenn die Summen ihrer Projektionen für die beiden Koordinatenachsen gleich null sind. Indem man für jeden der k Knoten des Fachwerks diese zwei Bedingungen bildet, entstehen $2k$ Gleichungen, von denen alle anderen Gleichgewichtsbedingungen abhängig sind; denn befindet sich jeder der k Knoten im Gleichgewicht, so ist dies auch der Fall für jede Gruppe von Knoten und für ihre Gesamtheit. *Für ein Fachwerk von k Knoten können daher nicht mehr als $2k$ voneinander unabhängige Gleichgewichtsbedingungen gebildet werden.*

Man nennt ein Fachwerk ein *einfaches Fachwerk*, wenn die Gleichgewichtsbedingungen bei jeder Belastung für die Stabkräfte bestimmte endliche Werte ergeben. *Ein einfaches Fachwerk mit k Knoten enthält daher mit Einschluß der Stützstäbe $2k$ Stäbe.*

Um k Knoten mit festen Stützpunkten starr zu verbinden, sind $2k$ starre Stäbe erforderlich. Ein einfaches Fachwerk enthält daher *nur* die Stäbe, welche zur starren Verbindung seiner Knoten miteinander und mit den Stützpunkten *notwendig* sind. Um k_1 Knoten *miteinander* starr zu verbinden, sind $(2k_1 - 3)$ Stäbe erforderlich. Jeder Teil eines einfachen Fachwerks, welcher k_1 Knoten und keine Stützpunkte enthält, darf also nicht mehr als $(2k_1 - 3)$ Stäbe enthalten.

Die $2k$ Gleichgewichtsbedingungen sind *nicht unabhängig* voneinander, wenn die unendlich kleinen Verschiebungen der Knoten so

gewählt werden können, daß *alle* Längenänderungen dl der $2k$ Stabstrecken gleich null werden; denn in einem solchen Falle ergibt Gleichung 3) eine Gleichgewichtsbedingung von der Form

$$0 = \sum K_x dx + \sum K_y dy, \quad (4)$$

in der dx, dy *bestimmte* unendlich kleine Verschiebungen der Knoten bezeichnen. In einem solchen Falle ist also das Gleichgewicht des Fachwerks mit endlichen Stabkräften nicht bei *allen* Belastungen, sondern nur dann möglich, wenn die Lasten K die durch Gleichung 4) ausgedrückte Bedingung erfüllen. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, so ergibt Gleichung 3) *unendlich große* Stabkräfte S . Beseitigt man alle Lasten K , so bleibt eine Gleichgewichtsbedingung von der Form:

$$\sum S \cdot 0 = 0$$

bestehen; sie gibt an, daß eine solche Stabverbindung, auch wenn sie unbelastet ist, Stabkräfte von unbestimmbarer Größe

$$S = \frac{0}{0}$$

aufzunehmen imstande ist.

Man kann durch Bildung des Geschwindigkeitsplans sich davon überzeugen, ob der beschriebene Ausnahmefall vorliegt, wie im Abschnitt 5 an einem Beispiel gezeigt wird.

Liegt der Ausnahmefall nicht vor, so sind die $2k$ Gleichgewichtsbedingungen unabhängig voneinander und ergeben für die $2k$ Stabkräfte des einfachen Fachwerks bei jeder Belastung bestimmte endliche Werte.

Ein Fachwerk wird ein *zusammengesetztes Fachwerk* genannt, wenn es mehr als die $2k$ notwendigen Stäbe enthält. Die Stabkräfte eines zusammengesetzten Fachwerks können durch die Gleichgewichtsbedingungen allein nicht bestimmt werden, weil die Zahl der unbekannten Stabkräfte größer ist als die Zahl der voneinander unabhängigen Gleichungen. Man nennt daher solche Fachwerke auch *statisch unbestimmt* im Gegensatz zu den einfachen Fachwerken, die *statisch bestimmt* genannt werden. Gegen diese Bezeichnungen ist nur einzuwenden, daß die Bestimmtheit sich nicht auf das Fachwerk, sondern auf die Berechnung der Stabkräfte bezieht.

Der wesentliche Unterschied zwischen beiden Arten von Fachwerken besteht demnach darin, daß die Stabkräfte des einfachen Fachwerks *nur* von den Lasten abhängig und durch diese vollkommen bestimmt sind, während bei dem zusammengesetzten Fachwerk noch andere Einflüsse, insbesondere die Temperaturänderungen

und die Aenderungen der Stützenlage in Betracht kommen, die auch im *unbelasteten* Träger Spannungen hervorrufen können.

4. Anwendung des Geschwindigkeitsplans bei Berechnung der Stabkräfte eines einfachen Fachwerks. Wenn nicht aus jedem Stabe des Fachwerks, sondern nur aus einem einzigen Stabe DF (Abb. 3) ein Stück herausgeschnitten wird, so verwandelt sich das Fachwerk in ein *zwangsläufiges Getriebe*, das also nur *eine* unendlich kleine Bewegung ausführen kann (vergl. IV, 10). Der Geschwindigkeitsplan dieser Bewegung bestimmt die Schubgeschwindigkeit $\frac{dw}{dt}$ einer jeden Last K und die Dehnungsgeschwindigkeit $\frac{dl}{dt}$ der durchschnittenen Stabstrecke DF . Da für alle anderen Stäbe die Dehnungsgeschwindigkeit gleich null ist, so ergibt Gleichung 2) die Stabkraft S des durchschnittenen Stabes DF als Funktion aller Lasten in der Form:

$$S = \frac{1}{\frac{dl}{dt}} \sum K \frac{dw}{dt}. \quad (5)$$

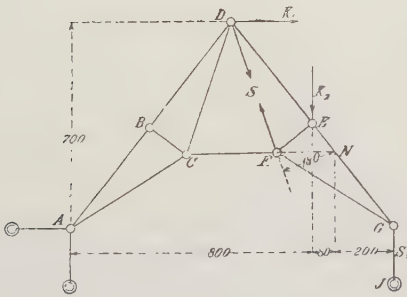


Abb. 3.

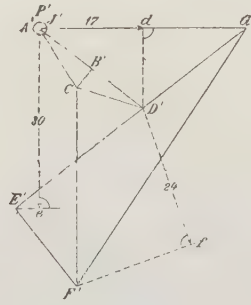


Abb. 4.

Beispiel 1. Es ist die Stabkraft S des Stabes DF im Fachwerk Abb. 3 zu berechnen. Der Maßstab des Fachwerks ist 1 : 250; der Maßstab des Geschwindigkeitsplans (Abb. 4) kann nach Belieben gewählt werden, weil nur die *Verhältnisse* der Geschwindigkeiten in Betracht kommen; die in Abb. 4 eingeschriebenen Zahlen beziehen sich auf den Maßstab 1 cm gleich 12,5 cm sek⁻¹. Die Bildung des Geschwindigkeitsplans darf hier als bekannt vorausgesetzt werden, da sie in der Abhandlung IV ausführlich beschrieben worden ist. Es dürften daher folgende Angaben genügen. Man zieht vom

Pol P' , mit dem die Punkte J und A' zusammenfallen, die Strecke

$$JG' \perp JG$$

von beliebiger Länge. Dann ist aufzutragen:

$$G'D'E' \perp GDE, \quad A'B'D' \perp ABD, \quad A'B'D'C' \approx ABDC, \\ C'F' \perp CF, \quad G'F' \perp GF, \quad G'F'E' \approx GFE.$$

Die Dehnungsgeschwindigkeit $\frac{dl}{dt}$ der Stabstrecke DF wird durch die Projektion $D'f$ der Strecke $D'F'$ auf die Richtung DF dargestellt, und ihre Größe

$$\frac{dl}{dt} = D'f = + 24 \text{ cm sek}^{-1}$$

ist positiv, weil die Strecke $D'f$ den Sinn DF hat. Von den Belastungen der Knoten ist, um die Zeichnung nicht mit Linien zu überladen, nur die wagerechte Last K_1 des Knotens D und die lotrechte Last K_2 des Knotens E eingetragen worden. Für diese beiden Lasten haben die Schubgeschwindigkeiten die Größen

$$\frac{dw_1}{dt} = P'd = + 17 \text{ cm sek}^{-1}$$

und

$$\frac{dw_2}{dt} = P'e = + 30 \text{ cm sek}^{-1}.$$

Daher ist nach Gleichung 5):

$$S = \frac{17}{24} K_1 + \frac{30}{24} K_2 = 0,71 K_1 + 1,25 K_2.$$

Beispiel 2. Die Stabkraft des Stabes DE im Bogenfachwerk Abb. 5. Der Maßstab des Fachwerks ist 1:400, der des Geschwindigkeitsplans $1 \text{ cm} = 10 \text{ cm sek}^{-1}$. Um den Geschwindigkeitsplan (Abb. 6) des durch Zerschneiden des Stabes DE entstehenden Getriebes zu bilden, ist von dem mit den Punkten A' und O' zusammenfallenden Pol P' in beliebiger Länge die Strecke

$$A'B' \perp AB$$

zu ziehen und dann aufzutragen:

$$A'B'C'D' \approx ABCD, \quad gC'E' \perp CE, \quad gD'F' \perp DF;$$

ferner von irgend einem Punkt e_1 der Geraden $C'E'$:

$$e_1f_1 \perp EF, \quad e_1f_1g_1 \approx EFG.$$

Man bestimmt dann (vergl. IV, 2) den Punkt G' durch die Geraden gg_1G' und

$$O'G' \perp OG;$$

ferner die Punkte E' , F' durch die Geraden:

$$G'E' \perp GE, \quad G'F' \perp GF$$

Schließlich ist

$$G'J'N'O' \approx GJNO$$

aufzutragen.

Die Dehnungsgeschwindigkeit der Stabstrecke DE des durchschnittenen Stabes wird dargestellt durch die Projektion $D'e$ der

Abb. 5.

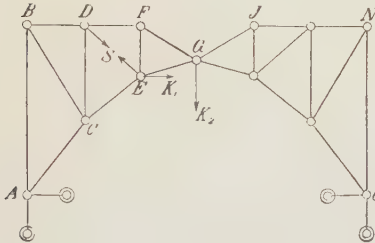
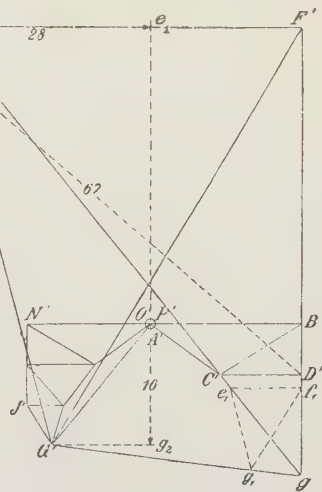


Abb. 6.



Strecke $D'E'$ auf die Richtung des Stabes DE ; sie ist im vorliegenden Fall negativ, weil $D'e$ den Sinn ED hat:

$$\frac{dl}{dt} = -D'e = -67 \text{ cm sek}^{-1}.$$

Auch in diesem Beispiel sind nur zwei Lasten eingetragen worden: die wagerechte Last K_1 des Knotens E und die lotrechte Last K_2 des Knotens G . Die Schubgeschwindigkeiten dieser beiden Kräfte haben die Größen:

$$\frac{dw_1}{dt} = e_1 E' = -28 \text{ cm sek}^{-1}$$

und

$$\frac{dw_2}{dt} = P' g_2 = +16 \text{ cm sek}^{-1}.$$

Erstere ist negativ, weil die Projektion $e_1 E'$ der Geschwindigkeit $P' E'$ des Knotens E dem Sinne der Kraft K_1 entgegengesetzt ist. Die von den beiden Lasten erzeugte Stabkraft hat daher die Größe:

$$S = +\frac{28}{67} K_1 - \frac{16}{67} K_2.$$

5. Beispiel eines Ausnahmefalles. Die in Abb. 7 dargestellte Stabverbindung entspricht den äußeren Kennzeichen eines einfachen Balkenfachwerks: sie hat eine feste und eine bewegliche

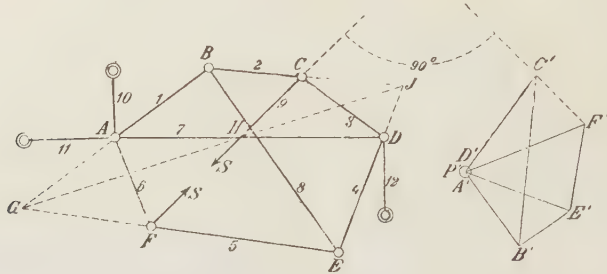


Abb. 7.

Abb. 8.

Stütze, sechs Knoten und zwölf Stäbe. Durchschneidet man den Stab CF , so entsteht ein zwangsläufiges Getriebe, dessen Geschwindigkeitsplan in Abb. 8 dargestellt ist. Mit dem Pol P' fallen die Punkte A' und D' zusammen. Die Strecke

$$A'B' \perp AB$$

hat eine willkürlich gewählte Länge. Der Geschwindigkeitsplan entsteht, indem man

$$D'C' \perp DC, \quad B'C' \perp BC, \quad D'E' \perp DE, \quad B'E' \perp BE, \\ A'F' \perp AF, \quad E'F' \perp EF$$

aufträgt. Im vorliegenden Beispiel ist nun zufällig

$$C'F' \perp CF,$$

d. h. die Dehnungsgeschwindigkeit $\frac{dl}{dt}$ der Stabstrecke CF des durchgeschnittenen Stabes ist gleich null, und Gleichung 5) erhält infolgedessen die Form:

$$S = \frac{\sum K \frac{dw}{dt}}{0}.$$

Die Stabkraft S des Stabes CF wird also *unendlich groß* für jede Last, deren Arbeitsgeschwindigkeit nicht gleich null ist, und sie wird *unbestimmt*, wenn jene Arbeitsgeschwindigkeit die Größe null hat, z. B. wenn gar keine Lasten vorhanden sind.

Die Möglichkeit der *unendlich kleinen* Bewegung des Getriebes bleibt bestehen, auch wenn der Stab CF *nicht* durchgeschnitten wird, weil der Stab bei dieser Bewegung seine Länge nicht ändert. Bei

einer *endlichen* Bewegung des Getriebes ändert sich die Länge l der Stabstrecke CF , und die Gleichung

$$\frac{dl}{dt} = 0$$

zeigt also an, daß die Strecke l in der durch Abb. 7 dargestellten Lage des Getriebes entweder ein *Maximum* oder ein *Minimum* ihrer Länge erreicht. Ein anderes Kennzeichen dieses Zustandes ergibt sich, wie schon oben bemerkt wurde, aus dem Umstande, daß auch das *unbelastete* Stabwerk imstande ist, Stabkräfte aufzunehmen. Diese Kräfte sind unbestimmbar: *eine* derselben kann *nach Belieben* gewählt werden, dann ergeben sich die anderen aus den Gleichgewichtsbedingungen. Im vorliegenden Falle können Gleichgewichtsgruppen gebildet werden aus den vier Stabkräften der Stäbe

$$(1, 5, 7, 9), (2, 4, 7, 9), (1, 3, 8, 9), \\ (4, 6, 8, 9), (2, 6, 7, 8), (3, 5, 7, 8).$$

Daher liegen z. B. die drei Schnittpunkte G, H, J der Stabpaare (1, 5), (7, 9), (2, 4) in einer Geraden, was als Kennzeichen des Ausnahmefalles benutzt werden kann. Stabverbindungen von der Art des vorliegenden Beispiels sind nicht imstande, Lasten zu tragen, und dürfen daher nicht als *Fachwerke* bezeichnet werden. Auch vermeidet man selbstverständlich Fachwerksformen, welche solchen Ausnahmefällen sich nähern, weil es unvorteilhaft ist, wenn *kleine* Lasten *große* Stabkräfte hervorrufen können.

6. Anwendung von Momentengleichungen bei Berechnung der Stabkräfte einfacher Fachwerke. Das im Abschnitt 4 beschriebene Verfahren ist nur in seltenen Fällen zweckmäßig, weil die Bildung der Geschwindigkeitspläne zu umständlich und zeitraubend ist. Man kann das Auftragen jener Pläne umgehen, indem man die Bewegung des Getriebes in einzelne Drehbewegungen zerlegt und die hierbei geleisteten Arbeiten durch Rechnung bestimmt.

Beispiel. Die unendlich kleine Bewegung des in Abb. 3 dargestellten Getriebes kann in zwei einfachere Bewegungen zerlegt werden. Die *erste* Bewegung besteht in einer unendlich kleinen Drehung des ganzen Fachwerks um den Knoten A ; sie wird ermöglicht, indem man den Stab GJ durchschneidet. Bei dieser Drehung leisten die Kräfte K_1, K_2 und die Stabkraft S_1 des durchschnittenen Stabes GJ Arbeit. Bezeichnet M_1 das *statische Moment* der drei arbeitenden Kräfte in bezug auf den Drehpunkt A und φ_1 den unendlich kleinen Drehwinkel, so ist $M_1 \varphi_1$ die Arbeitsumme. Die *zweite* Bewegung besteht in einer unendlich kleinen Drehung φ_2

des Fachwerksteils EEG um den Schnittpunkt N der beiden Stäbe CF und DE . Hierbei leisten die auf den genannten Fachwerksteil wirkenden Kräfte K_2, S, S_1 die Arbeit $M_2 \varphi_2$, wenn mit M_2 das *statische Moment* jener Kräfte in bezug auf den Drehpunkt N bezeichnet wird. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ist die Summe dieser Arbeiten gleich null:

$$M_1 \varphi_1 + M_2 \varphi_2 = 0. \quad (6)$$

Indem man die Momentenarme aus der Zeichnung abgreift, erhält man:

$$\begin{aligned} M_1 &= 700 K_1 + 800 K_2 + 1080 S_1 \\ M_2 &= -80 K_2 + 200 S_1 + 180 S. \end{aligned}$$

Die Bewegung des Getriebes entsteht nun, wenn man die unendlich kleinen Drehwinkel φ_1, φ_2 so wählt, daß aus der Arbeitssumme das Glied mit S_1 verschwindet. Setzt man demgemäß

$$\varphi_1 : \varphi_2 = -10 : +54,$$

so erhält die einzige Unbekannte S in Gleichung 6) den Wert:

$$S = 0,72 K_1 + 1,27 K_2,$$

was mit dem Ergebnis desselben Beispiels im Abschnitt 4 übereinstimmt. Zu demselben Ergebnis gelangt man offenbar, indem man

$$\varphi_1 = \varphi_2 = +1$$

und

$$M_1 = M_2 = 0$$

setzt; denn auch hierdurch wird die Bedingung der Gleichung 6) erfüllt.

Auf diesem Wege entsteht das sogenannte *Momentenverfahren*: Man bildet durch Zerschneiden einzelner Stäbe einen frei beweglichen Fachwerksteil und bestimmt die Stabkräfte der durchschnittenen Stäbe durch Momentengleichungen. Die Wahl der zu durchschneidenden Stäbe, die Wahl der Dreh- oder Momentenpunkte und die Reihenfolge der Momentengleichungen sind, wenn möglich, so anzuordnen, daß in jeder Gleichung nur *eine* unbekannte Stabkraft vorkommt. In dem vorliegenden Beispiel enthält die Gleichung

$$M_1 = 0$$

nur die unbekannte Stabkraft S_1 , und nachdem diese Stabkraft bestimmt worden ist, enthält die Gleichung

$$M_2 = 0$$

nur die unbekannte Stabkraft S .

In manchen Fällen liegt der zu wählende Momentenpunkt unendlich fern; dann verwandelt sich die Drehung des Fachwerksteils

in eine Parallelverschiebung und die Momentengleichung in eine Projektionsgleichung, welche ausdrückt, daß die algebraische Summe der Projektionen aller auf den Fachwerksteil einwirkenden Kräfte in bezug auf die Verschiebungsrichtung gleich null sein muß.

Wenn die bezeichnete Anordnung der Rechnung *nicht* ausführbar ist, so zerlegt man die $2k$ Stäbe des Fachwerks in zwei Gruppen. Die Stabkräfte der *ersten* Gruppe werden als *unbekannte Belastungen* des Fachwerks in die Rechnung eingeführt. Die k_1 Stäbe dieser Gruppe sind in *möglichst geringer Anzahl* so auszuwählen, daß es möglich wird, durch jede der $2k$ Gleichgewichtsbedingungen eine zur *zweiten* Gruppe gehörende Stabkraft ohne weiteres, d. h. ohne Verbindung mit anderen Gleichungen als Funktion der Lasten mit Einschluß der oben bezeichneten unbekannten *Stablasten* darzustellen. Da die zweite Gruppe nur $2k - k_1$ Stäbe enthält, so werden auf dem bezeichneten Wege k_1 Stabkräfte durch je *zwei* Gleichungen bestimmt. Indem man diese beiden Werte einander gleichsetzt, ergeben sich k_1 Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Stablasten, d. h. der Stabkräfte der *ersten* Gruppe. Als Beispiel kann Abb. 7 dienen, wenn angenommen wird, daß nicht der Ausnahmefall vorliegt. Betrachtet man z. B. den Stab 9 als Laststab, führt also die beiden Stabkräfte S_9 als Belastungen der Knoten C und F ein, die zu den übrigen, nicht in die Zeichnung eingetragenen Knotenlasten K hinzutreten, so ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen der Knoten C, F, B, E, D, A in dieser Reihenfolge die Stabkräfte der Stäbe $(2, 3), (5, 6), (1, 8), (4, 5), (7, 12), (10, 11)$. Man bestimmt also die Stabkraft S_9 *zweimal* als Funktion der Stablast S_9 und erhält durch Gleichsetzen der beiden Werte die Unbekannte S_9 als Funktion der gegebenen Knotenlasten K . Es wird selten nötig, mehr als *eine* Stablast einzuführen.

7. Graphische Bestimmung der Stabkräfte eines einfachen Fachwerks, dessen Lasten nach Größe und Richtung gegeben sind. In der Regel sind die Lasten eines Fachwerks zwischen gegebenen Grenzen *veränderlich*. Um die Grenzwerte, zwischen welchen jede Stabkraft sich verändern kann, zu bestimmen, ist es also nötig, zunächst die Stabkraft als Funktion aller Lasten darzustellen. Wenn auch die *Richtung* der Lasten sich verändern kann, so muß für jeden Knoten eine wagerechte und eine lotrechte Last in die Rechnung eingeführt werden. Der Fall, in welchem alle Lasten des Fachwerks von vornherein gegeben sind, ist demnach verhältnismäßig selten; er tritt beispielsweise ein, wenn nur lotrechte

Lasten zu berücksichtigen sind, und wenn alle Stabkräfte oder wenigstens ein Teil derselben bei der größten Belastung ihre Maximalwerte erreichen. In solchen Fällen kann das folgende graphische Verfahren angewandt werden: Man bildet die Kräftepolygone für die Gleichgewichtsgruppen der einzelnen Knoten in einer solchen Reihenfolge, daß in jedem Polygon nur *zwei* unbekannte Stabkräfte zu bestimmen sind, und stellt darauf die Polygone zu einem *Kräfteplan* zusammen. Wenn die bezeichnete Reihenfolge nicht ausführbar ist, so nimmt man zur Bestimmung einzelner Stabkräfte die Rechnung zu Hilfe. Bei der Zusammenstellung des Kräfteplans können zwei Anordnungen in Frage kommen.

Erste Anordnung. Man vermeidet *verschränkte* Polygone und bildet jedes Kräftepolygon mit dem *positiven* Umfassungssinn, d. h. so, daß die Polygonfläche *rechts* von den durch die Polygonseiten dargestellten Kräften liegt. Man legt darauf die Kräftepolygone von außen so aneinander, daß eine Ueberdeckung der Polygone vermieden wird. Der Sinn der Kräfte braucht nicht in die Zeichnung eingetragen zu werden, da er durch den positiven Umfassungssinn bestimmt wird.

Zweite Anordnung. Wenn die Stäbe des Fachwerks und die von den Knoten aufzunehmenden äußeren Kräfte mit der Projektion der Kanten eines *Polyeders* oder eines Polyederteils zusammenfallen, so kann der Kräfteplan des Fachwerks so angeordnet werden, daß er die Projektion des zugehörigen *reziproken* Polyeders darstellt. Aus der Abhandlung I, 26 ist zu ersehen, daß die dort beschriebenen Projektionen reziproker Polyeder genau in derselben Beziehung zueinander stehen wie das Fachwerk zu seinem Kräfteplan: Die Projektion einer jeden Kante des einen Polyeders ist parallel gerichtet zur Projektion der ihr entsprechenden Kante des anderen Polyeders. Demgemäß entspricht einem jeden Stabe des Fachwerks die ebenso gerichtete Stabkraft im Kräfteplan. Ferner entspricht einer jeden Ecke des einen Polyeders das geschlossene Polygon der ihr entsprechenden Seitenfläche des zweiten Polyeders; oder in der Anwendung auf das Fachwerk: einem jeden Knoten entspricht im Kräfteplan das geschlossene Polygon seiner Kräftegruppe. Ebenso entspricht einem jeden Knotenpunkt im Kräfteplan, d. h. einem Punkte, von dem mehrere Kraftstrecken ausgehen, ein Stabpolygon in der Fachwerksfigur. Hierdurch ist die Anordnung des Kräfteplans gegeben, während seine Abmessungen durch die gegebenen Größen der äußeren Kräfte bestimmt werden.

Abb. 9.

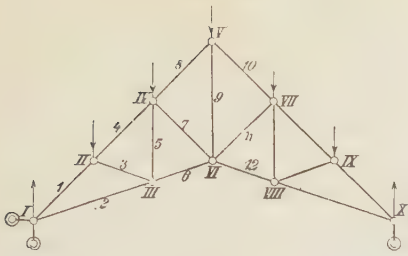


Abb. 11.

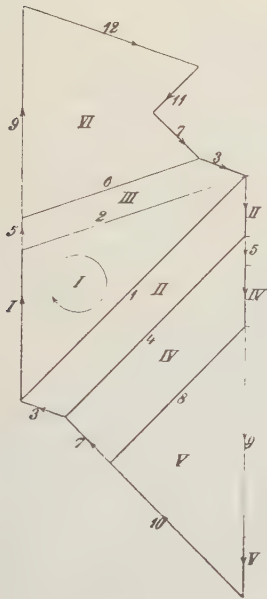
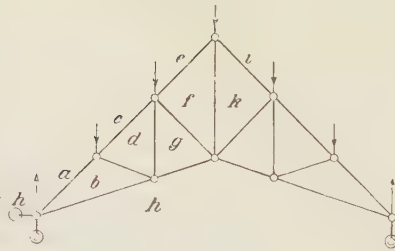


Abb. 10.

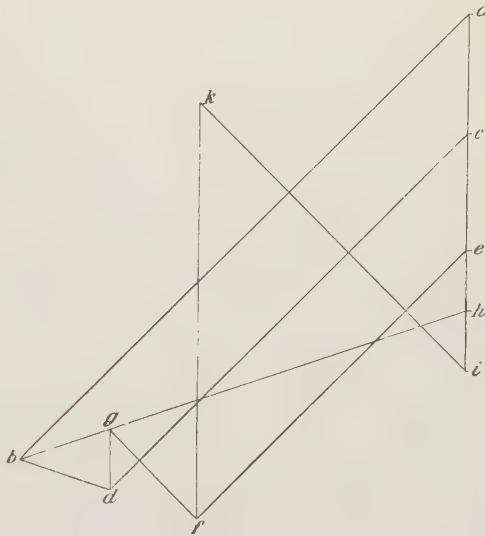


Abb. 12.

Das folgende Beispiel möge die beiden Anordnungen erläutern: Das in den Abb. 9 und 11 im Maßstabe 1 : 300 dargestellte Fachwerk ist symmetrisch geformt und belastet, so daß der Kräfteplan nur für eine Hälfte des Fachwerks zu bilden ist.

Für die *erste* Anordnung des Kräfteplans, der in Abb. 10 im Maßstabe 1 cm = 3000 kg dargestellt ist, bezeichnet man die Knoten des Fachwerks (Abb. 9), und zwar *in der Reihenfolge, wie die Kräftepolygone zu bilden sind*, mit römischen Ziffern, die Stäbe mit arabischen Ziffern. Im Kräfteplan werden die Knotenlasten und Stützkkräfte mit den Ziffern der Knoten, die Stabkräfte mit den Ziffern der Stäbe bezeichnet. Die Kräftepolygone können erforderlichenfalls zur Erleichterung der Uebersicht mit den Knotennummern

bezeichnet werden. Auf den Knoten I wirken außer der lotrechten Stützkraft I, die aus den gegebenen Knotenlasten durch Rechnung zu bestimmen ist, die beiden unbekannten Stabkräfte der Stäbe 1 und 2, welche durch das Kräftedreieck I bestimmt werden. Da der *positive* Umfahrungssinn gegeben ist, so setzt sich 2 an I und 1 an 2. Die vom Knoten I aufzunehmende Stabkraft 2 zeigt also nach *rechts*, während 1 nach *links* zeigt. Hieraus erkennt man, daß der Stab 1 *gedrückt*, der Stab 2 *gezogen* wird. Die Zugkräfte und die Druckkräfte werden im Kräfteplan durch feine und stärkere Linien voneinander unterschieden. Der Knoten II hat außer der Knotenlast II die bekannte Stabkraft 1 und die zwei unbekannten Stabkräfte 3 und 4 aufzunehmen, die durch das Kräftepolygon II bestimmt werden. Der positive Umfahrungssinn dieses Polygons läßt erkennen, daß die auf den Knoten II wirkenden Stabkräfte 3 und 4 nach *links* zeigen, also *Druckkräfte* darstellen. Nachdem in derselben Weise durch die Kräftepolygone III, IV und V die Stabkräfte (5, 6), (7, 8), (9, 10) bestimmt worden sind, gewinnt man eine Probe für die Genauigkeit des Verfahrens, indem man durch das Kräftepolygon VI die Stabkräfte 11 und 12 ermittelt, die der Symmetrie wegen mit 7 und 6 übereinstimmen müssen.

Die Abb. 12 zeigt die *zweite* Anordnung des Kräfteplans im Maßstabe $1\text{ cm} = 1500\text{ kg}$. Für diese Anordnung bezeichnet man die Teile der Bildfläche, welche durch die Stäbe und die äußeren Kräfte voneinander getrennt werden, mit den Buchstaben *a, b, c...* und jede Kraft durch die zwei Buchstaben der angrenzenden Flächenteile; es bezeichnet also z. B. *ha* die lotrechte Stützkraft des Knotens I, *ab* die Stabkraft 1, *ac* die Last des Knotens II usf. Nachdem die Stützkraft *ha* durch Rechnung bestimmt worden ist, ergibt das Kräftedreieck *hab* Größe und Sinn der beiden auf den Knoten I wirkenden Stabkräfte *ab* und *bh*, die in der *ersten* Anordnung (Abb. 10) die Bezeichnungen 1 und 2 tragen. Der Umfahrungssinn ist durch die nach oben zeigende Stützkraft *ha* bestimmt; er ist im vorliegenden Fall *negativ* und zeigt, daß der Stab *ab* *gedrückt*, der Stab *bh* dagegen *gezogen* wird. Das Polygon *bacd* des Knotens II wird gebildet von der nach oben zeigenden Druckkraft *ba* gegen den Knoten II, von der nach unten zeigenden Knotenlast *ac* und den beiden unbekannten Stabkräften *cd* und *db*, deren Lage im Kräfteplan durch die beiden Punkte *c* und *b* bestimmt ist. Der Umfahrungssinn dieses Vierecks ist also *positiv* und läßt die beiden Stabkräfte *cd*, *db* als *Druckkräfte* erkennen. In dem folgenden Kräftepolygon *hbdgh* des Knotens III sind die drei

Ecken h , b und d bereits gegeben; die Lage der beiden unbekannten Stabkräfte dg und gh im Kräfteplan ist also hierdurch bestimmt. Die Seite gh fällt auf hb . Da die Druckkraft bd gegen den Knoten III nach *rechts* zeigt, so ist der Umlaufungssinn des Vierecks $hbdg$ *negativ* und zeigt, daß die Stäbe dg , gh *gezogen* werden. Die Entstehung der Kräftepolygone $gdcefg$ und $feik$, der Knoten IV und V bedarf hiernach keiner weiteren Erklärung.

Daß den Polyederflächen $a, b, c \dots$ in Abb. 11 die Ecken $a, b, c \dots$ im Kräfteplan (Abb. 12) entsprechen, kann durch diese Bezeichnung deutlich zur Anschauung gebracht werden. Dagegen ist es nicht möglich, die Polyederflächen hab , $bacd$, $hbdg$, $gdcef$, $feik$ in Abb. 12 mit den Nummern I, II, III, IV, V der in den Abb. 9 und 11 ihnen entsprechenden Ecken in unzweideutiger Weise zu bezeichnen, weil jene Polygone einander überdecken.

Eine Vergleichung der beiden beschriebenen Anordnungen des Kräfteplans läßt erkennen, daß die reziproken Figuren folgende zwei Vorteile gewähren: Jede Stabkraft braucht nur *einmal* aufgetragen zu werden, und der Kräfteplan erfordert bei gegebenem Maßstabe weniger Raum, weil die Kräftepolygone einander überdecken.

In der *ersten* Anordnung müssen die Stabkräfte der sogenannten Füllungsstäbe 3, 5, 7, 9 je *zweimal* aufgetragen werden. Dagegen gewährt diese Anordnung den wesentlichen Vorteil der größeren Einfachheit und Uebersichtlichkeit und sichert daher besser gegen Irrtümer und Flüchtigkeitsfehler. Unseres Erachtens verdient sie den Vorzug in allen verwickelten Fällen, während bei einfacher Gestaltung des Kräfteplans die zweite Anordnung anzuwenden ist. Es ist aber zu beachten, daß die zuletzt genannte Anordnung nicht immer ausführbar ist, und daß man in manchen Fällen nicht ohne weiteres erkennen kann, ob die Fachwerksfigur die Projektion eines Polyeders bildet.

Als Beispiel wählen wir das in Abb. 13 im Maßstabe 1:250 dargestellte Fachwerk, zu dem eine reziproke Figur sich nicht bilden

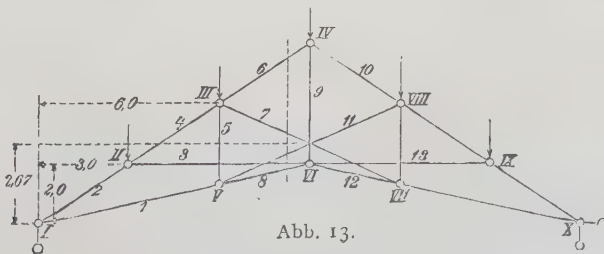


Abb. 13.

läßt, weil es nicht die Projektion eines Polyeders darstellt. Das Fachwerk ist symmetrisch geformt und belastet; es trägt in den Knoten II, III, IV, VIII, IX Lasten von 2000 kg, während die Knoten V, VI, VII der unteren Gurtung unbelastet sind. Die beiden lotrechten Stützkkräfte I und X sind also gleich 5000 kg. Der Kräfteplan Abb. 14 zeigt die *erste* Anordnung; sein Maßstab ist 1 cm gleich 2500 kg. Alle Kräftepolygone haben den *positiven* Umfahrungs-

sinn. Die beiden Kräftepolygone I, II bestimmen die Stabkräfte 1, 2, 3 und 4. Die Bildung des Kräfteplans kann nicht ohne weiteres fortgesetzt werden, weil auf jeden der folgenden Knoten III, IV, V... mehr als *zwei* unbekannte Stabkräfte einwirken. Wir durchschneiden die Stäbe 3, 6, 7, 11, 8 und bilden die Momentengleichung für den links vom Schnitt liegenden Fach-

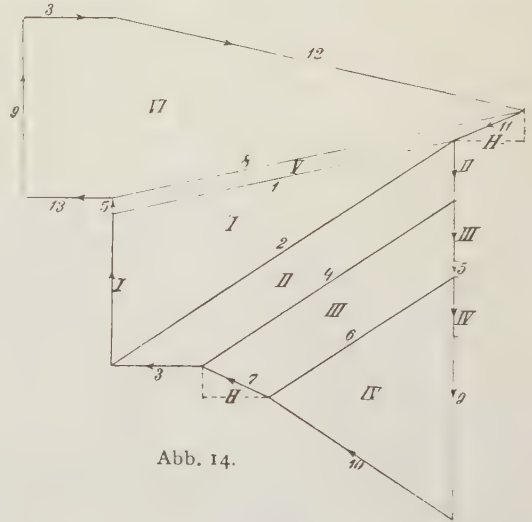


Abb. 14.

werksteil in bezug auf den Knoten I. Die beiden Stabkräfte 7 und 11 haben der Symmetrie wegen gleichen Sinn und gleiche Größe, folglich eine *wagerechte* Resultante $2H$, die nach *rechts* zeigt, wenn die beiden Stäbe *gezogen* werden. Die Momentenarme der in Betracht kommenden Kräfte II, III, $2H$ und 3 haben in dieser Reihenfolge die Größen $3m$, $6m$, $2,67m$, $2m$. Die aus dem Polygon II zu entnehmende Stabkraft 3 ist eine Druckkraft, zeigt also nach links und ist gleich 3000 kg. Die Momentengleichung lautet demnach:

$$0 = 2000 \cdot 3 + 2000 \cdot 6 + 2H \cdot 2,67 - 3000 \cdot 2,$$

woraus sich die Horizontalprojektion H einer jeden der beiden Stabkräfte 7 und 11 ergibt:

$$H = -2250 \text{ kg.}$$

Die beiden Stäbe 7 und 11 werden also nicht gezogen, sondern *gedrückt*. Hierauf können die Kräftepolygone der Knoten III, IV, V, VI in dieser Reihenfolge gebildet werden. Das Polygon VI dient als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung.

8. Einflußzahlen und Einflußlinien. Aus den vorstehenden Abschnitten ist zu ersehen, daß jede Stabkraft S eines einfachen Fachwerks durch eine Gleichung von der Form

$$S = x_1 K_1 + x_2 K_2 + x_3 K_3 + \dots = \sum x K \quad (7)$$

dargestellt werden kann, wenn die Knotenlasten von gegebener Richtung, aber veränderlicher Größe mit $K_1, K_2 \dots$ bezeichnet werden. Die nur von der Form des Fachwerks abhängigen algebraischen Zahlen $x_1, x_2 \dots$ werden die *Einflußzahlen* der Knotenlasten $K_1, K_2 \dots$ in bezug auf die Stabkraft S genannt, weil z. B. $x_1 K_1$ den Teil der Stabkraft S bezeichnet, der von der Last K_1 erzeugt wird. Wenn K_1 gleich *eins* ist, während alle anderen Knotenlasten $K_2, K_3 \dots$ beseitigt werden, nimmt S den Wert x_1 an. Man bestimmt also die Einflußzahlen x_1 der Knotenlast K_1 für *alle* Stabkräfte $S_1, S_2, S_3 \dots$ durch den Kräfteplan des Fachwerks für den bezeichneten Belastungsfall, in welchem nur die Last K_1 gleich eins auf das Fachwerk einwirkt. Dieser Weg ist in der Regel einfacher und zweckmäßiger als die Anwendung des im Abschnitt 4 beschriebenen Verfahrens.

Die *Einflußlinie* einer Stabkraft S entsteht, indem man für jede Abszisse x der wandernden Last K die Einflußzahl x nach einem willkürlich zu wählenden Maßstabe durch die Ordinate der Linie darstellt.

Beispiel. Das in Abb. 15 im Maßstabe 1:1000 dargestellte einfache Balkenfachwerk ist in bezug auf seine Mittelachse symmetrisch geformt. Die veränderlichen lotrechten Lasten werden durch Zwischenträger auf die Knoten der *unteren* Gurtung übertragen. Die Zwischenträger sind durch die Knoten *frei* gestützt, d. h. sie bilden keinen kontinuierlichen Balken. Infolgedessen sind die Einflußlinien der Stabkräfte *Polygone*, deren Ecken in den Loten der Knotenpunkte liegen, welche die Lasten aufnehmen, wie man aus der folgenden Ueberlegung erkennt. Liegt die wandernde Last K gleich eins z. B. auf dem Zwischenträger IV VI von der Stützweite f und in dem Abstände x vom Knoten IV, so überträgt der Zwischenträger auf die beiden genannten Knoten die Lasten $\frac{f-x}{f}$ und $\frac{x}{f}$. Diese beiden Lasten erzeugen in einem Stabe, dessen Einflußzahlen für die Lasten der Knoten IV und VI mit x_4 und x_6 bezeichnet werden, die Stabkraft $\frac{f-x}{f} x_4 + \frac{x}{f} x_6$. Für jede Last des

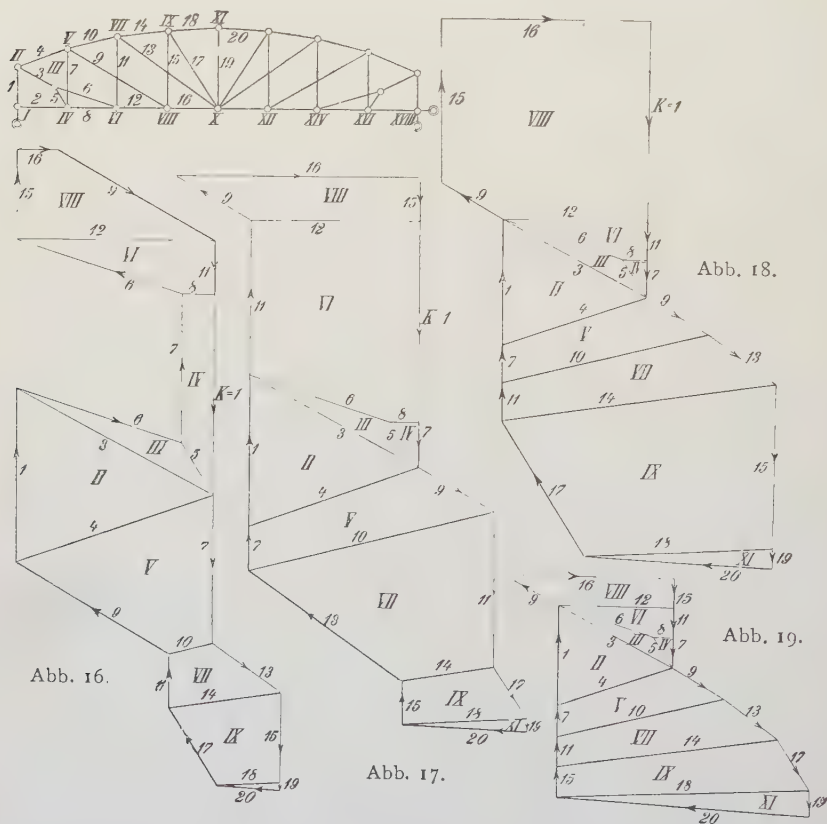
Zwischenträgers IV VI ergibt sich also die Einflußzahl x aus der Gleichung

$$x = \frac{f-x}{f} x_4 + \frac{x}{f} x_6,$$

d. h. aus der Gleichung der *geraden Linie*, die in den Loten der Knotenpunkte IV und VI die Ordinaten x_4 und x_6 hat.

Die Abb. 16, 17, 18, 19 bilden die Kräftepläne der linken Trägerhälfte für die vier Fälle, in welchen die Last K gleich eins auf die Knoten IV, VI, VIII, X einwirkt. Der Maßstab dieser Pläne ist 1 cm gleich der Zahl $\frac{3}{8}$; die Last K wird demnach durch eine Strecke von der Länge $2\frac{2}{3}$ cm dargestellt.

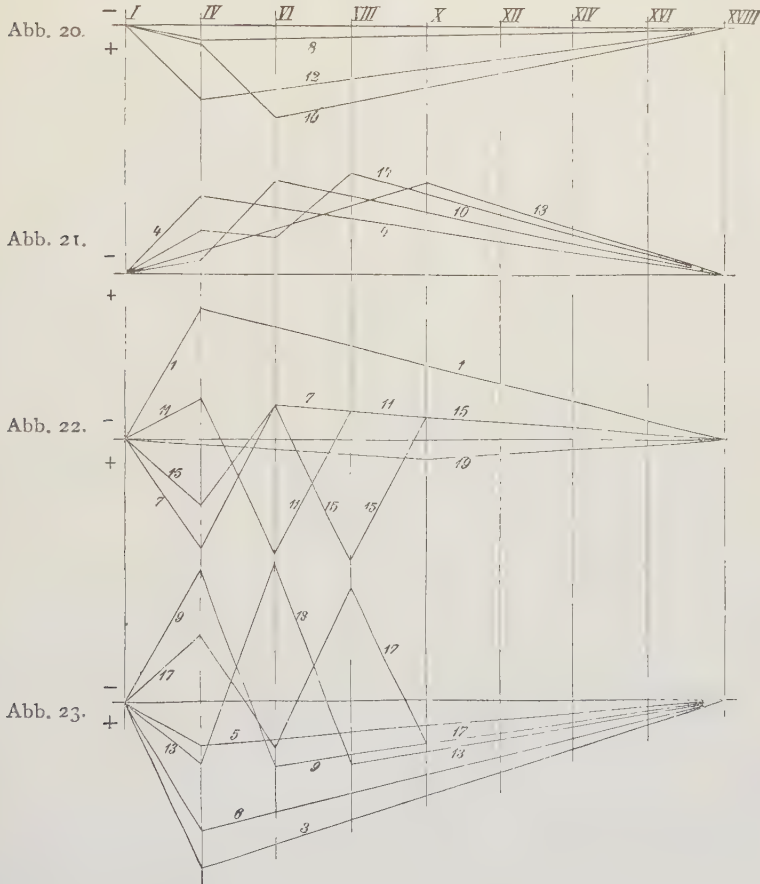
Abb. 15.



Bewegt sich die Last K auf der *rechten* Balkenhälfte, so ändert sich jede Stabkraft der *linken* Balkenhälfte proportional dem Ab-

stande der Last K vom rechten Balkenaufleger XVIII. Die Einflußpolygone jener Stabkräfte werden daher auf der rechten Balkenhälfte durch gerade Linien gebildet, deren Ordinaten für den Knoten XVIII gleich null sind und für den Knoten X durch den Kräfteplan der Abb. 19 bestimmt werden.

Mit Benutzung der Kräftepläne Abb. 16 bis 19 sind in den Abb. 20 bis 23 die Einflußlinien der Stabkräfte für die linke Balkenhälfte

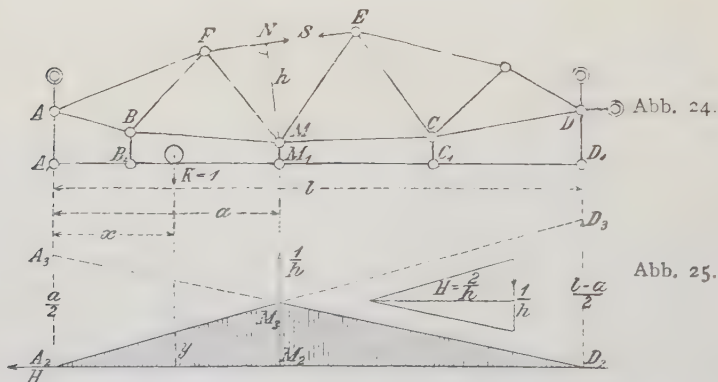


gebildet worden. Abb. 20 bezieht sich auf die Stäbe der *unteren Gurtung*, Abb. 21 auf die Stäbe der *oberen Gurtung*, Abb. 22 auf die *Ständer* und Abb. 23 auf die *Streben*. Die *positiven* Ordinaten liegen *unter*, die *negativen* *über* der Abszissenachse. Der Maßstab der Ordinaten als Darstellung der Einflußzahlen ist in den Abb. 20 und 21 1 cm

gleich eins und in den Abb. 22, 23 doppelt so groß, also 1 cm gleich $\frac{1}{2}$, während die Einflußzahlen in den Kräfteplanen der Abb. 16 bis 19, wie schon oben angegeben wurde, in dem Maßstabe 1 cm gleich $\frac{3}{8}$ dargestellt werden.

9. Darstellung der Einflußlinien durch Seilpolygone. In einigen Anwendungen erweist es sich als zweckmäßig, die Einflußlinien als Seilpolygone anzusehen. Wir verweisen auf das Beispiel 3 im Abschnitt 9 der Abhandlung II. Die Belastungen des Seils, welches mit der Einflußlinie sich deckt, können durch Rechnung oder auf graphischem Wege bestimmt werden. Diese Bestimmung gestaltet sich besonders einfach in allen Fällen, in welchen zur Berechnung der Stabkraft das im Abschnitt 6 beschriebene Momentenverfahren benutzt werden kann. Die folgenden Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

Das in den Abb. 24, 26 und 28 im Maßstabe 1 : 400 dargestellte Balkenfachwerk erhält seine Belastungen durch Vermittlung von Zwischenträgern, die an die Knoten der unteren Gurtung gehängt sind. Die Stützweite des Balkens wird mit l , die Abszisse der wandernden Einzellast K mit x und die Abszisse des Momentenpunktes M mit a bezeichnet. Die Last K gleich eins erzeugt in den Knoten A und D (Abb. 24) lotrechte Auflagerkräfte von den Größen $\frac{l-x}{l}$ und $\frac{x}{l}$.



Beispiel 1. Einflußlinie eines Stabes EF der oberen Gurtung. Man zerlegt das Fachwerk durch einen Schnitt, der außer dem Stabe EF die beiden Stäbe FM und BM trifft. Der Schnittpunkt

dieser beiden Stäbe, also der Knoten M der *unteren* Gurtung ist der *Momentenpunkt*, auf den die Momentengleichung des *unbelasteten* Fachwerksteils bezogen wird. Diese Gleichung ergibt für die Stabkraft S des Stabes EF , deren Arm in bezug auf den Momentenpunkt M mit h bezeichnet wird, wenn x kleiner als a ist:

$$S = z = - \frac{x(l-a)}{lh},$$

und wenn x größer als a ist:

$$S = z = - \frac{(l-x)a}{lh}.$$

Das Einflußpolygon ist also ein Dreieck $A_2 M_3 D_2$ (Abb. 25), dessen Höhe $M_2 M_3$ in dem Lot des Momentenpunktes M die Größe

$$M_2 M_3 = - \frac{a(l-a)}{lh}$$

hat.

Belastet man einen geraden, in seinen Endpunkten A_2, D_2 (Abb. 25) gestützten Balken in dem Lot des Momentenpunktes M mit der nach oben zeigenden negativen Last $-\frac{1}{h}$, so wird für jede Abszisse x das *Biegemoment* des Balkenquerschnitts dargestellt durch die Einflußzahl z , also durch die Ordinate y des Einflußpolygons; denn die Last $-\frac{1}{h}$ erzeugt in den Auflagern A_2 und D_2 nach unten zeigende Auflagerdrücke von den Größen $\frac{(l-a)}{lh}$ und $\frac{a}{lh}$. Folglich ist für den Balkenquerschnitt von der Abszisse x das Biegemoment gleich $-\frac{x(l-a)}{lh}$ oder $-\frac{(l-x)a}{lh}$, je nachdem x kleiner oder größer als a ist. Für die Bildung des Seilpolygons $A_2 M_3 D_2$ der Last $-\frac{1}{h}$ wurde die Horizontalkraft

$$H = \frac{2}{h}$$

gewählt. Daher ist der Maßstab der Ordinaten y als Darstellung der Einflußzahlen z :

$$1 \text{ cm} = \frac{2 \cdot 400 \text{ cm}}{h} = \frac{800 \text{ cm}}{540 \text{ cm}} = \frac{40}{27}.$$

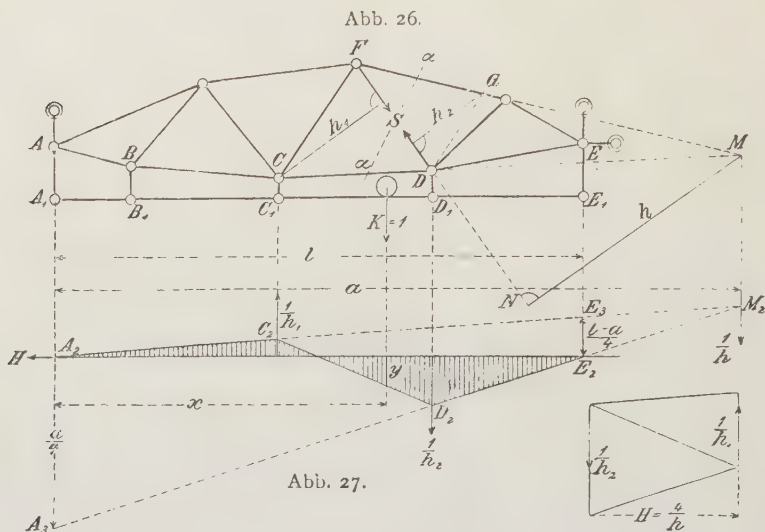
Die Abschnitte $A_2 A_3$ und $D_2 D_3$ der Seilpolygonseiten auf den Auflagerloten ergeben sich nach (II, 7) aus den Momentengleichungen

$$A_2 A_3 \frac{2}{h} = -a \frac{1}{h}, \quad D_2 D_3 \frac{2}{h} = -(l-a) \frac{1}{h}.$$

Diese Abschnitte

$$A_2 A_3 = -\frac{a}{2}, \quad D_2 D_3 = -\frac{l-a}{2}$$

genügen zum Auftragen des Einflußpolygons. Das negative Vorzeichen deutet an, daß die Abschnitte *über* der Abszissenachse liegen.



Beispiel 2. Einflußlinie der Stabkraft S in der Strebe DF (Abb. 26 und 27). Der Schnitt $\alpha\alpha$ durch das Fachwerk trifft außer der Strebe DF die Gurtstäbe CD und FG , deren Schnittpunkt den Momentenpunkt M bestimmt. Die Momentengleichung für den unbelasteten Fachwerksteil ergibt, wenn wieder mit h der Arm der Stabkraft S bezeichnet wird, für

$$x < A_1 C_1: \quad S = z = -\frac{x(a-l)}{lh}$$

und für

$$x > A_1 D_1: \quad S = z = +\frac{(l-x)a}{lh}.$$

Hierdurch ist die Form des Einflußpolygons $A_2 C_2 D_2 E_2$ (Abb. 27) bestimmt. Bei Ermittlung der in den Loten von C_1 und D_1 anzubringenden Lasten $\frac{1}{h_1}$ und $\frac{1}{h_2}$, die in den Querschnitten des Balkens $A_2 E_2$ die Biegemomente x hervorrufen, kommt die Lage der beiden Fachwerkteile O und U , die den *oberen* Knoten F und

den *unteren* Knoten D der Strebe FD enthalten, in Betracht. Im vorliegenden Beispiel liegt O links und U rechts vom Schnitt $\alpha\alpha$. Die Belastung $\frac{1}{h_1}$ des Balkenteils O zeigt nach *oben*, trägt also das negative Vorzeichen, während die Belastung $\frac{1}{h_2}$ des Balkenteils U nach *unten* zeigt, also positiv ist. Die Größen dieser Lasten werden alsdann bestimmt durch die Bedingung, daß ihre Resultante durch den Momentenpunkt M gehen und die Größe $\frac{1}{h}$ haben muß. Man überzeugt sich hiervon, wenn man beachtet, daß die beiden Lasten $\frac{1}{h_1}$ und $\frac{1}{h_2}$ des Balkens $A_2 E_2$ (Abb. 27) in A_2 einen nach unten zeigenden Auflagerdruck von der Größe $\frac{1}{h} \frac{a-l}{l}$ und in E_2 einen nach oben zeigenden Auflagerdruck $\frac{1}{h} \frac{a}{l}$ erzeugen. Daher ist das Biegemoment $\varkappa$ eines Balkenquerschnitts von der Abszisse

$$x < A_1 C_1: \quad \varkappa = - \frac{x(a-l)}{lh},$$

während für jeden Querschnitt von einer Abszisse

$$x > A_1 D_1: \quad \varkappa = + \frac{(l-x)a}{lh}$$

wird. Aus der Größe und der Lage der Resultanten $\frac{1}{h}$ der beiden Lasten $\frac{1}{h_1}$ und $\frac{1}{h_2}$ ergibt sich die Bedingung (Abb. 26):

$$\frac{1}{h} : \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} = CD : MD : CM$$

oder

$$h_1 = h \frac{CD}{MD}, \quad h_2 = h \frac{CD}{CM} = h \frac{FG}{FM},$$

wenn

$$DG \parallel CF$$

gezogen wird. h_1 und h_2 sind demnach die Abstände der Punkte C und G von der Strebe DF .

Für die Bildung des Seilpolygons $A_2 C_2 D_2 E_2$ (Abb. 27) wurde die Horizontalkraft

$$H = \frac{4}{h}$$

gewählt. Da der Maßstab der Abszissen 1:400 ist, so haben die Ordinaten y als Darstellung der Einflußzahlen z den Maßstab

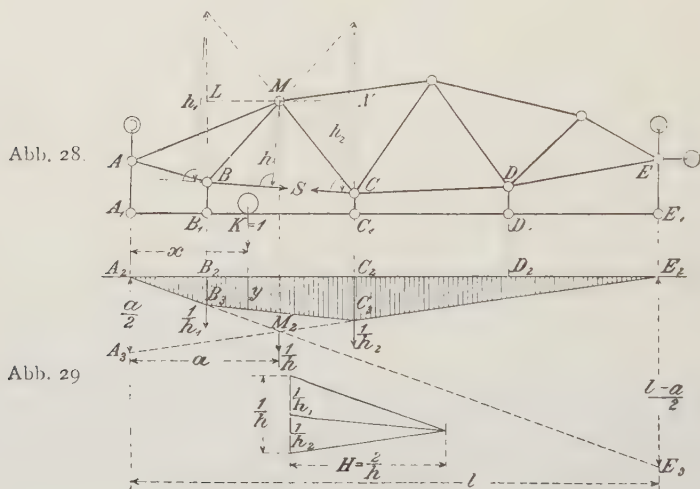
$$1 \text{ cm} = \frac{4 \cdot 400 \text{ cm}}{h} = \frac{1600 \text{ cm}}{1360 \text{ cm}} = \frac{20}{17}.$$

Die Abschnitte A_2A_3 und E_2E_3 des Seilpolygons auf den Auflagern ergeben sich aus den Momentengleichungen für die Punkte A_2 und E_2 :

$$A_2A_3 \frac{4}{h} = a \frac{1}{h}, \quad E_2E_3 \frac{4}{h} = -(a-l) \frac{1}{h}$$

$$A_2A_3 = +\frac{a}{4}, \quad E_2E_3 = -\frac{a-l}{4}.$$

Die Punkte A_3 und E_3 bestimmen die Form des Seilpolygons.



Beispiel 3. Einflußpolygon für den Stab BC der unteren Gurtung. Das Fachwerk ist durch einen Schnitt zu zerlegen, der außer dem Stabe BC noch die zwei Stäbe BM und AM trifft. Diese beiden Stäbe bestimmen den Momentenpunkt M . Die Momentengleichung für den unbelasteten Fachwerksteil ergibt, wenn die Abszisse x der wandernden Einzellast K kleiner als A_1B_1 ist:

$$S = z = + \frac{x(l-a)}{lh},$$

und wenn x größer als A_1C_1 ist:

$$S = z = + \frac{(l-x)a}{lh}.$$

Diese Gleichungen bestimmen die Form des Einflußpolygons $A_2 B_3 C_3 E_2$ (Abb. 29).

Die in den Punkten B_2 und C_2 des Balkens $A_2 E_2$ (Abb. 29) anzubringenden Lasten $\frac{1}{h_1}$ und $\frac{1}{h_2}$, die in den Balkenquerschnitten die Bieugungsmomente κ hervorrufen, zeigen beide nach unten, tragen demnach das positive Vorzeichen, und sind, wie im vorhergehenden Beispiel, der Größe nach bestimmt durch die Bedingung, daß ihre Resultante von der Größe $+\frac{1}{h}$ durch den Momentenpunkt M gehen muß; denn diese Lasten erzeugen in den Auflagern A_2, E_2 des Balkens $A_2 E_2$ nach oben zeigende Drücke von den Größen $\frac{l-a}{lh}$ und $\frac{a}{lh}$ und in den Balkenquerschnitten Bieugungsmomente von den durch die vorstehenden Gleichungen angegebenen Größen κ . Für das Seilpolygon $A_2 B_3 C_3 E_2$, welches diese Bieugungsmomente darstellt, wurde die Horizontalkraft

$$H = \frac{2}{h}$$

gewählt. Der Maßstab der Ordinaten y als Darstellung der Einflußzahlen κ ist daher in diesem Falle

$$1 \text{ cm} = 400 \text{ cm} \frac{2}{h} = \frac{800 \text{ cm}}{460 \text{ cm}} = \frac{40}{23}.$$

Die Lasten $\frac{1}{h_1}$ und $\frac{1}{h_2}$ ergeben sich aus ihrer Lage gegen die Resultante $\frac{1}{h}$:

$$\frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h} = NM : ML : NL.$$

Hieraus folgt die in Abb. 28 angegebene graphische Bestimmung der Längen h_1 und h_2 .

Beispiel 4. Einflußpolygon für den Stab BD des in Abb. 30 dargestellten Balkenfachwerks. In diesem Beispiel läßt sich durch den Stab BD kein Schnitt legen, der außer ihm nur noch zwei Stäbe trifft, und daher kann das Verfahren der vorstehenden Beispiele nicht ohne weiteres angewandt werden. Um dies zu ermöglichen,

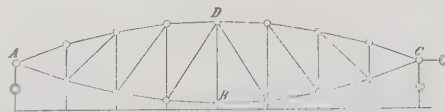


Abb. 30.

spaltet man BD in zwei Stäbe BD_1 und BD_2 (Abb. 31) und wählt die Stabstrecke D_1D_2 unendlich klein. Die Stabkraft x des Stabes BD ist dann offenbar gleich der algebraischen Summe der Stabkräfte x_1, x_2 der beiden Stäbe BD_1 und BD_2 . Auf jeden dieser beiden Stäbe läßt sich aber das Verfahren der vorigen Beispiele anwenden.

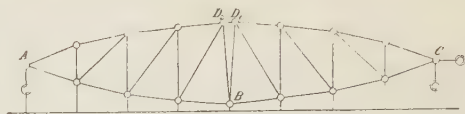


Abb. 31.

10. Berechnung der Formänderungen einfacher Fachwerke. Wir bezeichnen in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit x, y die Koordinaten eines Knotens A (Abb. 32) und mit $\Delta x, \Delta y$ die Aenderungen dieser Koordinaten, die infolge der gegebenen sehr kleinen Längenänderungen $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3 \dots$ der Fachwerkstäbe 1, 2, 3 ... eintreten. Um z. B. Δy zu berechnen, belaste man den Knoten A in der Richtung und dem Sinne der y -Achse mit der Last K und bestimme die von dieser Last in den Stäben 1, 2, 3 ... des einfachen Fachwerks erzeugten Stabkräfte $x_1 K, x_2 K, x_3 K \dots$. Die algebraischen Zahlen $x_1, x_2, x_3 \dots$ sind also die Einflußzahlen der Last K für die Stäbe 1, 2, 3 ... Die Anwendung der Hauptgleichung 1) auf die Gleichgewichtsgruppen der Fachwerksknoten und auf die kleine Bewegung, welche durch die Längenänderungen Δl der Stäbe bestimmt ist, ergibt die Gleichung zur Bestimmung der Verschiebung Δy des Knotens A in der Richtung der y -Achse:

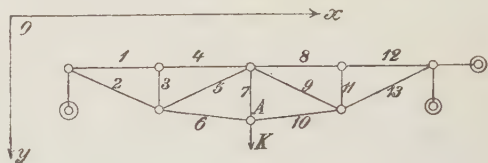


Abb. 32.

$$0 = K \Delta y - x_1 K \Delta l_1 - x_2 K \Delta l_2 - x_3 K \Delta l_3 \dots$$

oder:

$$\Delta y = x_1 \Delta l_1 + x_2 \Delta l_2 + x_3 \Delta l_3 + \dots = \sum x \Delta l. \quad (8)$$

Selbstverständlich sind die Vorzeichen der Größen $x, \Delta l$ und Δy zu beachten.

In gleicher Weise bestimmt man die Längenänderung Δz des Abstandes

$$AB = z$$

zwischen zwei Knoten A, B eines einfachen Fachwerks (Abb. 33).

Man belastet den Knoten A mit einer Last K von der Richtung und dem Sinne der

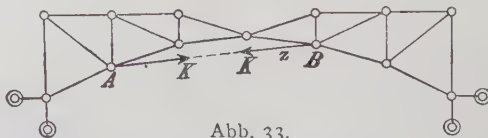


Abb. 33.

Man belastet den Knoten A mit einer Last K von der Richtung und dem Sinne der

Strecke AB , ferner den Knoten B mit einer ebenso großen Last K von der Richtung und dem Sinne der Strecke BA und bestimmt die Stabkräfte $\varkappa K$, die von den beiden Lasten K hervorgerufen werden. Die Hauptgleichung 1) ergibt für diesen Fall:

$$0 = -K\Delta z - \varkappa_1 K\Delta l_1 - \varkappa_2 K\Delta l_2 - \varkappa_3 K\Delta l_3 - \dots$$

also

$$\Delta z = -\sum \varkappa \Delta l. \quad (9)$$

Die Summierungen in den Gleichungen 8) und 9) erstrecken sich auf *alle* Stäbe des einfachen Fachwerks, auch auf die Stützstäbe, wenn die Stützenlage sich ändert, und die Einflußzahlen $\varkappa$ jener Stäbe nicht gleich null sind.

Die Form eines *zusammengesetzten* Fachwerkes wird durch die Längen der *notwendigen* Stäbe vollkommen bestimmt. Jede Formänderung eines solchen Fachwerks wird also durch die Längenänderungen der *notwendigen* Stäbe bestimmt. Sind diese Längenänderungen Δl gegeben, so können zur Bestimmung der Formänderung die Gleichungen 8) und 9) auf das *einfache* Fachwerk angewandt werden, welches entsteht, wenn die überzähligen Stäbe aus dem zusammengesetzten Fachwerke beseitigt werden. Die Einflußzahlen $\varkappa$ beziehen sich also auf die Stäbe jenes einfachen Fachwerks, und die Summierungen erstrecken sich nur auf diese Stäbe. Auch die Längenänderungen der überzähligen Stäbe können auf diesem Wege bestimmt werden (vergl. Abschnitt 14).

II. Bestimmung der Formänderung eines einfachen Fachwerks vermittels eines Geschwindigkeitsplanes. Werden die Strecken Δx , Δy und die gegebenen Längenänderungen Δl durch die Zeitdauer Δt der kleinen Bewegung dividiert, so bestimmen $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ die Komponenten der *Geschwindigkeit* des Knotens A in

den Richtungen der Koordinatenachsen und $\frac{\Delta l_1}{\Delta t}$, $\frac{\Delta l_2}{\Delta t}$, $\frac{\Delta l_3}{\Delta t}$... die

Dehnungsgeschwindigkeiten der Stäbe 1, 2, 3 ... Die gegebenen Dehnungsgeschwindigkeiten bestimmen den *Geschwindigkeitsplan* und hierdurch Größe, Richtung und Sinn der *Wege*, welche von allen Knoten bei der Formänderung des Fachwerks durchlaufen werden. Die Bildung der Geschwindigkeitspläne ist in der Abhandlung IV ausführlich beschrieben worden. Es wird daher genügen, hier einige Beispiele vorzuführen.

Beispiel 1. Es sind die Wege der Knoten des durch Abb. 34 im Maßstabe 1 : 200 dargestellten Fachwerks unter der Voraus-

setzung zu bestimmen, daß der Knoten A auf einem *festen* Lager ruht, während der Knoten E wagerecht sich verschieben kann. Der Stab AB ändert seine Länge um $-0,115$ cm, der Stab AC um $-0,150$ cm, BC um $+0,085$ cm, BD um $-0,205$ cm, CD um $-0,105$ cm, BE um $-0,150$ cm und DE um $-0,140$ cm. Als

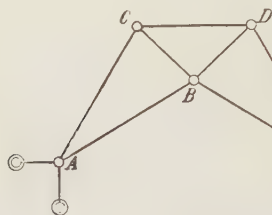


Abb. 34.

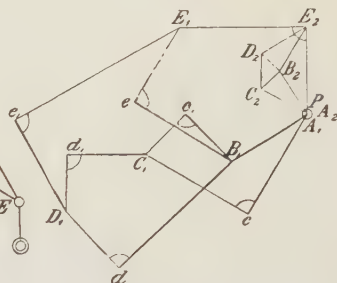


Abb. 35.

Zeitdauer Δt der Bewegung wählen wir 1 Sekunde und als Maßstab des Geschwindigkeitsplans $1 \text{ cm} = 0,1 \text{ cm sek}^{-1}$. Die Knotenwege werden daher durch den Geschwindigkeitsplan in *zehnfacher Vergrößerung* dargestellt.

Wir setzen die Bewegung des Fachwerks aus zwei gleichzeitigen, von einander unabhängigen Bewegungen der Knoten zusammen. Die erste Bewegung wird bestimmt durch die Bedingung, daß der Knoten A festgehalten wird, während der Knoten B auf der festen Geraden AB sich bewegt, und alle Stäbe die oben angegebenen Dehnungen erleiden. Die gleichzeitige zweite Bewegung ist eine Drehung des starren Fachwerks um den festen Punkt A mit einer solchen Drehgeschwindigkeit, daß die aus beiden Bewegungen resultierende Geschwindigkeit E_2E_1 des Knotens E die vorgeschriebene horizontale Richtung erhält. Die Geschwindigkeiten der Knoten $A, B, C \dots$ werden für die erste Bewegung durch die Strecken $PA_1, PB_1, PC_1 \dots$, für die zweite Bewegung durch die Strecken A_2P, B_2P, C_2P und also für die resultierende Bewegung durch die Strecken $A_2A_1, B_2B_1, C_2C_1 \dots$ dargestellt. Die dem ruhenden Knoten A entsprechenden Punkte A_1 und A_2 fallen mit dem Pol P des Geschwindigkeitsplanes zusammen. Es wird ferner bestimmt:

1. Der Punkt B_1 durch die gegebene Dehnungsgeschwindigkeit des Stabes AB :

$$A_1B_1 \parallel AB, \quad A_1B_1 = -1,15 \text{ cm.}$$

Der Sinn A_1B_1 ist dem Sinne AB entgegengesetzt, weil die Dehnungsgeschwindigkeit *negativ* ist (vergl. IV, 1).

2. Der Punkt C_1 durch die gegebenen Dehnungsgeschwindigkeiten der beiden Stäbe AC und BC :

$$\begin{aligned} A_1 c \parallel AC, \quad A_1 c &= -1,50 \text{ cm} \\ B_1 c_1 \parallel BC, \quad B_1 c_1 &= +0,85 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Den Vorzeichen entsprechend hat $A_1 c$ den Sinn CA und $B_1 c_1$ den Sinn BC . Um den Punkt C_1 zu bestimmen, ist

$$c C_1 \perp A_1 c, \quad c_1 C_1 \perp B_1 c_1$$

zu ziehen.

3. Der Punkt D_1 durch die gegebenen Dehnungsgeschwindigkeiten der beiden Stäbe BD , CD :

$$\begin{aligned} B_1 d \parallel BD, \quad B_1 d &= -2,05 \text{ cm} \\ C_1 d_1 \parallel CD, \quad C_1 d_1 &= -1,05 \text{ cm} \\ d D_1 \perp B_1 d, \quad d_1 D_1 &\perp C_1 d_1. \end{aligned}$$

4. Der Punkt E_1 durch die Dehnungsgeschwindigkeiten der Stäbe BE und DE :

$$\begin{aligned} B_1 e \parallel BE, \quad B_1 e &= -1,50 \text{ cm} \\ D_1 e_1 \parallel DE, \quad D_1 e_1 &= -1,40 \text{ cm} \\ e E_1 \perp B_1 e, \quad e_1 E_1 &\perp D_1 e_1. \end{aligned}$$

Der Geschwindigkeitsplan der zweiten Bewegung ist durch die Bedingungen:

$$\begin{aligned} A_2 F_2 &\perp A E \\ E_1 E_2 &\parallel A E \\ A_2 B_2 C_2 D_2 E_2 &\approx A B C D E \end{aligned}$$

bestimmt. Die resultierenden Geschwindigkeiten und Wege $B_2 B_1$, $C_2 C_1$, $D_2 D_1$ der Knoten B , C , D wurden nicht ausgezogen, um die Zeichnung nicht undeutlich zu machen.

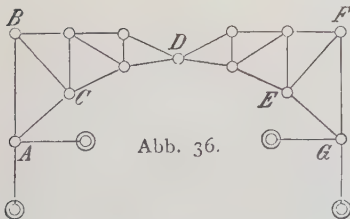


Abb. 36.

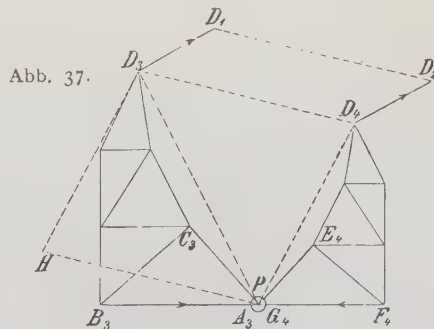


Abb. 37.

Beispiel 2. Das Fachwerk $ABCDE \dots$ (Abb. 36) ist in den Knoten A und G fest gelagert; die Längenänderung der Strecke AG

ist also gleich null. Um aus den *gegebenen* Längenänderungen der Stäbe die Wege der Knoten zu bestimmen, zerlegen wir die kleine Bewegung des Fachwerks in folgende *vier* gleichzeitige Bewegungen:

1. Die Bewegung der Fachwerkshälfte $ABCD$, bei welcher der Knoten B auf der festen Geraden AB sich verschiebt und alle Stäbe dieses Fachwerksteils die gegebenen Dehnungen erleiden. Von dem Geschwindigkeitsplan $PA_1B_1C_1D_1\dots$, der wie im Beispiel 1 gebildet wird, ist nur die Geschwindigkeit PD_1 des Knotens D dargestellt worden, um die Zeichnung nicht mit Linien zu überladen.

2. Die Bewegung der zweiten Fachwerkshälfte $DEFG$, bei welcher der Knoten F auf der festen Geraden GF sich verschiebt und alle Stäbe die vorgeschriebenen Dehnungen ausführen. Von den Geschwindigkeiten $PD_2, PE_2, PF_2\dots$ dieser Bewegung 2 wurde nur die Geschwindigkeit PD_2 des Knotens D dargestellt.

3. Eine Drehung der ersten Fachwerkshälfte um den festen Knoten A , welche durch den Geschwindigkeitsplan

$$A_3B_3C_3D_3 \approx ABCD$$

dargestellt wird, und

4. eine Drehung der zweiten Hälfte um den festen Knoten G , dargestellt durch den Geschwindigkeitsplan

$$D_4E_4F_4G_4 \approx DEFG.$$

Der Sinn der Geschwindigkeiten der beiden Bewegungen 3 und 4 zeigt nach dem Pol P , so daß für die Knoten der ersten Fachwerkshälfte die Geschwindigkeiten $B_3B_1, C_3C_1, D_3D_1\dots$ und für die Knoten der zweiten Hälfte die Geschwindigkeiten $D_4D_2, E_4E_2, F_4F_2\dots$ resultieren.

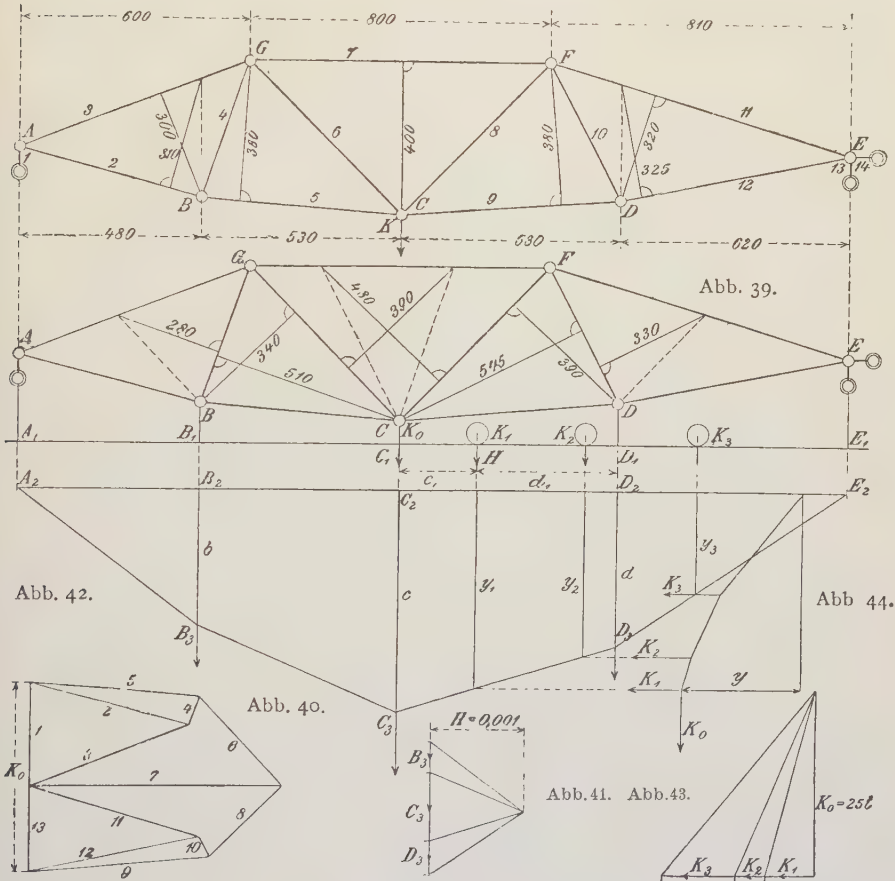
Die beiden Drehungen 3 und 4 werden bestimmt durch die Bedingung, daß für den Knoten D , welcher die beiden Fachwerkshälften verbindet, aus den beiden Bewegungen 1 und 3 dieselbe Geschwindigkeit sich zusammensetzen muß, wie aus den Bewegungen 2 und 4, d. h. die Strecke D_3D_1 muß Größe, Richtung und Sinn der Strecke D_4D_2 erhalten. Um die beiden Punkte D_3, D_4 , welche dieser Bedingung entsprechen, zu bestimmen, trägt man die Strecke PH nach Größe, Richtung und Sinn gleich der Strecke D_2D_1 auf und zieht:

$$\begin{array}{ll} PD_3 \perp AD, & PD_4 \perp GD \\ HD_3 \parallel PD_4, & D_3D_4 \parallel D_1D_2. \end{array}$$

12. Die Biegungslinie. Das im vorigen Abschnitt beschriebene Verfahren wird in manchen Fällen unsicher und un-

brauchbar, weil die unvermeidlichen Zeichenfehler bei großer Anzahl der Stäbe leicht das zulässige Maß überschreiten. Auch ist es nur selten von Interesse, die Formänderung eines Fachwerks durch die Wege *aller* Knoten vollständig zu bestimmen. In den meisten Aufgaben kommen nur die *lotrechten* Wege einzelner Knoten in Betracht und zwar nicht nur bei einer einzigen Belastung, sondern

Abb. 38.



in einer größeren Anzahl verschiedener Belastungsfälle. Es würde sehr umständlich und zeitraubend sein, wenn man für jeden dieser Fälle den Geschwindigkeitsplan des Fachwerks bilden müßte.

Es sei in Abb. 39 G irgend ein Knoten des Fachwerks und H irgend ein Punkt der die Lasten aufnehmenden Fahrbahn. Be-

rechnet man nach Abschnitt 10 die Senkung g des Knotens G , die hervorgerufen wird durch eine lotrechte Last K des Punktes H der Fahrbahn, und ferner die Senkung h des Punktes H , hervorgerufen durch eine ebenso große Belastung K des Knotens G , so ergibt sich, daß die beiden Senkungen g und h gleich groß und der Last K proportional sind.

Um diese Behauptung zu beweisen, bezeichnen wir für die Stabkräfte des Fachwerks mit x_1, x_2, x_3 die Einflußzahlen der Lasten K des Knotens G und der beiden Knoten C, D , auf welche die Last des Punktes H mittels des Zwischenträgers $C_1 D_1$ übertragen wird. Die Last K des Knotens G erzeugt Stabkräfte von der Größe $x_1 K$ und Längenänderungen von der Größe

$$\Delta l = \frac{x_1 K l}{\varepsilon F} = x_1 K r,$$

wenn mit l die Länge eines Stabes, mit F sein Querschnitt, mit ε der Elastizitätsmodul des Stabmaterials bezeichnet und zur Abkürzung

$$r = \frac{l}{\varepsilon F}$$

gesetzt wird. Infolge dieser Längenänderungen senken sich die Knoten C und D um Strecken c, d , die nach Abschnitt 10 durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} c &= \Sigma x_2 \Delta l = K \Sigma x_2 x_1 r, \\ d &= \Sigma x_3 \Delta l = K \Sigma x_3 x_1 r \end{aligned}$$

bestimmt werden. Wird von der Formänderung des Zwischenträgers abgesehen, so ergibt sich für die Senkung h des Punktes H die Größe:

$$h = \frac{c d_1 + d c_1}{c_1 + d_1} = \frac{K}{c_1 + d_1} (d_1 \Sigma x_2 x_1 r + c_1 \Sigma x_3 x_1 r), \quad (10)$$

wenn mit c_1, d_1 die Abstände des Punktes H von den Stützen C_1, D_1 des Zwischenträgers $C_1 D_1$ bezeichnet werden.

Belastet man ferner den Punkt H mit der Last K , so werden auf die Knoten C, D die Lasten $K \frac{d_1}{c_1 + d_1}$ und $K \frac{c_1}{c_1 + d_1}$ übertragen. Diese beiden Lasten erzeugen zusammen Stabkräfte von der Größe

$$\frac{K}{c_1 + d_1} (d_1 x_2 + c_1 x_3)$$

und Längenänderungen von der Größe

$$\Delta l = \frac{K r}{c_1 + d_1} (d_1 x_2 + c_1 x_3).$$

Die hierdurch herbeigeführte Senkung g des Knotens G hat also, wie oben behauptet wurde, die Größe:

$$g = \frac{K}{c_1 + d_1} (d_1 \Sigma x_1 x_2 r + c_1 \Sigma x_1 x_3 r) = h. \quad (11)$$

Es sei nun die Aufgabe gestellt, für eine Reihe verschiedener, zusammengesetzter Belastungen die Senkungen y eines bestimmten Knotens, z. B. des Knotens C , zu berechnen. Wir bestimmen zu diesem Zweck in Abb. 42 die Senkungen

$$b = B_2 B_3, \quad c = C_2 C_3, \quad d = D_2 D_3$$

der Knoten B , C , D , welche die Fahrbahn tragen, für den Fall, in welchem *allein der Knoten C* mit der Last K_0 belastet ist. Das Polygon $A_2 B_3 C_3 D_3 E_2$ wird die *Biegungslinie der Gurtung $ABCDE$* genannt. Eine der gegebenen Belastungen ist in Abb. 39 dargestellt; sie besteht aus den Lasten K_1 , K_2 , K_3 , in deren Loten die Biegungslinie die Ordinaten y_1 , y_2 , y_3 hat. Diese Ordinaten bezeichnen also die Senkungen der Fahrbahn in den Punkten, welche die Lasten K_1 , K_2 , K_3 tragen, in dem Falle, wenn diese Lasten beseitigt und durch eine Einzellast K_0 des Knotens C ersetzt werden. Wird jede einzelne der Lasten K_1 , K_2 , K_3 in deren Lage durch K_0 ersetzt, so wird in diesen drei Belastungsfällen die Senkung des Knotens C , wie oben bewiesen worden ist, die Größen

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3$$

annehmen. Daher ist die Senkung y des Knotens C bei gleichzeitiger Einwirkung der Lasten K_1 , K_2 , K_3 :

$$y = \frac{K_1}{K_0} y_1 + \frac{K_2}{K_0} y_2 + \frac{K_3}{K_0} y_3 = \frac{1}{K_0} \Sigma Ky. \quad (12)$$

Diese Größe kann entweder durch Rechnung oder in bekannter Weise auf graphischem Wege mittels eines Seilpolygons bestimmt werden, wie es in den Abbildungen 43 und 44 ausgeführt worden ist.

13. Die Bildung der Biegungslinie kann auf drei verschiedenen Wegen ausgeführt werden:

1) *Durch Berechnung der Ordinaten b , c , d .* Bezeichnet man mit x_1 , x_2 , x_3 die Einflußzahlen der Lasten der Knoten C , B , D für

die Stabkräfte des Fachwerks, so ist dem Abschnitt 12 zufolge bei einer Belastung K_0 des Knotens C die Senkung des Knotens B :

$$B_2 B_3 = b = K_0 \Sigma x_2 x_1 r,$$

die Senkung des Knotens C :

$$C_2 C_3 = c = K_0 \Sigma x_2^2 r$$

und die Senkung des Knotens D :

$$D_2 D_3 = d = K_0 \Sigma x_3 x_1 r.$$

Die Berechnung der Summenwerte ist bei großer Anzahl der Knoten und Stäbe zwar mühsam, wird aber wesentlich erleichtert durch den Umstand, daß die Produkte $x_2 x_1 r$, $x_2^2 r$, $x_3 x_1 r$ für jeden Stab den gemeinschaftlichen Faktor $x_1 r$ haben.

2) *Vermittels eines Geschwindigkeitsplanes.* Die Last K_0 des Knotens C erzeugt Stabkräfte von der Größe

$$S = x_1 K_0$$

und Längenänderungen von der Größe

$$\Delta l = S r = x_1 K_0 r.$$

Man bestimmt die Stabkräfte S mittels eines Kräfteplans (Abb. 40) und die Verschiebungen der Knoten infolge der Längenänderungen Δl durch einen Geschwindigkeitsplan, aus dem die lotrechten Wege b , c , d der Knoten B , C , D zu entnehmen sind. Ist die Anzahl der Stäbe groß, so gewährt dieser Weg in der Regel nicht den erforderlichen Grad der Genauigkeit.

3) *Durch Darstellung der Biegungslinie als Seilpolygon,* dessen Belastungen in folgender Weise ermittelt werden. Wenn nur ein einziger Stab, z. B. der Stab GB , seine Länge um Δl ändert, so senken sich die Knoten C , B , D um die Strecken

$$\Delta c = x_1 \Delta l, \quad \Delta b = x_2 \Delta l, \quad \Delta d = x_3 \Delta l,$$

wenn wie bisher mit x_1 , x_2 , x_3 die Einflußzahlen der Knotenlasten von C , B , D für die Stabkraft des Stabes GB bezeichnet werden. Im Abschnitt 9 wurde beschrieben, wie diese Einflußzahlen bestimmt werden durch die Ordinaten eines Seilpolygons, dessen Belastungen $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$ aus der Fachwerksfigur zu entnehmen sind. Genau dasselbe Verfahren führt offenbar zur Bestimmung der Senkungen Δb , Δc , Δd , indem man nämlich anstatt der Lasten $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$ die

Lasten $\frac{\Delta l}{h}$, $\frac{\Delta l}{h_1}$, $\frac{\Delta l}{h_2}$ für die Bildung des Seilpolygons einführt. Die Strecken h , h_1 , h_2 werden in beiden Fällen in gleicher Weise aus der Zeichnung entnommen. Man bestimmt also nach den Regeln des Abschnittes 9 die in den Loten der Knoten B , C , D wirkenden Lasten $\frac{\Delta l}{h}$, welche der gegebenen Längenänderung

$$\Delta l = \kappa_1 K_0 r$$

eines jeden Stabes entsprechen, berechnet für jede Knotenvertikale die algebraische Summe der Lasten und bildet aus diesen resultierenden Lasten mit einer willkürlich zu wählenden Horizontalkraft H das Seilpolygon $A_2 B_3 C_3 D_3 E_2$, das mit der Biegungslinie sich deckt.

Für das in den Abb. 38 und 39 im Maßstabe 1:200 dargestellte Balkenfachwerk ist die angedeutete Berechnung der Lasten in der folgenden Tabelle ausgeführt worden.

Stab	l	F	$S = \kappa_1 K_0$	$1000 \Delta l$	h	h_1	h_2	Das 1 000 000fache der Belastungen		
	cm	qcm	t	cm	cm	cm	cm	B_3	C_3	D_3
2	490	100	+ 22,0	+ 54	+ 310			+ 174		
3	650	120	— 22,5	— 61	— 300			+ 203		
4	390	50	— 3,5	— 14		+ 280	— 510	— 50	+ 27	
5	530	100	+ 22,5	+ 60	+ 380			+ 122	+ 36	
6	575	100	+ 16,0	+ 46		— 340	+ 390	— 135	+ 118	
7	800	120	— 33,4	— 111	— 400				+ 278	
8	575	50	+ 13,6	+ 78		+ 430	— 390		+ 181	— 200
9	585	100	+ 24,0	+ 70	+ 380				+ 60	+ 124
10	410	50	— 3,0	— 12		— 545	+ 330		+ 22	— 36
11	845	120	— 23,5	— 83	— 320					+ 259
12	635	100	+ 22,8	+ 72	+ 325					+ 222
Summe								+ 314	+ 722	+ 369

Die ersten Reihen enthalten die gegebenen Stablängen l und Stabquerschnitte F . In der folgenden Reihe sind die Stabkräfte

$$S = \kappa_1 K_0$$

verzeichnet, die von einer Last

$$K_0 = 25 \text{ t}$$

des Knotens *C* hervorgerufen werden und in dem Kräfteplan Abb. 40 im Maßstab

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ t}$$

dargestellt sind. Bei der Berechnung der Längenänderungen

$$\Delta l = \kappa_1 K_0 r = \frac{l S}{\varepsilon F}$$

wurde $\varepsilon = 2000 \text{ t/qcm}$ angenommen.

Die Strecken h , h_1 , h_2 sind in den Abb. 38 und 39 angegeben; nur die Strecken h_1 , h_2 für die Stäbe 5 und 9 mußten wegen Raum-mangels aus der Zeichnung fortgelassen und durch Rechnung ersetzt werden. Zur Erläuterung der Tabelle beschreiben wir die Rechnung für die Stäbe 5, 6 und 7.

Stab 5. Gegeben sind:

$$\Delta l = + 0,060 \text{ cm}, \quad h = + 380 \text{ cm}, \quad \frac{\Delta l}{h} = + 0,000158 \text{ cm.}$$

Der Momentenarm h ist *positiv*, weil der Stab 5 der *unteren* Gurtung angehört (vergl. Abschnitt 9, Beispiel 3). Die im Lot des Momenten-

punktes *G* anzubringende Last $\frac{\Delta l}{h}$ ist die Resultante der beiden

Lasten $\frac{\Delta l}{h_1}$ und $\frac{\Delta l}{h_2}$, welche durch die Knoten *B* und *C* gehen und von der Resultanten um 120 cm und 410 cm abstehen. Folglich ist:

$$\frac{\Delta l}{h_1} = + \frac{410}{410 + 120} 0,000158 = + 0,000122$$

$$\frac{\Delta l}{h_2} = + \frac{120}{410 + 120} 0,000158 = + 0,000036.$$

Stab 6. Gegeben sind (Abb. 39):

$$\Delta l = + 0,046 \text{ cm}, \quad h_1 = - 340 \text{ cm}, \quad h_2 = + 390 \text{ cm.}$$

Nach Beispiel 2 des Abschnittes 9 trägt h_1 das negative und h_2 das positive Vorzeichen, weil der *obere* Knoten *G* des Stabes 6 *links* vom Schnitt durch die Stäbe 5, 6, 7 liegt. Demnach haben die Lasten der Knoten *B* und *C* die Größen:

$$\frac{\Delta l}{h_1} = \frac{+ 0,046 \text{ cm}}{- 340 \text{ cm}} = - 0,000135$$

$$\frac{\Delta l}{h_2} = \frac{+ 0,046 \text{ cm}}{+ 390 \text{ cm}} = + 0,000118.$$

Stab 7. Gegeben sind (Abb. 38):

$$\Delta l = - 0,111 \text{ cm}, \quad h = - 400 \text{ cm.}$$

Nach Beispiel 1 des Abschnittes 9 ist h negativ, weil der Stab 7 der oberen Gurtung angehört. Daher ist die Last im Lot des Momentenpunktes C :

$$\frac{\Delta l}{h} = \frac{-0,111 \text{ cm}}{-400 \text{ cm}} = +0,000278.$$

Die Summierung der Tabelle ergibt als Belastungen des Seils in den Loten der Punkte B, C, D die unbenannten Zahlen:

$$B_3 = +0,000314, \quad C_3 = +0,000722, \quad D_3 = +0,000369.$$

Im Kräfteplan des Seilpolygons (Abb. 41), für den der Maßstab

$$1 \text{ cm} = 0,0008$$

gewählt wurde, ist die Horizontalkraft H gleich 0,001. Daher ist der Maßstab der Ordinaten y des Seilpolygons

$$1 \text{ cm} = 0,001 \cdot 200 \text{ cm} = 0,2 \text{ cm},$$

d. h. die Senkungen des Knotens C werden in den Abb. 42 und 44 im Fünffachen der natürlichen Größe dargestellt.

14. Die Längen und die Längenänderungen der überzähligen Stäbe eines zusammengesetzten Fachwerks. Wenn in ein einfaches Fachwerk ein überzähliger Stab eingefügt und hierdurch ein *zusammengesetztes* Fachwerk gebildet wird, so sind die Länge l' und die Längenänderung $\Delta l'$ dieses Stabes abhängig von den Längen und den Längenänderungen der Stäbe des einfachen Fachwerks. Wir bezeichnen mit $l_1, l_2, l_3 \dots$ die Längen der Stäbe 1, 2, 3 ... des *einfachen* Fachwerks im spannungslosen Zustande und bei einer bestimmten Temperatur t_0 ; ferner mit l' die hierdurch bestimmte Länge des überzähligen Stabes (1) und mit t_1 die Temperatur, bei der dieser Stab im *spannungslosen Zustande* die Länge l' hat. In bezug auf diese Längen seien $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3 \dots, \Delta l'$ die durch irgend welche Ursachen herbeigeführten Längenänderungen.

Nach Gleichung 9 ist:

$$\Delta l' = -\kappa'_1 \Delta l_1 - \kappa'_2 \Delta l_2 - \kappa'_3 \Delta l_3 - \dots = -\Sigma \kappa' \Delta l, \quad (13)$$

wenn $\kappa'_1 S', \kappa'_2 S', \kappa'_3 S' \dots$ die Stabkräfte der Stäbe 1, 2, 3 ... des *unbelasteten* einfachen Fachwerks bezeichnen, welche von einer Stabkraft S' des überzähligen Stabes hervorgerufen werden. Da für diesen Stab

$$\kappa' = +1$$

ist, so kann man der Gleichung 13) auch die Form

$$0 = \Sigma \kappa' \Delta l$$

geben. Das Zeichen Σ' soll andeuten, daß die Summierung auf *den überzähligen Stab* (1) und auf sämtliche Stäbe des einfachen Fachwerks mit Einschluß der Stützstäbe sich erstreckt. Letztere kommen selbstverständlich nur dann in Betracht, wenn die Stützlage sich ändert, und wenn zugleich die Stützstäbe durch die Stabkraft S' des überzähligen Stabes in Spannung versetzt werden, mit anderen Worten, wenn für die Stützstäbe weder Δl noch x' gleich null ist. Enthält das Fachwerk *nur eine* überzählige Stäbe (1), (2), (3) . . . , so besteht für jeden eine Bedingung von dieser Form:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \Sigma' x' \Delta l \\ 0 &= \Sigma'' x'' \Delta l \\ 0 &= \Sigma''' x''' \Delta l \text{ usf. } \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die Gleichung 13) gilt für *jede* Formänderung, also auch in dem Falle, wenn

$$\Delta l' : \Delta l_1 : \Delta l_2 : \dots = l' : l_1 : l_2 : \dots$$

ist, d. h. wenn das Fachwerk der Form seines spannungslosen Zustandes geometrisch ähnlich bleibt. Daher ist die Länge l' des überzähligen Stabes im spannungslosen Zustande des Fachwerks

$$l' = -x'_1 l_1 - x'_2 l_2 - x'_3 l_3 - \dots = -\Sigma x' l. \quad (15)$$

Hat der spannungslose Stab bei der Temperatur t_0 die Länge l_0 , so wird seine Temperatur t_1 für den *spannungslosen Zustand* des *Fachwerks* durch die Gleichung

$$t_1 = t_0 + \frac{l' - l_0}{l_0 \delta} \quad (16)$$

bestimmt, in der δ den Wärmeausdehnungskoeffizient des Stabmaterials bezeichnet. In manchen Fällen ist l_0 nicht bekannt; dann ist es unmöglich, die Temperatur t_1 und ihren Einfluß auf die Stabkräfte des Fachwerks zu bestimmen.

Die Auswahl der überzähligen Stäbe eines zusammengesetzten Fachwerks ist innerhalb gewisser Grenzen willkürlich; es ist nur nötig, daß die übrigen Stäbe ein *einfaches* Fachwerk bilden.

15. Die Stabkräfte des zusammengesetzten Fachwerks. Die Längenänderungen der Stäbe in bezug auf den spannungslosen Zustand des Fachwerks sind abhängig von den Temperaturänderungen t und den Stabkräften S gemäß der Formel

$$\Delta l = l \delta t + S r. \quad (17)$$

Um die Stabkräfte S zu bestimmen, betrachten wir die überzähligen Stäbe als *Laststäbe*, deren Bedeutung im Abschnitt 6 er-

läutert worden ist. Die Belastungen des einfachen Fachwerks, welche durch Zerschneiden der überzähligen Stäbe entsteht, setzen sich also zusammen aus den gegebenen Knotenlasten K und den unbekannten Stablaster $S', S'', S''' \dots$, die von den Stabkräften der zerschnittenen überzähligen Stäbe (1), (2), (3) ... gebildet werden. In jedem Stabe des einfachen Fachwerks erzeugen die Lasten K eine in bekannter Weise zu bestimmende und als lineare Funktion der Kräfte K darzustellende Stabkraft $\mathfrak{E}$, zu der die von den Lasten $S', S'', S''' \dots$ erzeugten Stabkräfte $x'S', x''S'', x'''S'''$ hinzutreten:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \mathfrak{E}_1 + x'_1 S' + x''_1 S'' + x'''_1 S''' + \dots \\ S_2 &= \mathfrak{E}_2 + x'_2 S' + x''_2 S'' + x'''_2 S''' + \dots \\ S_3 &= \mathfrak{E}_3 + x'_3 S' + x''_3 S'' + x'''_3 S''' + \dots \text{ usf.} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Durch Verbindung der Gleichungen 14), 17) und 18) entstehen die Bedingungen, durch welche die unbekannten Stabkräfte $S', S'', S''' \dots$ der überzähligen Stäbe bestimmt werden:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \Sigma' x' l \delta t + \Sigma x' \mathfrak{E} r + S' \Sigma' x'^2 r + S'' \Sigma' x' x'' r + S''' \Sigma' x' x''' r + \dots \\ 0 &= \Sigma'' x'' l \delta t + \Sigma x'' \mathfrak{E} r - S' \Sigma'' x' x'' r - S'' \Sigma'' x''^2 r + S''' \Sigma'' x'' x''' r + \dots \\ 0 &= \Sigma''' x''' l \delta t + \Sigma x''' \mathfrak{E} r + S' \Sigma''' x' x''' r + S'' \Sigma''' x'' x''' r + S''' \Sigma''' x'''^2 r + \dots \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

usf. Nachdem die Stabkräfte der überzähligen Stäbe berechnet worden sind, ergeben sich die übrigen Stabkräfte durch die Gleichungen 18).

In betreff der Summierungen ist zu beachten, daß die Größe $\mathfrak{E}$ für alle überzähligen Stäbe gleich null ist; daher erstrecken sich die Summen $\Sigma x \mathfrak{E} r$ nur auf die Stäbe des einfachen Fachwerks. Die Größe x' ist für den überzähligen Stab (1) gleich eins, für alle anderen überzähligen Stäbe gleich null. Die Summen $\Sigma' x' l \delta t$ und $\Sigma' x'^2 r$ erstrecken sich also auf die Stäbe des einfachen Fachwerks und außerdem nur auf den überzähligen Stab (1), was durch das Zeichen Σ' angedeutet wird. Ebenso erstrecken sich die Summen $\Sigma'' x'' l \delta t$ und $\Sigma'' x''^2 r$ auf die Stäbe des einfachen Fachwerks und außerdem nur auf den überzähligen Stab (2), usf. Für alle Stützstäbe ist r gleich null; die Summen mit dem Faktor r erstrecken sich also nicht auf die Stützstäbe. Soll eine Aenderung der Stützenlage in Rechnung gestellt werden, so kann man sich vorstellen, daß die betreffenden Längenänderungen der Stützstäbe durch Temperaturänderungen derselben herbeigeführt worden sind. In die Summen $\Sigma x l \delta t$, die sich alsdann auch auf die Stützstäbe erstrecken, ist die gegebene Längenänderung eines solchen Stabes gleich $l \delta t$ einzusetzen.

Die in den Gleichungen 19) vorkommenden Summen sind in der Regel *durch Rechnung* zu bestimmen, weil das graphische Verfahren nicht genau genug ist und in den meisten Fällen auch keine Zeitersparnis gewährt. Nur in besonderen Fällen kann dieses Verfahren in Betracht kommen. Wir verweisen auf das im Abschnitt 19 dieser Abhandlung beschriebene Beispiel.

Bevor wir zu Anwendungen auf die gebräuchlichsten Formen der zusammengesetzten Fachwerke übergehen, sollen in den folgenden Abschnitten einige allgemeine Beziehungen abgeleitet werden, die an Stelle unseres Verfahrens zur Berechnung der Stabkräfte zusammengesetzter Fachwerke benutzt werden können, *wenn Änderungen der Temperatur und der Stützenlage nicht in Betracht kommen*. Der Leser erhält hierdurch Gelegenheit, Vergleiche anzustellen.

16. Die Formänderungsarbeit eines zusammengesetzten Fachwerks. Wir bestimmen zunächst die Arbeit A , welche zur Längenänderung der Stäbe erforderlich ist, *wenn das unbelastete und gewichtslose Fachwerk im spannungslosen Zustande sich befindet*, wenn also die Temperaturen der überzähligen Stäbe den Bedingungen

$$0 = \Sigma' \alpha' l \delta t = \Sigma'' \alpha'' l \delta t = \dots$$

entsprechen. Werden die Lasten K mit Einschluß des Eigengewichtes in beliebiger, aber stetiger Weise auf das Fachwerk gebracht, so ändert sich jede Stabkraft stetig von *null* bis zu ihrem Endwerte, der mit U bezeichnet werden möge, und die Länge des Stabes von l bis

$$l + \Delta l = l + U r.$$

Der Stab erfordert eine Formänderungsarbeit von der Größe

$$\int_{s=0}^{s=U} S dl = r \int_0^U S dS = \frac{1}{2} U^2 r = \frac{1}{2} U \Delta l.$$

Die Formänderungsarbeit für *alle* Stäbe ist demnach

$$A = \frac{1}{2} \Sigma U^2 r = \frac{1}{2} \Sigma U \Delta l.$$

Ein zweiter Wert ergibt sich *durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten*, indem man aus jedem Stab des belasteten Fachwerks ein Stück herausschneidet und von den Knoten des Fachwerks die Wege durchlaufen läßt, welche durch die Formänderung des Fachwerks, d. h. durch die Längenänderungen Δl der

Stäbe bestimmt sind. Legen die Lasten $K_1, K_2, K_3 \dots$ in ihren Richtungen hierbei die Wege $w_1, w_2, w_3 \dots$ zurück, so ist nach Gleichung 1):

$$\Sigma U \Delta l = \Sigma K w$$

und folglich:

$$A = \frac{1}{2} \Sigma U \Delta l = \frac{1}{2} \Sigma U^2 r = \frac{1}{2} \Sigma K w. \quad (20)$$

Läßt man also bei der Temperatur des spannungslosen Zustandes die Lasten eines Fachwerks in beliebiger, aber stetiger Weise von null bis zu ihren Endwerten K anwachsen, so ist die von den Lasten während der Formänderung geleistete Arbeit unabhängig von der Art und Weise, wie die Lasten entstehen, und immer halb so groß, wie sie sein würde, wenn die Lasten während der ganzen Formänderung ihre Endwerte K hätten.

Jeder elastische Körper kann angesehen werden als eine Gruppe von materiellen Punkten, deren Abstände voneinander unter Einwirkung der inneren Kräfte nach dem Hookeschen Gesetze sich ändern. Er bildet also ein Fachwerk, allerdings mit unendlich vielen überzähligen Stäben, was aber hier nicht in Betracht kommt. Der vorstehende, zuerst von *Clapeyron* ausgesprochene Satz gilt demnach nicht nur für das Fachwerk, sondern auch für jeden gestützten elastischen Körper.

Wir wenden uns nun zu dem allgemeinen Falle, in dem die Stabkräfte T des *unbelasteten* Fachwerks *nicht* gleich null sind. Durch die Wirkung der Belastungen kommen zu den Kräften T die Stabkräfte U hinzu, so daß das belastete Fachwerk die Stabkräfte

$$S = T + U$$

aufzunehmen hat. Man hat auch in diesem Falle die Arbeitsumme

$$A_1 = \frac{1}{2} \Sigma S^2 r = \frac{1}{2} \Sigma T^2 r + \Sigma T U r + \frac{1}{2} \Sigma U^2 r \quad (21)$$

die *Formänderungsarbeit des Fachwerks* genannt, was, wie die Erfahrung gezeigt hat, sehr geeignet ist, Verwirrungen anzurichten. Der vorstehende Ausdruck läßt sich vereinfachen, indem man beachtet, daß zufolge Gleichung 1) die Summe

$$\Sigma T U r = 0$$

ist. Denn die Kräfte T bilden an jedem Knoten des *unbelasteten* Fachwerks eine Gleichgewichtsgruppe, und die Längenänderungen

$$\Delta l = U r$$

bestimmen eine mögliche Formänderung des Fachwerks. Demnach ist

$$A_1 = \frac{1}{2} \sum U^2 r + \frac{1}{2} \sum T^2 r = A + \frac{1}{2} \sum T^2 r. \quad (22)$$

Die Arbeit A ist bei gegebener Belastung eine *unveränderliche* Größe, die Stabkräfte T dagegen ändern sich *mit den Stabtemperaturen*. Da alle Glieder der Summe $\sum T^2 r$ *positiv* sind, so folgt der Satz von Menabrea: *Bei gegebener Belastung erreicht die Formänderungsarbeit A_1 ihren kleinsten Wert A , wenn das unbelastete Fachwerk spannungslos ist.* Dieser Satz gilt auch, wenn das Fachwerk durch einen gestützten elastischen Körper ersetzt wird.

Die Bedingungen des Minimums der Formänderungsarbeit A_1 können angewandt werden, um die von einer gegebenen Belastung erzeugten Stabkräfte zu bestimmen, *wenn das unbelastete Fachwerk spannungslos ist*. Die voneinander unabhängigen veränderlichen Größen, von denen A_1 abhängig ist, sind die *Stabtemperaturen* t . Aus den Gleichungen 19) ist jedoch zu ersehen, daß auch jede der Stabkräfte S' , S'' , $S''' \dots$ der *überzähligen* Stäbe unabhängig von den anderen willkürlich geändert werden kann, wenn gleichzeitig die Stabtemperaturen so geändert werden, daß die Bedingungen der Gleichungen 19) bestehen bleiben. Als Bedingungen des Minimums können daher die Gleichungen gelten:

$$0 = \frac{\partial A_1}{\partial S'} = \sum S r \frac{\partial S}{\partial S'}, \quad 0 = \frac{\partial A_1}{\partial S''} = \sum S r \frac{\partial S}{\partial S''}, \text{ usf.}, \quad (23)$$

aus denen in Verbindung mit den Gleichungen 18) folgt:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \sum x' \mathfrak{E} r + S' \sum x'^2 r + S'' \sum x' x'' r + \dots \\ 0 &= \sum x'' \mathfrak{E} r + S' \sum x' x'' r + S'' \sum x''^2 r + \dots \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

usf. Dieses Ergebnis wird auf einem einfacheren Wege erreicht, indem man in unseren Gleichungen 19) die Abweichungen t der Stabtemperaturen von denen des spannungslosen Zustandes gleich null setzt.

Zwei weitere bemerkenswerte Beziehungen lassen sich ableiten, indem man die Formänderungsarbeit A *bei unveränderlichen Stabtemperaturen* ansieht als eine Funktion der veränderlichen Lasten K_1 , K_2 , $K_3 \dots$ und nun die erste Abgeleitete dieser Funktion nach einer

der Lasten, z. B. nach K_1 bildet. Man gelangt zu zwei verschiedenen Ausdrücken, je nachdem man die Form

$$A = \frac{1}{2} \sum U^2 r$$

oder

$$A = \frac{1}{2} \sum K w$$

in Rechnung bringt. Im *ersten* Falle ist

$$\frac{\partial A}{\partial K_1} = \sum U r \frac{\partial U}{\partial K_1}.$$

Die Größen $\frac{\partial U}{\partial K_1}$ bezeichnen die Stabkräfte, die *in den Stäben des zusammengesetzten Fachwerks* von einer einzigen Last

$$K_1 = 1$$

hervorgerufen werden. Läßt man die Knoten des Fachwerks mit dieser Einzellast und den zugehörigen Stabkräften $\frac{\partial U}{\partial K_1}$ die Wege durchlaufen, welche durch die Längenänderungen

$$\Delta l = U r$$

bestimmt sind, so ergibt sich nach Gleichung 1) der Weg w_1 , den die Last K_1 zurücklegt, durch die Gleichung

$$w_1 \cdot 1 = w_1 = \sum U r \frac{\partial U}{\partial K_1}.$$

Demnach ist

$$\frac{\partial A}{\partial K_1} = w_1 \quad (25)$$

oder in Worten: *Betrachtet man die Formänderungsarbeit A eines zusammengesetzten Fachwerks bei unveränderlichen Stabtemperaturen als eine Funktion der voneinander unabhängigen veränderlichen Lasten, so ist bei jeder gegebenen Belastung $K_1, K_2, K_3 \dots$ der elastische Weg w_1 der Last K_1 in der Richtung dieser Kraft gleich der ersten Abgeleiteten von A nach K_1 .*

Auch dieser, zuerst von *Castigliano* ausgesprochene Satz kann ebenso wie der Satz von *Clapeyron* ohne weiteres auf jeden gestützten elastischen Körper übertragen werden. Zur Berechnung des Weges w_1 eignet sich die Gleichung 25) nicht, weil die Bestimmung der Stabkräfte $\frac{\partial U}{\partial K}$ in den Stäben des zusammengesetzten

Fachwerks zu umständlich sein würde. Zu diesem Zweck erfordert die Formel eine weitere Umformung, auf die wir hier nicht näher eingehen, weil wir in der Gleichung 8) ein einfacheres Hilfsmittel gegeben haben; denn der Weg w_1 ist vollkommen bestimmt durch die Längenänderungen

$$\Delta l = U r$$

der *notwendigen* Stäbe des *zusammengesetzten* Fachwerks. Bezeichnet man mit $\varkappa$ die Einflußzahlen der Last K_1 für die Stabkräfte des *einfachen* Fachwerks, das durch Beseitigung der überzähligen Stäbe entsteht, so ist nach jener Gleichung

$$w_1 = \Sigma \varkappa U r. \quad (26)$$

Diese Summe erstreckt sich also nur auf die Stäbe des *einfachen* Fachwerks (vergl. Abschnitt 10).

Wählt man *zweitens* die Form:

$$A = \frac{1}{2} (K_1 w_1 + K_2 w_2 + K_3 w_3 + \dots),$$

so erhält man durch Differenzieren:

$$\frac{\partial A}{\partial K_1} = \frac{1}{2} \left(w_1 + K_1 \frac{\partial w_1}{\partial K_1} + K_2 \frac{\partial w_2}{\partial K_1} + K_3 \frac{\partial w_3}{\partial K_1} + \dots \right)$$

und in Verbindung mit der Gleichung 25):

$$w_1 = K_1 \frac{\partial w_1}{\partial K_1} + K_2 \frac{\partial w_2}{\partial K_1} + K_3 \frac{\partial w_3}{\partial K_1} + \dots \quad (27)$$

oder

$$w_1 \partial K_1 = K_1 \partial w_1 + K_2 \partial w_2 + K_3 \partial w_3 + \dots$$

Diese Gleichung bildet einen besonderen Fall des Satzes von Betti, den wir im nächsten Abschnitt ableiten und erklären werden.

17. Eine allgemeine Beziehung zwischen je zwei elastischen Formänderungen eines einfachen oder zusammengesetzten Fachwerks. Wir bezeichnen mit p und q zwei *vollkommen gleiche* Fachwerke, die im unbelasteten Zustande spannungslos sind. Das Fachwerk p trägt die nach Größe, Lage und Richtung gegebenen Lasten $P_1, P_2, P_3 \dots$, welche die Stabkräfte S_p und also Längenänderungen Δl der Stäbe von der Größe $r S_p$ hervorrufen. Ebenso werden die Lasten des Fachwerks q mit $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$, die Stabkräfte mit S_q und die Längenänderungen Δl der Stäbe mit $r S_q$ bezeichnet. Wir bilden die Gleichgewichtsgruppen der einzelnen Knoten beider Fachwerke, in-

dem wir aus jedem Stabe ein Stück herausschneiden, und lassen zunächst die Knoten des Fachwerks p die Wege durchlaufen, welche der elastischen Formänderung des Fachwerks q entsprechen. Bei dieser Bewegung leisten die Kräfte P eine Arbeitsumme A_p und die Stabkräfte S_p die Arbeit $-\sum S_p S_q r$. Zufolge Gleichung 1) ist

$$0 = A_p - \sum S_p S_q r.$$

Wir lassen zweitens die Knoten des Fachwerks q die Wege durchlaufen, welche der Formänderung des Fachwerks p entsprechen und welche durch die Längenänderungen der Stäbe $S_q r$ bestimmt sind. Hierbei leisten die Lasten Q eine Arbeit A_q und die Stabkräfte S_q die Arbeitsumme $-\sum S_q S_p r$. Gleichung 1) fordert wiederum

$$0 = A_q - \sum S_q S_p r.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$A_p = A_q. \quad (28)$$

Die Lasten $P_1, P_2, P_3 \dots$ des Fachwerks p leisten also bei der elastischen Formänderung des Fachwerks q dieselbe Arbeitsumme wie die Lasten $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ des Fachwerks q bei der Formänderung des Fachwerks p .

Auch dieser Satz, welcher in anderer Form und Herleitung von Professor *Betti* in der italienischen Zeitschrift *Nuovo Cimento*, 1872 mitgeteilt wurde, kann ohne weiteres auf jeden gestutzten, elastischen Körper übertragen werden. Von seinen Anwendungen sind folgende die wichtigsten:

1. Das Fachwerk p trägt nur *eine* Last P , das Fachwerk q ebenfalls nur *eine* Last Q . Beide Lasten sind von gleicher Größe, können aber nach Richtung und Angriffspunkt verschieden sein. Bei der elastischen Formänderung des Fachwerks p legt der Angriffspunkt der Last Q den Weg w_p zurück; ebenso bezeichnet w_q den Weg des Angriffspunktes von P bei der Formänderung des Fachwerks q . Nach dem Satze von *Betti* ist:

$$P w_q \cos(P, w_q) = Q w_p \cos(Q, w_p)$$

oder

$$w_q \cos(P, w_q) = w_p \cos(Q, w_p),$$

d. h. *die Projektion des Weges w_q auf die Kraft P ist ebenso groß wie die Projektion des Weges w_p auf die Kraft Q .*

Diese Beziehung wurde im Jahre 1864 von *Maxwell* in der englischen Zeitschrift *The Philosophical Magazine* mitgeteilt und aus dem Satze *Clapeyrons* abgeleitet. In Deutschland, wo sie erst

zwanzig Jahre später bekannt wurde, bezeichnet man sie als den *Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen*.

2. Das Fachwerk p trägt eine einzige Last P_0 , das Fachwerk q dagegen eine Gruppe von Lasten $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$; alle Lasten P, Q sind gleich gerichtet, z. B. lotrecht. Die Biegelinie, welche die Formänderung des Fachwerks p darstellt, bestimmt die Senkungen $y_1, y_2, y_3 \dots$ der Angriffspunkte der Lasten $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$. Bezeichnet man ferner mit y_0 die Senkung des Angriffspunktes von P_0 bei der Formänderung des Fachwerks q , so folgt aus dem Satze von Betti:

$$P_0 y_0 = Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + Q_3 y_3 + \dots$$

oder

$$y_0 = \frac{\sum Q y}{P_0}. \quad (29)$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Beziehung wurde in meinem *Beitrag zur Theorie des Fachwerks* vom Jahre 1875 mittels des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten abgeleitet, und zwar zu einer Zeit, als die Sätze von Betti und Maxwell mir und überhaupt in Deutschland noch nicht bekannt waren. Man vergleiche die Gleichung 12 der vorliegenden Abhandlung und den Abschnitt 5 der Abhandlung X.

3. Das Fachwerk p trägt eine einzige Last P , das Fachwerk q dagegen eine Gruppe von *beliebig gerichteten* Lasten $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$.

Vermittels des Geschwindigkeitsplanes der Formänderung p läßt sich für jede gegebene Lastengruppe (Q) die Arbeit A_q bestimmen. Die Bedingung

$$A_q = A_p = Pw$$

ergibt dann den Weg w , den der Angriffspunkt von P in der Richtung dieser Last bei der Formänderung q zurücklegt.

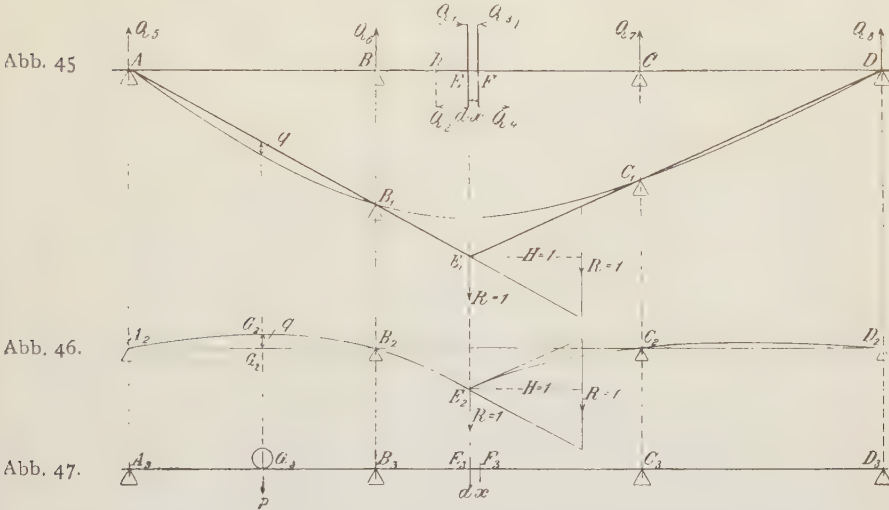
Hierher gehört auch der durch Gleichung 27) bezeichnete Fall: Die Einzellast

$$P = \partial K_1$$

erzeugt eine Formänderung des Fachwerks p , bei der die Angriffspunkte der Lasten $K_1, K_2, K_3 \dots$ in den Richtungen dieser Lasten die Verschiebungen $\partial w_1, \partial w_2, \partial w_3 \dots$ erleiden. Die Verschiebung w_1 , die der Angriffspunkt von ∂K_1 bei der von den Lasten $K_1, K_2, K_3 \dots$ erzeugten Formänderung in der Richtung von K_1 ausführt, hat daher die Größe

$$w_1 = K_1 \frac{\partial w_1}{\partial K_1} + K_2 \frac{\partial w_2}{\partial K_1} + K_3 \frac{\partial w_3}{\partial K_1} + \dots$$

Zu den Anwendungen des Satzes von Betti gehört ferner die *Bestimmung von Einflußlinien*, wovon ein Beispiel bereits in Gleichung 29) gegeben wurde. Als zweites Beispiel wählen wir die folgende Aufgabe:



Der in Abb. 45 dargestellte kontinuierliche Balken konstanten Querschnitts ruht auf den vier in einer Horizontalen liegenden Stützen A, B, C, D . Es soll das Biegemoment M_e , das von der wandernden Einzellast P in dem gegebenen Balkenquerschnitt E erzeugt wird, für jede Lage der Last bestimmt und durch die Einflußlinie $A_2 B_2 E_2 C_2 D_2$ (Abb. 46) graphisch dargestellt werden. Dieselbe Aufgabe ist auf einem anderen Wege in der Abhandlung X, Abschnitt 12 gelöst worden.

Wir bezeichnen mit ε den Elastizitätsmodul des Balkenmaterials, mit J das Trägheitsmoment des Balkenquerschnitts und mit dx die Länge einer unendlich kleinen, dem Querschnitt E benachbarten Balkenstrecke EF . Um die Kräftegruppe (Q) zu bilden, lassen wir auf den Balkenquerschnitt E das Kräftepaar Q_1, Q_2 mit dem unendlich großen positiven Moment

$$Q_1 h = \frac{\varepsilon J}{dx}$$

und auf den Querschnitt F das Kräftepaar Q_3, Q_4 mit einem ebenso großen negativen Moment einwirken. Die bezeichneten vier Lasten Q erzeugen die Stützendrucke Q_5, Q_6, Q_7, Q_8 , die Biegemomente M_q und die in Abb. 46 durch die elastische Linie $A_2 B_2 E_2 C_2 D_2$ dar-

gestellte Formänderung. Bei dieser Formänderung leistet eine im Punkte G_3 (Abb. 47) angebrachte Last P die Arbeit

$$A_p = - Pq.$$

Diese Arbeit ist in dem vorliegenden Beispiel negativ, weil der Punkt G_3 des Balkens um die Strecke

$$q = G_2 G_2$$

sich *hebt*.

Die Belastung der Seilkurve $A_2 B_2 E_2 C_2 D_2$ hat auf der unendlich kleinen Strecke EF die *endliche* Größe

$$R = \frac{Q_1 h dx}{\varepsilon J} = \frac{\varepsilon J dx}{dx \varepsilon J} = 1.$$

Daher hat die Seilkurve im Punkte E_2 einen *Knick*, dessen Größe durch die Horizontalkraft H und die Last R :

$$H = R = 1$$

bestimmt wird. Auf jeder anderen Strecke dx , auf welcher das Bieugungsmoment die Größe M_q hat, ist die Belastung der Seilkurve von der *unendlich kleinen* Größe $-\frac{M_q dx}{\varepsilon J}$ (vergl. X, 1). Im vorliegenden Beispiel sind alle diese Lasten negativ, d. h. sie zeigen nach oben.

Man kann die Bestimmung der Ordinaten q vereinfachen, indem man, wie in Abb. 45 geschehen ist, das Seilpolygon $A E_1 D$ der Last R und gesondert davon die Seilkurve $A B_1 C_1 D$ der positiven Lasten $+\frac{M_q dx}{\varepsilon J}$ bildet. Auf jeder Vertikalen schneiden diese beiden Seillinien die Ordinate q ab. Die Seilkurve $A B_1 C_1 D$ ist die elastische Linie des *unbelasteten* und in den Punkten A , B_1 , C_1 , D gestützten Balkens. Die Bildung dieser Linie wurde in der Abhandlung X, Abschnitt 16 beschrieben; es erscheint unnötig, die Beschreibung hier zu wiederholen.

Bei der Belastung des Balkens durch die Einzellast P im Punkte G_3 (Abb. 47) nimmt der Balkenquerschnitt E_3 ein negatives Bieugungsmoment M_e auf und dreht sich gegen seinen Nachbarquerschnitt F_3 in negativem Sinne um den unendlich kleinen Winkel

$$d\varphi = \frac{M_e dx}{\varepsilon J}$$

(vergl. IX, 2). Die beiden Kräftepaare (Q_1, Q_2) und (Q_3, Q_4) leisten daher bei der Formänderung p die negative Arbeit

$$A_q = Q_1 h dq = \frac{\varepsilon J}{dx} \frac{M_e dx}{\varepsilon J} = M_e.$$

Die Bedingung

$$A_q = A_p$$

des Satzes von Betti fordert demnach im vorliegenden Falle

$$M_e = -Pq.$$

Legt man der Ordinate q das *positive* Vorzeichen bei, wenn sie in Abb. 46 *unter* der Abszissenachse A_2D_2 liegt, so wird für jede Lage der wandernden Last P das Biegemoment M_e *auch dem Vorzeichen nach* durch das Produkt

$$M_e = Pq$$

bestimmt, und da P unveränderlich ist, also graphisch dargestellt durch die Ordinaten q in den Abb. 45 und 46.

Die Lösung der vorstehenden Aufgabe ändert sich nicht wesentlich, wenn der Querschnitt des Balkens veränderlich ist.

18. Das Bogenfachwerk mit Kämpfergelenken. Die drei wichtigsten Formen des zusammengesetzten Fachwerks sind das

Abb. 48.

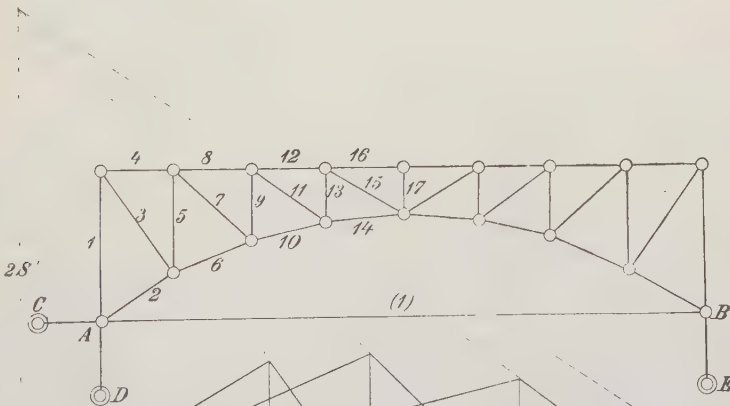
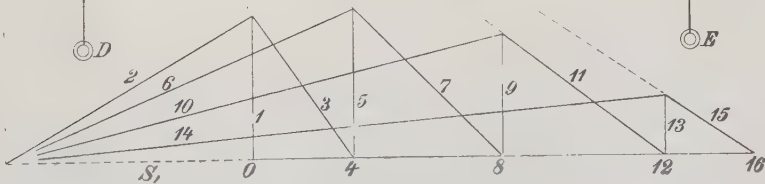


Abb. 49.



Bogenfachwerk mit Kämpfergelenken, das kontinuierliche Balken-
fachwerk und das Bogenfachwerk ohne Kämpfergelenke. Um die
Anwendung der Gleichungen 19) auf diese drei Formen zu erläutern,

wählen wir drei Beispiele, in denen die Anzahl der überzähligen Stäbe 1, 2 und 3 ist.

Das durch Abb. 48 im Maßstabe 1:300 dargestellte Bogenfachwerk enthält 18 Knoten und mit Einschluß der vier Stützstäbe CA , DA , AB , EB 37 Stäbe. Es enthält demnach nur *einen* überzähligen Stab (1), dessen Stabkraft S' durch die erste der Gleichungen 19) bestimmt wird:

$$S' = - \frac{\sum' \kappa' l \delta t + \sum \kappa' \mathfrak{E} r}{\sum' \kappa'^2 r}. \quad (30)$$

Als *überzähliger* Stab kann zwar nach Belieben irgend ein Stab des Fachwerks bezeichnet werden; man gewinnt jedoch einen Rechnungsvorteil, wenn man den die beiden Kämpfergelenke verbindenden Stützstab AB wählt, weil dieser Stab zu den beiden Bogenhälften *symmetrisch* liegt. Infolgedessen sind für je zwei symmetrisch liegende Stäbe die Einflußzahlen κ' und bei symmetrischer Belastung auch die Stabkräfte $\mathfrak{E}$ von gleicher Größe.

Wir nehmen an, daß die Stabquerschnitte F und also die Größen $r = \frac{l}{\epsilon F}$ gegeben sind. Für die vier Stützstäbe ist $r = 0$

zu setzen, weil diese Stäbe an den elastischen Formänderungen nicht teilnehmen. Die Rechnung zerfällt nun in folgende Abschnitte:

I. *Graphische Bestimmung der Einflußzahlen κ' .* Die Stabkräfte $\kappa' S'$, die in den Stäben des einfachen Fachwerks durch eine Stabkraft S' gleich eins des überzähligen Stabes AB hervorgerufen werden, sind durch den Kräfteplan Abb. 49 in dem Maßstabe 1 cm = 0,3 bestimmt worden. Bei der Bildung desselben wurde zur Ermäßigung der Zeichenfehler das im Abschnitt 4 der Abhandlung II beschriebene Verfahren angewandt.

Beispiel. Die in Abb. 50 mit 10, 11, 12 bezeichneten Kräfte $\kappa'_{10} S'$, $\kappa'_{11} S'$, $\kappa'_{12} S'$ bilden mit S' eine Gleichgewichtsgruppe. Wir ersetzen die Kraft S' durch drei Kräfte P_1 , P_2 , P_3 , die durch Schnittpunkte der Kräfte 10, 11, 12 gehen:

$$P_1 \mp P_2 \mp P_3 \equiv S'.$$

Abb 50.

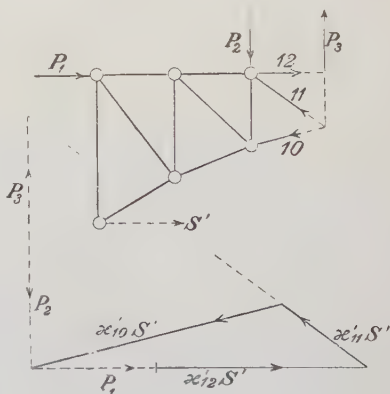


Abb. 51.

P_1 hat Größe, Richtung und Sinn von S' :

$$P_1 = S' = 1.$$

Daher ist

$$P_2 \mp P_3 \equiv S' \mp P_1.$$

Da im vorliegenden Beispiel der Arm des Kräftepaares ($S' \mp P_1$) doppelt so groß ist wie der des Paares ($P_2 \mp P_3$), so ist

$$P_2 = P_3 = 2S' = 2.$$

Aus der Gleichgewichtsgruppe

$$0 \equiv P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp \kappa'_{10} S' \mp \kappa'_{11} S' \mp \kappa'_{12} S'$$

entstehen die beiden gleichwertigen Gruppen:

$$\mp \kappa'_{10} S' \mp P_3 \equiv P_2 \mp P_1 \mp \kappa'_{12} S' \mp \kappa'_{11} S',$$

deren gemeinschaftliche Resultante die Richtung des Stabes 11 hat. Hiernach konnte der Kräfteplan dieser beiden Gruppen (Abb. 51) im Maßstabe $1 \text{ cm} = 0,6$ gebildet werden.

In der Abb. 49 sind die Kräfte $\kappa'_1 S'$, $\kappa'_2 S'$, $\kappa'_3 S'$..., die im Maßstabe $1 \text{ cm} = 0,3$ die Einflußzahlen κ'_1 , κ'_2 , κ'_3 ... bestimmen, mit 1, 2, 3 ... bezeichnet. Die Strecken κ'_4 , κ'_8 , κ'_{12} , κ'_{16} haben den gemeinschaftlichen Anfangspunkt 0, und ihre Endpunkte sind mit 4, 8, 12, 16 bezeichnet. Die *negativen* Werte von κ' werden durch kräftigere Linien gekennzeichnet.

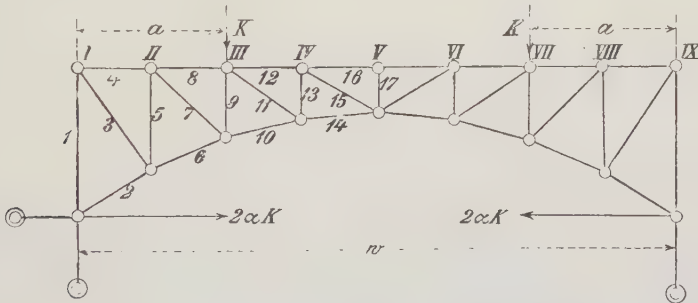


Abb. 52.

2. Die Bestimmung der Stabkräfte S , welche von zwei symmetrisch liegenden Einzellasten K hervorgerufen werden. Die Berechnung der Stabkraft S' des überzähligen Stabes (1)

$$S' = \alpha K,$$

die von einer Last K irgend eines Knotens III erzeugt wird, vereinfacht sich, wenn eine zweite Last K des zum Knoten III sym-

metrisch belegenen Knotens VII (Abb. 52) hinzugefügt wird. Um die von dieser symmetrischen Belastung erzeugte Stabkraft

$$S' = 2 \alpha K \quad (31)$$

zu ermitteln, brauchen die Stabkräfte $\mathfrak{S}$ nur für *eine* Balkenhälfte bestimmt zu werden. Der belastete Knoten III, dessen wagerechter Abstand vom linken Auflager mit a bezeichnet wird, trennt die Stäbe der linken Balkenhälfte in zwei Gruppen. Die Stabkräfte

$$\mathfrak{S} = \beta K \quad (32)$$

der *ersten* Gruppe, zu der die Stäbe 1 bis 10 gehören, werden in dem Maßstabe

$$1 \text{ cm} = 1,5 K$$

durch den Kräfteplan Abb. 53 bestimmt; die mit den Zahlen 1, 2, 3 ... bezeichneten Strecken ergeben also die Einflußzahlen β in dem Maßstabe $1 \text{ cm} = 1,5$.

Beispiel. In Abb. 54 bilden die mit 6, 7, 8 bezeichneten Kräfte $\beta_6 K$, $\beta_7 K$, $\beta_8 K$ mit dem Auflagerdruck K eine Gleichgewichts-

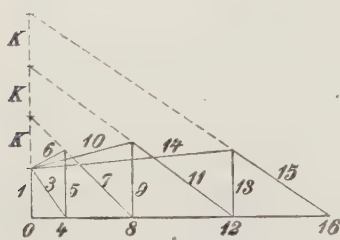


Abb. 53.

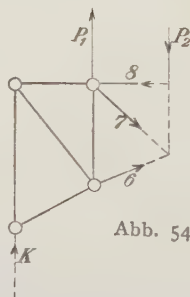


Abb. 54.

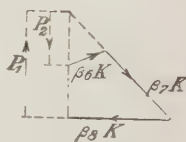


Abb. 55.

gruppe. Die Kraft K wird ersetzt durch die gleichwertige Gruppe der zwei Kräfte P_1 , P_2 , deren Größen

$$P_1 = 2 K, \quad P_2 = K$$

aus ihrer Lage unmittelbar sich ergeben. Die Gleichgewichtsgruppe:

$$0 \equiv P_1 \mp P_2 \mp \beta_6 K \mp \beta_7 K \mp \beta_8 K$$

bestimmt die beiden gleichwertigen Gruppen:

$$+\beta_6 K + P_2 \equiv \beta_7 K \mp \beta_8 K \mp P_1,$$

deren gemeinschaftliche Resultante mit dem Stabe 7 zusammenfällt. Hieraus ergibt sich der Kräfteplan der beiden Gruppen, welcher in Abb. 55 in dem oben angegebenen Maßstabe dargestellt ist.

Die Stabkräfte $\mathfrak{S}$ der *zweiten* Stabgruppe, zu der die Stäbe 11 bis 17 gehören, werden in folgender Weise bestimmt:

Beispiel. Die Stabkräfte $\mathfrak{S}$ der Stäbe 10, 11, 12 (Abb. 57) bilden eine Gleichgewichtsgruppe mit dem Kräftepaar, welches aus dem Auflagerdruck K und der Last K des Knotens III besteht. Das positive Moment dieses Kräftepaars ist

$$Ka = \frac{a}{w} Kw, \quad (33)$$

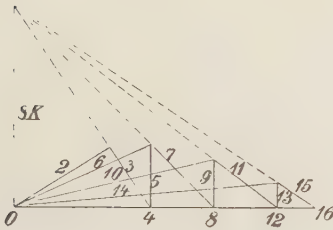


Abb. 56.

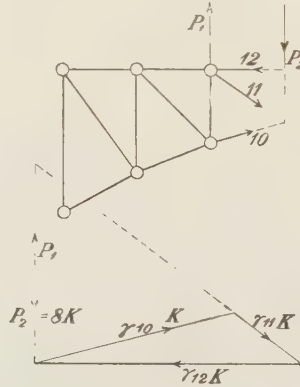


Abb. 58.

wenn mit w die Stützweite des Balkens bezeichnet wird. Wir bestimmen nun die Stabkräfte γK , welche durch ein Kräftepaar von dem *konstanten* positiven Moment Kw hervorgerufen werden, und erhalten darauf für $\mathfrak{S}$ die Werte:

$$\mathfrak{S} = \frac{a}{w} \gamma K. \quad (34)$$

Wir legen die Vertikalkräfte

$$P_1 = P_2 = 8K,$$

welche das Kräftepaar von dem positiven Moment Kw bilden, durch die Schnittpunkte der Stäbe 11, 12 und 10, 11 und zerlegen die Gleichgewichtsgruppe:

$$0 = P_1 \mp P_2 \mp \gamma_{10} K \mp \gamma_{11} K \mp \gamma_{12} K$$

in die beiden gleichwertigen Gruppen:

$$+\gamma_{10} K + P_2 \equiv \gamma_{11} K \mp \gamma_{12} K \mp P_1,$$

deren gemeinschaftliche Resultante mit dem Stabe 11 zusammenfällt. Die Kräftepläne (Abb. 58 und 56) bestimmen die Kräfte γK in dem Maßstabe 1 cm gleich $3K$, die Einflußzahlen γ also in dem Maßstabe 1 cm gleich 3.

Es ist zu bemerken, daß der Stab 10 nach Belieben zur ersten oder zur zweiten Stabgruppe gezählt werden kann, da die Gleichungen 32) und 34) für diesen Stab dieselbe Stabkraft $\mathfrak{S}$ ergeben.

Nachdem die Einflußzahlen α' , β und γ bestimmt worden sind, kann die Summe $\Sigma \alpha' \mathfrak{S}$ gebildet werden; sie zerfällt in zwei Teile, die durch die Summenzeichen Σ_0^a und $\Sigma_a^{\frac{w}{2}}$ bezeichnet werden. Der

erste Teil bezieht sich auf die Stäbe der ersten Gruppe, im vorstehenden Beispiel also auf die Stäbe 1 bis 10 und auf die symmetrisch liegenden Stäbe der rechten Balkenhälfte:

$$2 \sum_0^a x' \beta K r = 2 K \sum_0^a x' \beta r.$$

Der zweite Teil bezieht sich auf die Stäbe 11 bis 17 der zweiten Stabgruppe und auf die entsprechenden Stäbe der rechten Balkenhälfte:

$$2 \sum_a^w x' \frac{a}{w} \gamma K r = 2 \frac{a}{w} K \sum_a^w x' \gamma r.$$

Demnach ist für die in Abb. 52 angegebene Belastung:

$$\Sigma x' \mathcal{S} r = 2 K \left(\sum_0^a x' \beta r + \frac{a}{w} \sum_a^w x' \gamma r \right). \quad (35)$$

3. *Die Berechnung der Einflußzahlen α .* Wenn, wie wir zunächst annehmen, die Stabtemperaturen des spannungslosen Zustandes sich nicht ändern, die Summe $\Sigma x' l \delta t$ also gleich null ist, so ist nach den Gleichungen 30), 31) und 35) für die aus den zwei Lasten K bestehende symmetrische Belastung:

$$S' = 2 \alpha K = - \frac{\Sigma x' \mathcal{S} r}{\Sigma x'^2 r} = - \frac{2 K \left(\sum_0^a x' \beta r + \frac{a}{w} \sum_a^w x' \gamma r \right)}{\Sigma x'^2 r}.$$

Demnach ist

$$\alpha = - \frac{\sum_0^a x' \beta r + \frac{a}{w} \sum_a^w x' \gamma r}{2 \sum_0^w x'^2 r}. \quad (36)$$

Für das vorliegende Beispiel sind die Werte der Einflußzahl α für die Abszissen a gleich $\frac{1}{8} w$, $\frac{2}{8} w$, $\frac{3}{8} w$, $\frac{4}{8} w$ in der umstehenden Tabelle berechnet worden.

Die Spalten 3, 4 und 5 enthalten die gegebenen Stablängen l , die gegebenen Stabquerschnitte F und das 10^7 -fache der Größen

$$r = \frac{l}{\varepsilon F},$$

wobei der Elastizitätsmodul

$$\varepsilon = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/qcm}$$

angenommen wurde. Die Spalten 6, 7, 8 geben die 10-fachen Werte der aus den Kräfteplänen Abb. 49, 53, 56 entnommenen unbenannten Zahlen x' , β , γ . Hieraus wurden die in den Spalten 9, 10 und 12 verzeichneten 10^7 -fachen Werte von $x'^2 r$, $x' \beta r$ und $x' \gamma r$ berechnet. Durch Summierung ergaben sich die Größen $10^7 \sum_0^w x'^2 r$ in

und da aus Spalte 9 für das ganze Fachwerk

$$\Sigma x'^2 r = \frac{2 \cdot 577}{10^7}$$

sich ergibt, so ist

$$\alpha = \frac{365 + \frac{2}{8} 1879}{1154} = 0,72.$$

4. *Die Bestimmung der Grenzwerte der Stabkräfte.* Die veränderlichen lotrechten Lasten $K_1, K_2, K_3 \dots$ werden von den Knoten I, II, III $\dots$ der *oberen* Gurtung des Fachwerks aufgenommen. Werden mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ die in der Tabelle berechneten Einflußzahlen dieser Lasten für die Stabkraft S' des überzähligen Stabes (1) bezeichnet, so hat bei einer gegebenen zusammengesetzten Belastung $K_1, K_2, K_3 \dots$ die Stabkraft S' die Größe

$$S' = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3 + \dots$$

Wir bezeichnen ferner wie bisher für irgend einen Stab des durch Beseitigung des überzähligen Stabes entstehenden *einfachen* Fachwerks mit $x_1, x_2, x_3 \dots$ die Einflußzahlen der Lasten $K_1, K_2, K_3 \dots$, so daß die Stabkraft S bestimmt wird durch die Gleichung

$$S = x_1 K_1 + x_2 K_2 + x_3 K_3 + \dots$$

Die Stabkraft S dieses Stabes im zusammengesetzten Fachwerk hat also nach Gleichung 18) die Größe:

$$S = S + x' S'$$

oder

$$S = K_1 (x_1 + x' \alpha_1) + K_2 (x_2 + x' \alpha_2) + K_3 (x_3 + x' \alpha_3) + \dots \quad (37)$$

Die Zahlenwerte $x', \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ sind aus der Tabelle zu entnehmen. Um jede Stabkraft S als Funktion aller Lasten K darzustellen, bedarf es also nur noch der Bestimmung von $x_1, x_2, x_3 \dots$. Diese Einflußzahlen können durch Kräftepläne dargestellt werden, wie im Abschnitt 8 beschrieben worden ist. Zieht man die *Rechnung* vor, so können hierbei die bereits bekannten Zahlen β und γ benutzt werden, wie an einem Beispiel gezeigt werden soll.

Beispiel. Einflußzahlen der Stabkraft des Stabes 15. Der Schnitt ss durch die Stäbe 14, 15 und 16 (Abb. 59) trennt die zu belastenden Knoten in zwei Gruppen (I, II, III, IV) und (V, VI, VII, VIII, IX), für die der Wert x verschiedene Formen annimmt. Wir belasten zunächst einen Knoten der *ersten* Gruppe, z. B. den Knoten III, und fügen zu den beiden Kräften P und $\frac{w-a}{w} P$, welche auf den Fach-

werksteil links vom Schnitt ss einwirken, noch die Gleichgewichtsgruppe P_1, P_2 hinzu, wodurch die zu bestimmende Stabkraft S_{15}

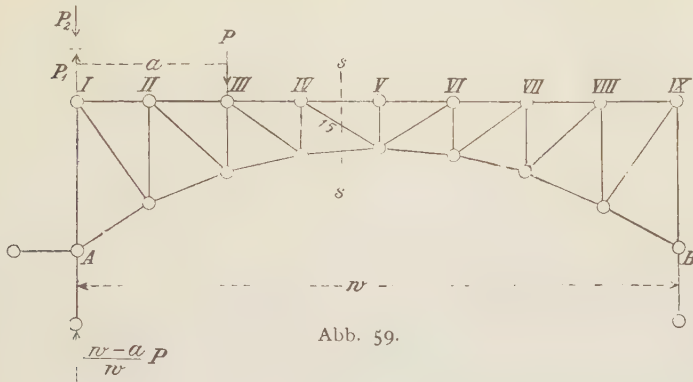


Abb. 59.

nicht geändert wird. Die beiden lotrechten Kräfte P_1, P_2 sind der Größe nach gleich P und dem Sinne nach einander entgegengesetzt. Das Kräftepaar P, P_1 erzeugt in dem Stabe 15 die Stabkraft

$$\frac{a}{w} \gamma_{15} P = \frac{2}{8} \cdot 1,6 P = +0,4 P.$$

Ferner haben die beiden zusammenfallenden Kräfte P_2 und $\frac{w-a}{w} P$ eine nach unten zeigende Resultante $\frac{a}{w} P$ und rufen also im Stabe 15 die Stabkraft

$$- \frac{a}{w} \beta_{15} P = - \frac{2}{8} 2,4 P = -0,6 P$$

hervor. Demnach ist für jede links vom Schnitt liegende Last K

$$x = \frac{a}{w} (-\beta + \gamma). \quad (38)$$

Im vorliegenden Beispiel ist für den Stab 15:

$$x_3 = \frac{2}{8} (-2,4 + 1,6) = -0,2.$$

Ebenso ergibt sich für diesen Stab

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -0,1, \quad x_4 = -0,3.$$

Wir belasten ferner einen Knoten der zweiten Gruppe, z. B. den Knoten VI. In diesem Falle wirkt auf den Fachwerksteil links vom

Schnitt eine einzige Kraft: die nach oben zeigende Stützkraft der Stütze A von der Größe

$$\frac{w-a}{w} P = \frac{3}{8} P,$$

welche im Stabe 15 die Stabkraft

$$S = \frac{w-a}{w} \beta_{15} P = \frac{3}{8} 2,4 P = +0,9 P$$

erzeugt. Demnach ist für jede *rechts* vom Schnitt liegende Last die Einflußzahl

$$x = \frac{w-a}{w} \beta \quad (39)$$

und für den Stab 15:

$$x_5 = +1,2, \quad x_6 = +0,9, \quad x_7 = +0,6, \quad x_8 = 0,3, \quad x_9 = 0.$$

Wir entnehmen ferner aus der Tabelle:

$$\alpha_1 = \alpha_9 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_8 = 0,42, \quad \alpha_3 = \alpha_7 = 0,72, \quad \alpha_4 = \alpha_6 = 0,96, \\ \alpha_5 = 1,06$$

und erhalten durch Einsetzen dieser Zahlenwerte in die Gleichung 37) für das vorliegende Beispiel:

$$S_{15} = -0,27 K_2 - 0,49 K_3 - 0,68 K_4 + 0,78 K_5 + 0,52 K_6 \\ + 0,31 K_7 + 0,13 K_8.$$

Beträgt für jeden der sieben Knoten die ständige Last 3 t und die größte bewegliche Last 9 t, so ist nach der vorstehenden Gleichung für den Stab 15:

$$S_{\min} = (-0,27 - 0,49 - 0,68 + 0,78 + 0,52 + 0,31 + 0,13) 3 \text{ t} \\ + (-0,27 - 0,49 - 0,68) 9 \text{ t} = -12,1 \text{ t}$$

und

$$S_{\max} = (-0,27 - 0,49 - 0,68 + 0,78 + 0,52 + 0,31 + 0,13) 3 \text{ t} \\ + (0,78 + 0,52 + 0,31 + 0,13) 9 \text{ t} = +16,6 \text{ t}.$$

Im *ersten* Falle sind die Knoten II, III, IV, im zweiten die Knoten V, VI, VII, VIII belastet.

Wenn eine solche Rechnung für alle Stäbe des Fachwerks auszuführen ist, so gibt man ihr zweckmäßig die tabellarische Form.

Will man zur Bestimmung der Grenzwerte *Einflußlinien* anwenden, so bildet man zweckmäßig *zwei* Polygone für jeden Stab: das erste mit den Ordinaten $x_1, x_2, x_3 \dots$, das zweite mit den Ordinaten $x'\alpha_1, x'\alpha_2, x'\alpha_3 \dots$, und zwar so, daß auf jeder Ordinate von den beiden Polygonen die algebraische Summe $(x + x'\alpha)$ abgeschnitten wird. Die Ausführung dieses Verfahrens bedarf keiner weiteren Beschreibung.

5. *Berechnung der Wirkungen von Temperaturänderungen der Stäbe.* Gewöhnlich wird das Fachwerk bei einer mittleren Temperatur aufgestellt, so daß die größten Temperaturänderungen ± 40 und -40°C. erreichen können.

Wir bestimmen für das vorliegende Beispiel die Wirkung einer gleichmäßigen Temperaturerhöhung

$$t = +40^\circ \text{C.}$$

unter der Voraussetzung, daß die vier Stützstäbe ihre Länge *nicht* ändern.

Infolge dieser Aenderung entsteht nach Gleichung 30) im überzähligen Stab (1) die Stabkraft

$$S' = - \frac{\delta t \Sigma x' l}{\Sigma x'^2 r}.$$

Da der überzählige Stab seine Länge nicht ändert, so erstrecken sich die beiden Summen nur auf die Stäbe des *einfachen* Balkenfachwerks, und es ist daher zu setzen:

$$S' = - \frac{\delta t \Sigma x' l}{\Sigma x'^2 r}. \quad (40)$$

Nach Gleichung 15) ist

$$\Sigma x' l = - l' = -2400 \text{ cm.}$$

Ferner entnehmen wir aus der Tabelle:

$$\Sigma x'^2 r = +1154 \frac{1 \text{ cm}}{10^7 \text{ kg}}.$$

Der Ausdehnungskoeffizient des Schmiede Eisens ist

$$\delta = \frac{1}{80\,000}.$$

Daher ist

$$\delta t = \frac{40}{80\,000} = \frac{1}{2000}$$

und

$$S' = \frac{+2400 \cdot 10^7}{2000 \cdot 1154} = +10\,400 \text{ kg.}$$

Die Stabkräfte des Fachwerks ändern sich infolge dieser Temperatureinwirkung um

$$x' S' = 10\,400 x' \text{ kg,}$$

die Stabkraft des Stabes 15 z. B. um

$$-0,4 \cdot 10\,400 = -4160 \text{ kg.}$$

6. *Wirkung von Aenderungen der Stützenlage.* Da in den drei Stützstäben *CA, DA, EB* (Abb. 48) des einfachen Balkenfachwerks durch eine Stabkraft S' des überzähligen Stabes (1) keine Spannungen hervorgerufen werden, so haben Längenänderungen jener drei Stäbe keinen Einfluß auf die Stabkräfte der übrigen Stäbe. Es kommen hier also nur die Längenänderungen des überzähligen Stabes (1) in Betracht, die durch Bewegungen der Widerlager des Bogenfachwerks herbeigeführt werden können. Für das vorliegende Beispiel sollen die Stabkräfte berechnet werden, die durch eine *Verlängerung des Stabes (1) um 1 cm* erzeugt werden. Man kann sich vorstellen, daß diese Längenänderung herbeigeführt wird von einer Temperaturerhöhung des überzähligen Stabes (1), durch welche seine Länge l' um

$$\Delta l' = l' \delta t = + 1 \text{ cm}$$

sich vergrößert, während die Temperatur der übrigen Stäbe unverändert bleibt. Da für den Stab (1)

$$\kappa' = + 1$$

ist, so folgt

$$\Sigma' \kappa' l \delta t = + 1 \text{ cm}$$

und nach Gleichung 30):

$$S' = - \frac{\Sigma' \kappa' l \delta t}{\Sigma' \kappa'^2 r} = \frac{- 10^7}{1154} = - 8700 \text{ kg.}$$

In den übrigen Stäben ändert sich die Stabkraft infolgedessen um

$$S = \kappa' S' = - 8700 \kappa' \text{ kg,}$$

im Stabe 15 z. B. um

$$+ 0,4 \cdot 8700 = + 3480 \text{ kg.}$$

19. *Das kontinuierliche Balkenfachwerk.* Das in Abb. 60 im Maßstabe 1 : 200 dargestellte Fachwerk hat 13 Knoten und, mit Einschluß der 5 Stützstäbe, 28 Stäbe, folglich 2 überzählige Stäbe, als welche die beiden Stützstäbe (1) und (2) gewählt werden können. Die Knoten I, II, III . . . der *unteren* Gurtung nehmen die Lasten auf.

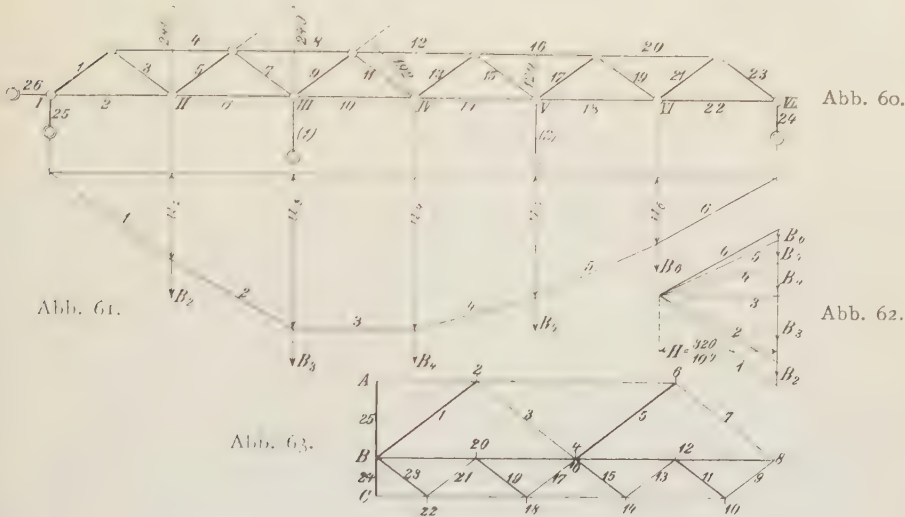
Werden die beiden überzähligen Stäbe beseitigt, so entsteht ein *einfaches Balkenfachwerk*, dessen Stabkräfte $\mathfrak{S}$ bestimmt werden durch die Gleichung:

$$\mathfrak{S} = \kappa_2 K_2 + \kappa_3 K_3 + \kappa_4 K_4 + \kappa_5 K_5 + \kappa_6 K_6, \quad (41)$$

wenn wie bisher mit $\kappa_2, \kappa_3 \dots$ die Einflußzahlen der von den Knoten II, III . . . aufzunehmenden Lasten $K_2, K_3 \dots$ für die Stabkräfte des einfachen Fachwerks bezeichnet werden. Es ist zu

beachten, daß für die beiden starren Stützstäbe (1), (2) r gleich null ist, und daß die Einflußzahlen x' , x'' der Stabkräfte dieser beiden Stäbe mit den Einflußzahlen der Lasten K_3 , K_5 übereinstimmen:

$$x' = x_3, \quad x'' = x_5.$$



Die Gleichungen 19) nehmen daher in diesem Beispiele die folgende Form an:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \Sigma' x_3 l \delta t + S' \Sigma x_3^2 r + S'' \Sigma x_3 x_5 r + K_3 \Sigma x_3 x_2 r + K_4 \Sigma x_3^2 r + K_4 \Sigma x_3 x_4 r + \dots \\ 0 &= \Sigma' x_5 l \delta t + S' \Sigma x_5 x_3 r + S'' \Sigma x_5^2 r + K_3 \Sigma x_5 x_2 r + K_5 \Sigma x_5 x_3 r + K_4 \Sigma x_5 x_4 r + \dots \end{aligned} \right\} (42)$$

Die Summenwerte in diesen Gleichungen lassen sich in verhältnismäßig einfacher Weise auf graphischem Wege bestimmen, mit Ausnahme der beiden Summen $\Sigma' x_3 l \delta t$ und $\Sigma' x_5 l \delta t$, die in der Regel bequemer zu berechnen sind. Wir benutzen daher dieses Beispiel, um das graphische Verfahren zu erläutern.

Wir bezeichnen mit u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 die elastischen Senkungen der Knoten II, III, IV, V, VI, welche erfolgen, wenn das in den Knoten I und VII unterstützte einfache Balkenfachwerk im Knoten III mit

$$K_3 = 1 \text{ kg} \quad \text{oder} \quad S' = 1 \text{ kg}$$

belastet wird; ebenso mit v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 die Senkungen dieser Knoten bei einer Belastung

$$K_5 = 1 \text{ kg} \quad \text{oder} \quad S'' = 1 \text{ kg}.$$

Der Symmetrie wegen ist

$$v_2 = u_6, \quad v_3 = u_5, \quad v_4 = u_4, \quad v_5 = u_3, \quad v_6 = u_2;$$

daher braucht nur eine der beiden Biegunslinien gebildet zu werden. Wir wählen die Biegunslinie für die Belastung K_3 gleich 1 kg. Bei dieser Belastung erhalten die Stabkräfte des einfachen Fachwerks die Größen:

$$\mathcal{S} = 1 \text{ kg} \cdot x_3 = 1 \text{ kg} \cdot x',$$

also die Längenänderungen der Stäbe:

$$\Delta l = x_3 r \cdot 1 \text{ kg} = x' r \cdot 1 \text{ kg}.$$

Nach Gleichung 8) sind folglich die Senkungen der Knoten II, III, IV ...:

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= 1 \text{ kg} \cdot \Sigma x' x_2 r = 1 \text{ kg} \cdot \Sigma x_3 x_2 r \\ u_3 &= 1 \text{ kg} \cdot \Sigma x' x_3 r = 1 \text{ kg} \cdot \Sigma x_3^2 r \\ u_4 &= 1 \text{ kg} \cdot \Sigma x' x_4 r = 1 \text{ kg} \cdot \Sigma x_3 x_4 r \\ u_5 &= 1 \text{ kg} \cdot \Sigma x' x_5 r = 1 \text{ kg} \cdot \Sigma x_3 x_5 r \\ u_6 &= 1 \text{ kg} \cdot \Sigma x' x_6 r = 1 \text{ kg} \cdot \Sigma x_3 x_6 r \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Die Gleichungen 42) erhalten, wenn man von der Wirkung von Temperaturänderungen absieht, hierdurch die Form:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= S' u_3 + S'' u_5 + K_2 u_2 + K_3 u_3 + K_4 u_4 + K_5 u_5 + K_6 u_6 \\ 0 &= S' v_3 + S'' v_5 + K_2 v_2 + K_3 v_3 + K_4 v_4 + K_5 v_5 + K_6 v_6 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Die Stabkräfte S' , S'' der beiden überzähligen Stäbe ergeben sich hieraus als Funktionen der Lasten K . Im Abschnitt 17 ist gezeigt worden, wie die Gleichungen 44) auch aus dem Satze von Betti abgeleitet werden können.

Um die Senkungen $u_2, u_3, u_4 \dots$ mittels eines Seilpolygons (Abb. 61) zu bestimmen, sind in der umstehenden Tabelle nach Anleitung des Abschnittes 13 die Belastungen $B_2, B_3, B_4 \dots$ dieses Seilpolygons berechnet worden. Die ersten Spalten der Tabelle enthalten die *gegebenen* Größen der Stablängen l , der Stabquerschnitte F und die Werte

$$r = \frac{l}{\epsilon F}.$$

Der Elastizitätsmodul ϵ wurde mit $2 \cdot 10^6 \text{ kg/qcm}$ in Rechnung gestellt. Der Kräfteplan Abb. 63 bestimmt im Maßstabe $1 \text{ cm} = \frac{2}{3}$ die in Spalte 5 verzeichneten Einflußzahlen

$$x' = x_3,$$

d. h. die Stabkräfte, welche entstehen, wenn der Knoten III mit der *Zahl* + 1 belastet wird. Die Längenänderungen der Stäbe

$$\Delta l = x' r \cdot 1 \text{ kg}$$

sind in Spalte 6 angegeben. Ferner sind die in den Spalten 7, 8, 9 wiederholt vorkommenden Werte von h, h_1, h_2 in Abb. 60 ein-

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14					
Stab	l	E	$10^7 r$	$100 z'$	$10^7 \mathcal{A}l$	h	h_1	h_2	Das 10^9 -fache der Lasten					$\frac{\mathcal{A}l}{h}$				
	cm	cm ²	$\frac{\text{cm}}{\text{kg}}$		$10^7 z' r$				cm	cm	cm	cm	des Seilpolygons					
													B_2		B_3	B_4	B_5	B_6
1	200	25	4	— 111	— 44			— 192	+ 23									
2	320	80	2	+ 89	+ 18			+ 240	+ 7									
3	200	25	4	+ 111	+ 44			+ 192	+ 23									
4	320	80	2	— 178	— 36	— 120			+ 30									
5	200	25	4	— 111	— 44		+ 192	— 192	— 23	+ 23								
6	320	80	2	+ 267	+ 53		+ 240	+ 240	+ 22	+ 22								
7	200	25	4	+ 111	+ 44		— 192	+ 192	— 23	+ 23								
8	320	80	2	— 356	— 71	— 120				+ 59								
9	200	25	4	+ 56	+ 22		+ 192	— 192		+ 12	— 12							
10	320	80	2	+ 311	+ 62		+ 240	+ 240		+ 26	+ 26							
11	200	25	4	— 56	— 22		— 192	+ 192		+ 12	— 12							
12	320	80	2	— 267	— 53	— 120					+ 44							
13	200	25	4	+ 56	+ 22		+ 192	— 192			+ 12	— 12						
14	320	80	2	+ 222	+ 44		+ 240	+ 240			+ 18	+ 18						
15	200	25	4	— 56	— 22		— 192	+ 192			+ 12	— 12						
16	320	80	2	— 178	— 36	— 120						+ 30						
17	200	25	4	+ 56	+ 22		+ 192	— 192				+ 12	— 12					
18	320	80	2	+ 133	+ 27		+ 240	+ 240				+ 11	+ 11					
19	200	25	4	— 56	— 22		— 192	+ 192				+ 12	— 12					
20	320	80	2	— 89	— 18	— 120							+ 15					
21	200	25	4	+ 56	+ 22		+ 192						+ 12					
22	320	80	2	+ 44	+ 9		+ 240						+ 4					
23	200	25	4	— 56	— 22		— 192						+ 12					
Summen									+ 59	+ 177	+ 88	+ 59	+ 30					

getragen worden. Aus den Werten von $\mathcal{A}l$, h , h_1 , h_2 ergeben sich die in den Spalten 10—14 verzeichneten, durch die Längenänderungen der einzelnen Stäbe hervorgerufenen Lasten B des Seilpolygons. Die Summierung bestimmt die durch *unbenannte* Zahlen dargestellten Belastungen in 10^{-9} als Einheit:

$$B_2 = + 59, \quad B_3 = + 177, \quad B_4 = + 88, \quad B_5 = + 59, \quad B_6 = + 30.$$

Aus diesen Lasten ist der Kräfteplan, Abb. 62, in dem Maßstabe $1 \text{ cm} = \frac{2}{10^7}$ und das Seilpolygon, Abb. 61, gebildet worden.

Da der Maßstab der Abszissen in Abb. 61 1 : 200 ist, und da für die Horizontalkraft H des Seilpolygons die Größe der unbenannten Zahl

$$H = \frac{320}{10^9}$$

gewählt wurde, so ist der Maßstab der Ordinaten des Seilpolygons, d. h. der Senkungen u , welche durch die Belastung des Knotens III mit 1 kg herbeigeführt werden:

$$1 \text{ cm} = 200 \text{ cm} \frac{320}{10^9} = \frac{64 \text{ cm}}{10^6}.$$

Mit diesem Maßstabe gemessen ist

$$u_2 = \frac{76 \text{ cm}}{10^6}, \quad u_3 = \frac{132 \text{ cm}}{10^6}, \quad u_4 = \frac{132 \text{ cm}}{10^6}, \quad u_5 = \frac{104 \text{ cm}}{10^6},$$

$$u_6 = \frac{57 \text{ cm}}{10^6}.$$

Nach den Gleichungen 44) ist also

$$0 = 132 S' + 104 S'' + 76 K_2 + 132 K_3 + 132 K_4 + 104 K_5 + 57 K_6$$

$$0 = 104 S' + 132 S'' + 57 K_2 + 104 K_3 + 132 K_4 + 132 K_5 + 76 K_6$$

oder

$$S' = -0,62 K_2 - K_3 - 0,56 K_4 + 0,06 K_6$$

$$S'' = +0,06 K_2 - 0,56 K_4 - K_5 - 0,62 K_6.$$

Nachdem für einen gegebenen Belastungsfall die Stabkräfte S' , S'' der beiden überzähligen Stäbe nach den vorstehenden Gleichungen bestimmt worden sind, ergeben sich zunächst die Stabkräfte der beiden Stützstäbe 24, 25 und darauf die Stabkräfte aller übrigen Stäbe in bekannter Weise durch Momentengleichungen.

Wirkung einer Aenderung der Stützenlage. Wir wählen als Beispiel den Fall, in welchem die Länge des Stützstabes (1) um 1 cm sich verkürzt, während alle anderen Stäbe ihre Länge behalten. In die Gleichungen 19) ist dann einzusetzen:

$$\Sigma x' l \delta t = -1 \text{ cm}, \quad \Sigma x'' l \delta t = 0$$

$$\Sigma x'^2 r = \Sigma x''^2 r = \Sigma x_3^2 r = \frac{u_3}{1 \text{ kg}} = \frac{132 \text{ cm}}{10^6 \text{ kg}}$$

$$\Sigma x' x'' r = \Sigma x_3 x_5 r = \frac{u_5}{1 \text{ kg}} = \frac{104 \text{ cm}}{10^6 \text{ kg}},$$

und wenn das Fachwerk unbelastet ist:

$$\Sigma x' \zeta r = \Sigma x'' \zeta r = 0.$$

Die Gleichungen 19) oder 42) fordern also:

$$0 = -1 + \frac{132}{10^6} S' + \frac{104}{10^6} S'',$$

$$0 = \frac{104}{10^6} S' + \frac{132}{10^6} S'',$$

woraus folgt:

$$S' = +20\,000 \text{ kg}, \quad S'' = -15\,700 \text{ kg}.$$

Beispielsweise ist für den Stab 5 nach der Tabelle:

$$\kappa'_5 = -1,11$$

und der Symmetrie wegen:

$$\kappa''_5 = \kappa'_{19} = -0,56.$$

Die oben bezeichnete Aenderung der Stützenlage erzeugt also in dem Stabe 5 eine Stabkraft von der Größe

$$S'_5 = \kappa'_5 S' + \kappa''_5 S'' = -1,11 \cdot 20\,000 + 0,56 \cdot 15\,700 = -13\,400 \text{ kg},$$

und da sein Querschnitt

$$F_5 = 25 \text{ qcm}$$

ist, so beträgt seine Spannung

$$-\frac{13\,400}{25} = -536 \text{ kg/qcm}.$$

20. Das Bogenfachwerk ohne Kämpfergelenke. Das in Abb. 64 im Maßstabe 1 : 200 dargestellte Bogenfachwerk enthält 11 Knoten und 17 durch die Nummern 1 bis 17 bezeichnete Stäbe. Die 4 Knoten *D*, *E*, *J*, *K* werden von festen Auflagern gestützt, die scheinbar am einfachsten durch 8 Stützstäbe ersetzt werden können. Es entstehen jedoch erhebliche Rechnungsvorteile, wenn anstatt der 8 Stützstäbe die in Abb. 64 durch gestrichelte Linien dargestellten und mit den Nummern 18 bis 30 und (1), (2), (3) bezeichneten starren Stützstäbe eingeführt werden. Die 13 Stäbe 18 bis 27 und (1), (2), (3) verbinden die Knoten *D*, *E*, *J*, *K* starr miteinander, während die 3 Stäbe 28, 29 und 30 das Fachwerk in seiner Ebene festlegen. Durch die Einführung der 16 Stützstäbe wird die Anzahl der Knoten von 11 auf 15 erhöht. Die Anzahl der überzähligen Stäbe wird dagegen nicht geändert; sie beträgt:

$$17 + 8 - 2 \cdot 11 = 17 + 16 - 2 \cdot 15 = 3.$$

Als *überzählig* bezeichnen wir die beiden wagerechten Stäbe (1), (3) und den mit der lotrechten Symmetrieachse des Fachwerks zusammenfallenden Stab (2). Man kann, wie sich im folgenden ergibt, den Abstand *a* zwischen den beiden Stäben (1) und (3) so

wählen, daß jede der drei Summen $\Sigma x' x'' r$, $\Sigma x' x''' r$, $\Sigma x'' x''' r$ gleich null wird. Infolgedessen enthalten die drei Gleichungen 19) nur je eine Unbekannte und ergeben ohne weiteres:

$$\left. \begin{aligned} S' &= - \frac{\Sigma x' \mathcal{C} r + \Sigma' x' l \delta t}{\Sigma x'^2 r} \\ S'' &= - \frac{\Sigma x'' \mathcal{C} r + \Sigma'' x'' l \delta t}{\Sigma x''^2 r} \\ S''' &= - \frac{\Sigma x''' \mathcal{C} r + \Sigma''' x''' l \delta t}{\Sigma x'''^2 r} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Es ist zu beachten, daß für die drei überzähligen Stäbe die Größe r gleich null ist; die Summen $\Sigma x^2 r$ erstrecken sich daher ebenso wie die Summen $\Sigma x \mathcal{C} r$ nur auf die Stäbe 1 bis 17.

Abb. 64.

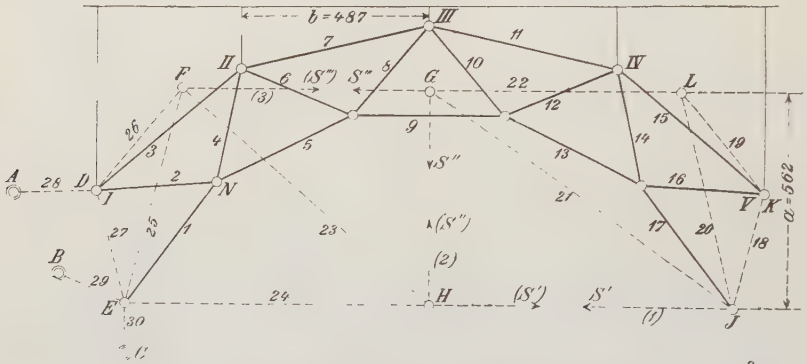


Abb. 65.

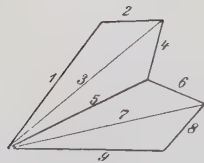
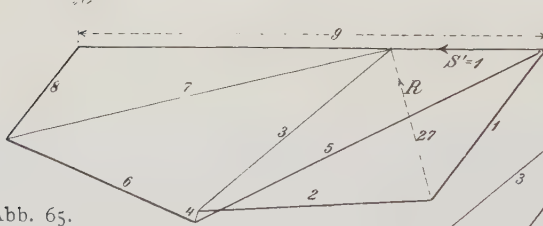


Abb. 67.

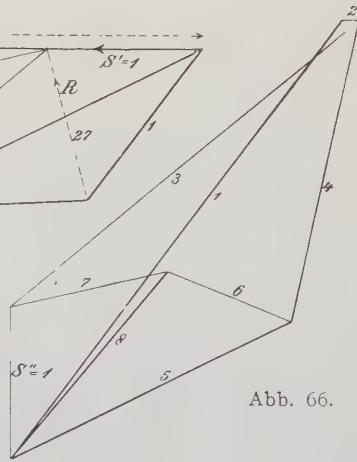


Abb. 66.

Die Berechnung der Summenwerte der Gleichungen 45) zerfällt in folgende Abschnitte.

Die Bestimmung der Einflußzahlen x' . Wenn aus jedem der drei überzähligen Stäbe (1), (2), (3) ein Stück herausgeschnitten wird, so entsteht ein einfaches, durch die Stäbe 28, 29, 30 gestütztes Balkenfachwerk. In den Stäben dieses einfachen Fachwerks entstehen die Stabkräfte x' , wenn das aus dem Stabe (1) herausgeschnittene Stück durch die beiden Stabkräfte

$$S' = (S') = +1$$

ersetzt wird. Durch Zerlegen des Fachwerks mittels eines Schnittes lassen sich die folgenden Gleichgewichtsgruppen bilden, die auf den Fachwerksteil rechts vom Schnitt einwirken:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv S' \mp x'_1 \mp x'_2 \mp x'_3 \\ 0 &\equiv S' \mp x'_3 \mp x'_4 \mp x'_5 \\ 0 &\equiv S' \mp x'_5 \mp x'_6 \mp x'_7 \\ 0 &\equiv S' \mp x'_7 \mp x'_8 \mp x'_9. \end{aligned}$$

Die Abb. 65 enthält die Kräftepolygone dieser Gleichgewichtsgruppen im Maßstabe $1 \text{ cm} = 0,5$; die Kräfte $x'_1, x'_2, x'_3 \dots$ sind mit 1, 2, 3 ... bezeichnet. Für je zwei symmetrisch belegene Stäbe sind die Werte der Einflußzahlen x' nach Größe und Vorzeichen einander gleich; daher ist:

$$x'_{10} = x'_8, \quad x'_{11} = x'_7, \quad x'_{12} = x'_6 \text{ usf.}$$

Die Bestimmung der Einflußzahlen x'' . Die Stabkräfte x'' entstehen im einfachen Fachwerk, wenn das aus dem überzähligen Stabe (2) herausgeschnittene Stück durch die beiden Stabkräfte

$$S'' = (S'') = +1$$

ersetzt wird. Durch Zerlegung des Fachwerks mittels eines Schnittes lassen sich die folgenden, auf den Fachwerksteil rechts vom Schnitt einwirkenden Gleichgewichtsgruppen bilden:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv S'' \mp x''_9 \mp x''_8 \mp x''_7 \\ 0 &\equiv S'' \mp x''_7 \mp x''_6 \mp x''_5 \\ 0 &\equiv S'' \mp x''_5 \mp x''_4 \mp x''_3 \\ 0 &\equiv S'' \mp x''_3 \mp x''_2 \mp x''_1. \end{aligned}$$

Die Abb. 66 enthält die Kräftepolygone dieser Gleichgewichtsgruppen ebenfalls in dem Maßstabe $1 \text{ cm} = 0,5$; die Kräfte $x''_1, x''_2, x''_3 \dots$ sind mit 1, 2, 3 ... bezeichnet. Für je zwei symmetrisch belegene

Stäbe sind die Werte x'' der Größe nach gleich, dem Vorzeichen nach einander entgegengesetzt; daher ist

$$x''_{10} = -x''_8, \quad x''_{11} = -x''_7, \quad x''_{12} = -x''_6 \text{ usf.,}$$

und folglich ist die Summe:

$$\Sigma x' x'' r = 0. \quad (46)$$

Die Bestimmung der Einflußzahlen x''' . Die Stabkräfte x''' entstehen, wenn das aus dem überzähligen Stabe (3) herausgeschnittene Stück durch die beiden Stabkräfte

$$S''' = (S''') = +1$$

ersetzt wird. In den auf den Fachwerksteil rechts vom Schnitt einwirkenden Gleichgewichtsgruppen:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv S''' \mp x'''_9 \mp x'''_8 \mp x'''_7 \\ 0 &\equiv S''' \mp x'''_7 \mp x'''_6 \mp x'''_5 \\ 0 &\equiv S''' \mp x'''_5 \mp x'''_4 \mp x'''_3 \\ 0 &\equiv S''' \mp x'''_3 \mp x'''_2 \mp x'''_1 \end{aligned}$$

läßt sich die Kraft S''' ersetzen durch die Kraft

$$S' = +1$$

und das Kräftepaar $(S''' + S')$, dessen Moment die noch unbekannte negative Größe

$$-a S''' = -a \text{ Zentimeter}$$

hat. Wir bezeichnen mit x_0 die Stabkräfte, welche entstehen, wenn das eben bezeichnete unbekannte Kräftepaar ersetzt wird durch ein Kräftepaar von dem *gegebenen positiven* Moment $+1$ cm. Demnach ist für jeden Stab

$$x''' = x' - \frac{a x_0}{1 \text{ cm}}. \quad (47)$$

Die Stabkräfte x_0 sind im Kräfteplan Abb. 67 im Maßstabe $1 \text{ cm} = 0,002$ dargestellt. Für die Bildung dieses Kräfteplans wurde der Wert von x_0 für den Stab 9 durch Rechnung bestimmt. Da der Abstand des Knotens III vom Stabe 9 gleich 241 cm ist, so folgt aus der Momentengleichung

$$0 = 241 \text{ cm } x_{09} + 1 \text{ cm}$$

$$x_{09} = -\frac{1}{241} = -0,00415.$$

Im übrigen bedarf der Kräfteplan, in dem die Stabkräfte x_0 für die Stäbe 1, 2, 3 . . . wieder mit 1, 2, 3 . . . bezeichnet sind, keiner Erläuterung. Für je zwei symmetrisch belegene Stäbe sind die Werte

von x_0 und folglich auch die Werte von x''' nach Größe und Vorzeichen einander gleich; daher ist die Summe

$$\Sigma x'' x''' r = 0. \quad (48)$$

Die Bestimmung des Abstandes a zwischen den beiden wagenrechten Stäben (1) und (3). Zuzufolge Gleichung 47) ist

$$\Sigma x' x''' r = \Sigma x'^2 r - \frac{a}{1 \text{ cm}} \Sigma x_0 x' r. \quad (49)$$

Damit auch diese Summe gleich null werde, ist

$$\frac{a}{1 \text{ cm}} = \frac{\Sigma x'^2 r}{\Sigma x_0 x' r} \quad (50)$$

zu wählen.

Die *Summenwerte* $\Sigma x \odot r$. Die Belastungen der Fahrbahn werden durch Zwischenträger auf die Knoten I, II, III, IV, V übertragen. Da die Knoten I und V mit festen Stützen zusammenfallen, so erzeugen ihre Lasten keine Stabkräfte. Es sind daher im folgenden nur die Stabkräfte x_2, x_3, x_4 zu ermitteln, die in dem nach Beseitigung der überzähligen Stäbe (1), (2), (3) entstehenden einfachen Fachwerk hervorgerufen werden, wenn nacheinander die Knoten II, III, IV mit einer lotrechten Kraft von der Größe $+1$ belastet werden. Wenn diese Einflußzahlen bekannt sind, so ergibt sich die Stabkraft $\odot$ bei einer Belastung K_2, K_3, K_4 der Knoten II, III, IV aus der Gleichung

$$\odot = x_2 K_2 + x_3 K_3 + x_4 K_4. \quad (51)$$

Durch Einsetzen dieses Wertes nehmen die Gleichungen 45) die Form an:

$$\left. \begin{aligned} S' &= - \frac{K_2 \Sigma x' x_2 r + K_3 \Sigma x' x_3 r + K_4 \Sigma x' x_4 r + \Sigma x' l \delta t}{\Sigma x'^2 r} \\ S'' &= - \frac{K_2 \Sigma x'' x_2 r + K_3 \Sigma x'' x_3 r + K_4 \Sigma x'' x_4 r + \Sigma x'' l \delta t}{\Sigma x''^2 r} \\ S''' &= - \frac{K_2 \Sigma x''' x_2 r + K_3 \Sigma x''' x_3 r + K_4 \Sigma x''' x_4 r + \Sigma x''' l \delta t}{\Sigma x'''^2 r} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Schließlich sind die Gleichungen 51) und 52) mit den Gleichungen 18):

$$S = \odot + x' S' + x'' S'' + x''' S''' \quad (53)$$

zu verbinden, um jede Stabkraft S als Funktion der Lasten K und der Temperaturänderungen t darzustellen.

Die *Einflußzahlen* x_2, x_3, x_4 können durch Kräftepläne bestimmt werden (vergl. Abschnitt 8). Anstatt dessen können diese Zahlen

auch aus den bereits bekannten Einflußzahlen x_0 und x'' durch Rechnung ermittelt werden, wie im folgenden beschrieben werden soll.

Die Einflußzahlen x_2 . Wenn das einfache, von den Stäben 28, 29, 30 gestützte Fachwerk nur in dem Knoten II mit der lotrechten Last K_2 gleich eins belastet ist, so entstehen die Stabkräfte x_2 . Für die 13 Stäbe 5 bis 17 hat x_2 die Größe null, weil der rechts vom Knoten II liegende Fachwerksteil weder Lasten, noch Stützkräfte aufnimmt. Bei der Bestimmung der Stabkräfte x_2 in den 4 Stäben 1 bis 4 kann die Last K_2 ersetzt werden durch die Kraft S'' gleich eins in Verbindung mit einem Kräftepaar von dem negativen Moment

$$-b = -487 \text{ cm},$$

weil der Abstand zwischen den beiden lotrechten Kräften K_2 und S''

$$b = 487 \text{ cm}$$

beträgt. Die Last S'' gleich eins erzeugt Stabkräfte von der Größe x'' , während das Kräftepaar Stabkräfte von der Größe

$$-\frac{b}{1 \text{ cm}} x_0 = -487 x_0$$

hervorrufen. Demnach ist für jeden der 4 Stäbe 1 bis 4:

$$x_2 = x'' - \frac{b}{1 \text{ cm}} x_0 = x'' - 487 x_0. \quad (54)$$

Die in den Gleichungen 52) vorkommenden Summen welche den Faktor x_2 enthalten, haben folglich die Größen:

$$\left. \begin{aligned} \sum x' x_2 r &= \sum_1^4 x' x'' r - 487 \sum_1^4 x' x_0 r \\ \sum x'' x_2 r &= \sum_1^4 x''^2 r - 487 \sum_1^4 x'' x_0 r \\ \sum x''' x_2 r &= \sum_1^4 x''' x'' r - 487 \sum_1^4 x''' x_0 r \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Das Zeichen $\sum_1^4$ deutet an, daß sich die Summierung nur auf die Stäbe 1 bis 4 erstreckt.

Die Einflußzahlen x_3 . Wenn das Fachwerk nur die Last K_3 gleich eins im Knoten III und die Stützkkräfte der Stäbe 28, 29 und 30 aufnimmt, so entstehen in den 9 Stäben 9 bis 17 keine Stabkräfte; für diese 9 Stäbe ist also x_3 gleich null. Dagegen haben die Stabkräfte in den 8 Stäben 1 bis 8 die Größen

$$x_3 = x'', \quad (56)$$

weil die Last K_3 gleich eins mit der ebenso großen Kraft S'' zusammenfällt. Die Summen in den Gleichungen 52), welche die Werte κ_3 enthalten, haben demnach die Größen:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \kappa'_3 r &= \Sigma_1^8 \kappa' \kappa'' r \\ \Sigma \kappa''_3 r &= \Sigma_1^8 \kappa''^2 r \\ \Sigma \kappa'''_3 r &= \Sigma_1^8 \kappa'' \kappa''' r. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Die Einflußzahlen κ_4 . Bei einer Belastung des Knotens IV mit der Last K_4 gleich eins entstehen in den 4 Stäben 14 bis 17 keine Stabkräfte; daher ist für diese Stäbe κ_4 gleich null. Bei der Bestimmung der Stabkräfte κ_4 für die übrigen 13 Stäbe 1 bis 13 kann die Last K_4 ersetzt werden durch eine ebenso große Last S'' in Verbindung mit einem Kräftepaar von dem positiven Moment

$$+b = +487 \text{ cm.}$$

Für die Stäbe 1 bis 13 ist also

$$\kappa_4 = \kappa'' + \frac{b}{1 \text{ cm}} \kappa_0 = \kappa'' + 487 \kappa_0, \quad (58)$$

und in die Gleichungen 52) ist demnach einzusetzen:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \kappa'_4 r &= \Sigma_1^{13} \kappa' \kappa'' r + 487 \Sigma_1^{13} \kappa' \kappa_0 r \\ \Sigma \kappa''_4 r &= \Sigma_1^{13} \kappa''^2 r + 487 \Sigma_1^{13} \kappa'' \kappa_0 r \\ \Sigma \kappa'''_4 r &= \Sigma_1^{13} \kappa'' \kappa''' r + 487 \Sigma_1^{13} \kappa''' \kappa_0 r. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Bei der Bildung dieser Summen ist zu beachten, daß für je zwei symmetrisch belegene Stäbe die Einflußzahlen κ_0 , κ' , κ'' nach Größe und Vorzeichen übereinstimmen, daß dagegen die gleich großen Zahlen κ'' verschiedene Vorzeichen haben. Daher ist

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_1^{13} \kappa' \kappa'' r &= \Sigma_1^4 \kappa' \kappa'' r \\ \Sigma_1^{13} \kappa' \kappa_0 r &= \Sigma_1^{17} \kappa_1 \kappa_0 r - \Sigma_1^4 \kappa_1 \kappa_0 r \\ \Sigma_1^{13} \kappa''^2 r &= \Sigma_1^{17} \kappa''^2 r - \Sigma_1^4 \kappa''^2 r \\ \Sigma_1^{13} \kappa'' \kappa_0 r &= \Sigma_1^4 \kappa'' \kappa_0 r \\ \Sigma_1^{13} \kappa'' \kappa''' r &= \Sigma_1^4 \kappa'' \kappa''' r \\ \Sigma_1^{13} \kappa''' \kappa_0 r &= \Sigma_1^{17} \kappa''' \kappa_0 r - \Sigma_1^4 \kappa''' \kappa_0 r. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Zahlenrechnung für das vorliegende Beispiel. Die folgende Tabelle 1 enthält die gegebenen Stablängen l , die Stabquerschnitte F und die hieraus berechneten Größen

$$r = \frac{l}{\varepsilon F},$$

wobei, wie in den früheren Beispielen,

$$\varepsilon = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/qcm}$$

eingesetzt wurde; ferner enthält die Tabelle die aus den Abb. 65, 66, 67 entnommenen Werte von $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa_0$ und die nach Gleichung 47) berechneten Werte von $\varkappa'''$.

Tabelle 1.

Stab	l cm	F cm ²	r	$\varkappa_0$ 10 ⁻⁵	$\varkappa'$ 10 ⁻³	$\varkappa''$ 10 ⁻³	$\varkappa'''$ 10 ⁻³
			10 ⁻⁹ cm				
			kg				
1	400	50	4000	-415	-1264	-3612	+1066
2	313	20	7825	-158	-1554	-108	-667
3	500	50	5000	+531	+1700	+2962	-1281
4	313	20	7825	-158	+72	-2057	+959
5	400	50	4000	-415	-2596	-2023	-266
6	313	20	7825	-158	-1370	+850	-483
7	500	50	5000	+531	+2650	+1062	-331
8	313	20	7825	-158	-804	-1615	+83
9	200	50	2000	-415	-3072	0	-742

Zu bemerken ist, daß für den Stab 9 nur die halbe Länge 200 cm angesetzt wurde, weil die zu berechnenden Summen auf die *Fachwerkshälfte* sich beziehen. In der folgenden zweiten Tabelle sind die in den Formeln vorkommenden Summenwerte berechnet worden. Für die Berechnung der Zahlen $\varkappa'''$ in der Tabelle 1 nach Gleichung 47) ergab sich der Abstand a nach Gleichung 50) aus den Werten der umstehenden Tabelle 2:

$$a = 1 \text{ cm} \frac{\sum \varkappa'^2 r}{\sum \varkappa_0 \varkappa' r} = \frac{2810 \cdot 10^{-7}}{500 \cdot 10^{-9}} = 562 \text{ cm.}$$

Die Summenwerte für die Stäbe 1 bis 13 in der letzten Reihe der Tabelle 2 ergeben sich aus den Gleichungen 60)

Einflußzahlen der Last K_2 des Knotens II. Wird nur der Knoten II mit

$$K_2 = 1 \text{ kg}$$

belastet, und läßt man die Temperaturen unverändert, so ist nach den Gleichungen 52) und 55):

$$\begin{aligned}
 S' &= -\frac{\sum \varkappa' \varkappa_2 r}{\sum \varkappa'^2 r} = -\frac{\sum_1^4 \varkappa' \varkappa'' r - b \sum_1^4 \varkappa' \varkappa_0 r}{\sum \varkappa'^2 r} = -\frac{43600 - 487 \cdot 84}{281000} = -0,010 \text{ kg} \\
 S'' &= -\frac{\sum \varkappa'' \varkappa_2 r}{\sum \varkappa''^2 r} = -\frac{\sum_1^4 \varkappa''^2 r - b \sum_1^4 \varkappa'' \varkappa_0 r}{\sum \varkappa''^2 r} = -\frac{129300 - 487 \cdot 166}{354800} = -0,137 \text{ kg} \\
 S''' &= -\frac{\sum \varkappa''' \varkappa_2 r}{\sum \varkappa'''^2 r} = -\frac{\sum_1^4 \varkappa''' \varkappa''' r - b \sum_1^4 \varkappa''' \varkappa_0 r}{\sum \varkappa'''^2 r} = -\frac{-49200 + 487 \cdot 55}{54500} = +0,411 \text{ kg.}
 \end{aligned}$$

Tabelle 2.

	Stab	$x_0 x' r$ $10^{-9} \frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	$x_0 x'' r$ $10^{-9} \frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	$x_0 x''' r$ $10^{-9} \frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	$x'^2 r$ $10^{-7} \frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	$x''^2 r$ $10^{-7} \frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	$x'''^2 r$ $10^{-7} \frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	$x' x'' r$ $10^{-7} \frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	$x' x''' r$ $10^{-7} \frac{\text{cm}}{\text{kg}}$
	1	+ 21	+ 60	- 18	64	522	45	+ 183	- 154
	2	+ 19	+ 1	+ 8	189	1	35	+ 3	+ 6
	3	+ 45	+ 79	- 34	145	439	82	+ 252	- 190
	4	- 1	+ 26	- 12	0	331	72	- 12	- 154
Summen für . .	1-4	+ 84	+ 166	- 55		1293		+ 436	- 492
	5	+ 43	+ 34	+ 5	270	164	3	+ 210	+ 22
	6	+ 17	- 11	+ 6	147	57	18	- 91	- 32
	7	+ 70	+ 28	- 9	351	56	6	+ 141	- 18
	8	+ 10	+ 20	- 1	51	204	1	+ 101	- 11
Summen für . .	1-8	+ 224	+ 237	- 54		1774		+ 797	- 531
	9	+ 26	0	+ 6	189	0	11	0	0
Summen für . .	1-9	+ 250	+ 237	- 48	1405	1774	272	+ 797	- 531
Summen für . .	1-17	+ 500	0	- 96	2810	3548	545	0	0
Summen für . .	1-13	+ 416	+ 166	- 41		2255		+ 436	- 492

Die Stabkräfte S im zusammengesetzten Fachwerk erhalten bei dieser Belastung die Größen (Gleichung 53):

$$S = x_2 - 0,010 x' - 0,137 x'' + 0,411 x'''.$$

Da für die Stäbe 1 bis 4 nach Gleichung 54)

$$x_2 = x'' - 487 x_0$$

und für die Stäbe 5 bis 17

$$x_2 = 0$$

ist, so gilt für die Stäbe 1 bis 4:

$$S = -487 x_0 - 0,010 x' + 0,863 x'' + 0,411 x''' \quad (61)$$

und für die Stäbe 5 bis 17:

$$S = -0,010 x' - 0,137 x'' + 0,411 x'''. \quad (62)$$

Diese beiden Gleichungen ergeben durch Einsetzen der Werte von x_0 , x' , x'' , x''' die in der ersten Reihe der Tabelle 3 verzeichneten Stabkräfte; z. B. für den Stab 2:

$$S_2 = + \frac{487 \cdot 158}{100\,000} + \frac{0,01 \cdot 1554 - 0,863 \cdot 108 - 0,411 \cdot 667}{1000}$$

$$S_2 = + 0,42 \text{ kg.}$$

Einflußzahlen der Last K_3 des Knotens III. Eine Belastung
 $K_3 = 1 \text{ kg}$

des Knotens III erzeugt nach den Gleichungen 52) und 57) in den überzähligen Stäben (1), (2), (3) die Kräfte:

$$\begin{aligned} S' &= -\frac{\Sigma x' x_3 r}{\Sigma x'^2 r} = -\frac{\Sigma_1^8 x' x'' r}{\Sigma x'^2 r} = -\frac{797}{2810} = -0,284 \text{ kg} \\ S'' &= -\frac{\Sigma x'' x_3 r}{\Sigma x''^2 r} = -\frac{\Sigma_1^8 x''^2 r}{\Sigma x''^2 r} = -\frac{1774}{3548} = -0,500 \text{ kg} \\ S''' &= -\frac{\Sigma x''' x_3 r}{\Sigma x'''^2 r} = -\frac{\Sigma_1^8 x'''^2 r}{\Sigma x'''^2 r} = +\frac{531}{545} = +0,976 \text{ kg} \end{aligned}$$

und in den übrigen Stäben 1 bis 17 nach Gleichung 53):

$$S = x_3 - 0,284 x' - 0,500 x'' + 0,976 x'''.$$

Da für die Stäbe 1 bis 8 nach Gleichung 56):

$$x_3 = x''$$

und für die Stäbe 9 bis 17:

$$x_3 = 0$$

ist, so gilt für die Stäbe 1 bis 8:

$$S = -0,284 x' + 0,500 x'' + 0,976 x''' \quad (63)$$

und für die Stäbe 9 bis 17:

$$S = -0,284 x' - 0,500 x'' + 0,976 x''' \quad (64)$$

Die Reihe 2 der Tabelle 3 enthält die hiernach berechneten Werte von S .

Einflußzahlen der Last K_4 des Knotens IV. Die Last
 $K_4 = 1 \text{ kg}$

erzeugt nach den Gleichungen 52) und 59) in den überzähligen Stäben die Kräfte:

$$\begin{aligned} S' &= -\frac{\Sigma x' x_4 r}{\Sigma x'^2 r} = -\frac{\Sigma_1^{13} x' x'' r + b \Sigma_1^{13} x' x_0 r}{\Sigma x'^2 r} = -\frac{43600 + 487 \cdot 416}{281000} = -0,876 \text{ kg} \\ S'' &= -\frac{\Sigma x'' x_4 r}{\Sigma x''^2 r} = -\frac{\Sigma_1^{13} x''^2 r + b \Sigma_1^{13} x'' x_0 r}{\Sigma x''^2 r} = -\frac{225500 + 487 \cdot 166}{354800} = -0,863 \text{ kg} \\ S''' &= -\frac{\Sigma x''' x_4 r}{\Sigma x'''^2 r} = -\frac{\Sigma_1^{13} x'''^2 r + b \Sigma_1^{13} x''' x_0 r}{\Sigma x'''^2 r} = -\frac{49200 - 487 \cdot 41}{54500} = +1,277 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Die Stabkräfte S der übrigen Stäbe 1 bis 17 erhalten nach Gleichung 53) die Größen

$$S = x_4 - 0,876 x' - 0,863 x'' + 1,277 x'''.$$

Da für die Stäbe 1 bis 13 nach Gleichung 58)

$$x_4 = x'' + 487 x_0$$

und für die übrigen Stäbe 14 bis 17

$$x_4 = 0$$

ist, so gilt für die Stäbe 1 bis 13:

$$S = 487 \kappa_0 - 0,876 \kappa' + 0,137 \kappa'' + 1,277 \kappa''' \quad (65)$$

und für die Stäbe 14 bis 17:

$$S = -0,876 \kappa' - 0,863 \kappa'' + 1,277 \kappa''' \quad (66)$$

Nach Gleichung 65) sind die in der dritten Reihe der Tabelle 3 verzeichneten Werte von S berechnet worden.

Tabelle 3.

Einflußzahlen der Lasten für die Stabkräfte des zusammengesetzten Fachwerks.

	Stab	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$K_2 = 1, S =$	-0,65	+0,42	-0,57	-0,61	+0,19	-0,30	-0,31	+0,27	-0,28
2	$K_3 = 1, S =$	-0,41	-0,26	-0,25	-0,11	-0,54	+0,34	-0,54	-0,50	+0,15
3	$K_4 = 1, S =$	-0,05	-0,27	-0,13	+0,11	-0,36	-0,07	-0,01	-0,18	-0,28

Die Wirkungen von Temperaturänderungen. Wir wählen als Beispiel den Fall, in dem alle Fachwerkstäbe 1 bis 17 ihre Temperatur vom spannungslosen Zustande aus um

$$t = +40^\circ \text{ Celsius}$$

erhöhen, während die Stützenlage, also die Temperatur der Stützstäbe, unverändert bleibt; δt hat die Größe 0,0005. Die überzähligen Stäbe (1), (2), (3) des *unbelasteten* Fachwerks haben nach den Gleichungen 45) in diesem Falle die Stabkräfte

$$\left. \begin{aligned} S' &= - \frac{\delta t \Sigma \kappa' l}{\Sigma \kappa'^2 r} \\ S'' &= - \frac{\delta t \Sigma \kappa'' l}{\Sigma \kappa''^2 r} \\ S''' &= - \frac{\delta t \Sigma \kappa''' l}{\Sigma \kappa'''^2 r} \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Die Summenwerte in diesen Gleichungen erstrecken sich nur auf die 17 Stäbe des einfachen Fachwerks, weil die Stützstäbe ihre Länge nicht ändern. Man erhält aus Tabelle 1:

$$\Sigma \kappa' l = \frac{2}{1000} \{ 400 (-1264 - 2596 - 1536) + 313 (-1554 + 72 - 1370 - 804) + 500 (1700 + 2650) \}$$

$$\Sigma \kappa'' l = 0 \quad \Sigma \kappa' l = -2255 \text{ cm}$$

$$\Sigma \kappa''' l = \frac{2}{1000} \{ 400 (1066 - 266 - 371) + 313 (-667 + 959 - 483 + 83) + 500 (-1281 - 331) \}$$

$$\Sigma \kappa''' l = -1336 \text{ cm.}$$

Demnach ist

$$S' = + \frac{0,0005 \cdot 2255}{2810} 10^7 = + 4012 \text{ kg}$$

$$S'' = 0$$

$$S''' = + \frac{0,0005 \cdot 1336}{545} 10^7 = + 12260 \text{ kg.}$$

In den 17 Stäben des einfachen Fachwerks werden hierdurch Stabkräfte von der Größe

$$S = (4012 x' + 12260 x''') \text{ kg}$$

erzeugt; z. B. ist für den Stab 9

$$x' = - 3,072, \quad x''' = - 0,742$$

$$S_9 = - 4012 \cdot 3,072 - 12260 \cdot 0,742 = - 21400 \text{ kg}$$

Die Wirkungen einer Aenderung der Stützenlage. Als Beispiel wählen wir eine Aenderung, durch die der überzählige Stab (1) um 1 cm länger, der Stab (3) dagegen um 0,5 cm kürzer wird, während alle übrigen Stützstäbe ihre Länge nicht verändern. Man kann sich vorstellen, daß die beiden angegebenen Längenänderungen durch Temperaturänderungen herbeigeführt worden sind. Dann ist

$$\Sigma x' l \delta t = + 1 \text{ cm}$$

$$\Sigma x'' l \delta t = 0$$

$$\Sigma x''' l \delta t = - 0,5 \text{ cm.}$$

Im unbelasteten Fachwerk entstehen nach den Gleichungen 52) die Stabkräfte

$$\left. \begin{aligned} S' &= - \frac{\Sigma x' l \delta t}{\Sigma x'^2 r} = - \frac{1 \cdot 10^7}{2810} = - 3560 \text{ kg} \\ S'' &= 0 \\ S''' &= - \frac{\Sigma x''' l \delta t}{\Sigma x'''^2 r} = + \frac{0,5 \cdot 10^7}{545} = + 9170 \text{ kg.} \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Infolgedessen erhalten die 17 Stäbe des einfachen Fachwerks Stabkräfte von der Größe:

$$S = x' S' + x''' S''' = (- 3560 x' + 9170 x''') \text{ kg.}$$

Beispielsweise ist für den Stab 3:

$$x' = + 1,700, \quad x''' = - 1,281,$$

folglich:

$$S = - 1,7 \cdot 3560 - 1,281 \cdot 9170 = - 17800 \text{ kg.}$$

Da der Querschnitt des Stabes 50 qcm groß ist, so beträgt seine Druckspannung

$$\frac{17800}{50} = 356 \text{ kg/qcm.}$$

21. Die Nebenspannungen im ebenen Fachwerk. Die Voraussetzung, daß die Fachwerksknoten von reibungslosen Gelenken gebildet werden, ist niemals vollkommen erfüllt. In der Regel werden die Knoten durch starre Nietverbindungen hergestellt, und selbst wenn sie die Form von Gelenken erhalten, genügt gewöhnlich die Reibung, um die Drehung der Stäbe gegeneinander zu verhindern. Bei den elastischen Formänderungen des Fachwerks werden daher die Stäbe *gebogen*, und die hierdurch hervorgerufenen Biegungsspannungen werden *Nebenspannungen* genannt, im Gegensatz zu den *Hauptspannungen*, die von den Stabkräften erzeugt würden, wenn sie genau mit den Stabachsen zusammenfielen. Die resultierenden Spannungen setzen sich also zusammen aus den Hauptspannungen und den Nebenspannungen. Wir nehmen an, daß die Schwerpunktsachsen der zu einem Knoten gehörenden Stäbe in *einem* Punkte, dem Knotenpunkte, sich schneiden, und vernachlässigen bei den folgenden Betrachtungen das *Eigengewicht* der Stäbe.

Die Unbekannten der Aufgabe. Wenn ein Stab I II (Abb. 68) in den Knoten I, II mit den anderen Stäben *starr* verbunden ist, so fällt die Gerade der beiden gleich großen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte S_{12} , S_{21} , die von den Knoten I und II auf den Stab übertragen werden, mit der Stabachse nicht genau



Abb. 68.

zusammen. Diese Abweichung ist in der Regel so gering, daß ihr Einfluß auf die *Größen* der Stabkräfte und also auf die Größen der Hauptspannungen vernachlässigt werden darf. Diese Größen dürfen daher unter der Voraussetzung von reibungslosen Gelenken bestimmt werden und gelten hier als gegebene, bekannte Größen.

Die Lage der Kraftachse gegen die Stabsehne wird durch *zwei* unbekannte Größen bestimmt, z. B. durch das Moment M_{12} der Kraft S_{12} in bezug auf den Knotenpunkt I und das Moment M_{21} der Kraft S_{21} in bezug auf den Knotenpunkt II. Diese Momente tragen das positive Vorzeichen, wenn sie im Sinne der Uhrzeigerbewegung drehen. Die Anzahl der unbekannten Momente ist demnach doppelt so groß wie die Anzahl der Fachwerkstäbe. Ist z. B. ein einfaches Balkenfachwerk von k Knoten zu berechnen, so beträgt die Anzahl der Unbekannten

$$2(2k - 3) = 4k - 6.$$

Diese Anzahl wird auf $(3k - 3)$ ermäßigt, also um $(k - 3)$ vermindert, wenn als Unbekannte die Winkel eingeführt werden, um die bei der Formänderung des Fachwerks die k Knotenverbindungen und die $(2k - 3)$ Stabsehnern sich drehen; denn von diesen Drehwinkeln sind die Biegemomente M in einfacher Weise abhängig.

Die in einem Knoten miteinander starr verbundenen Stabenden drehen sich bei einer Formänderung des Fachwerks um einen und denselben Winkel, welchen wir den *Knotendrehwinkel* nennen und für die Knoten I, II, III . . . mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$ bezeichnen. Die Winkel ferner, um welche die Stabsehnern I II, I III, II III . . . sich drehen, sollen *Stabdrehwinkel* genannt und mit $\psi_{12}, \psi_{13}, \psi_{23} \dots$ bezeichnet werden. Den Winkeln φ und ψ wird das *positive* Vorzeichen beigelegt, wenn die Drehung im Sinne der Uhrzeigerbewegung erfolgt. Der Vorteil, der mit der Einführung der Winkel φ und ψ verbunden ist, ergibt sich aus dem Umstande, daß die $(2k - 3)$ Größen ψ auf graphischem Wege durch einen Geschwindigkeitsplan bestimmt werden können. Nur die k Größen φ sind miteinander verbunden durch eine Gruppe von k Gleichungen ersten Grades, aus welchen ihre Werte entwickelt werden müssen.

Die Bestimmung der Stabdrehwinkel ψ durch den Geschwindigkeitsplan der Formänderung des Fachwerks. Im Abschnitt II ist die Bildung des Geschwindigkeits- oder Verschiebungsplans eines elastischen Fachwerks aus den gegebenen Längenänderungen der Stäbe beschrieben worden; es wird daher genügen, hier die Bestimmung der Stabdrehwinkel ψ an einem Beispiel zu erläutern. In Abb. 69 sind die Maße des betrachteten Fachwerks in Zentimetern

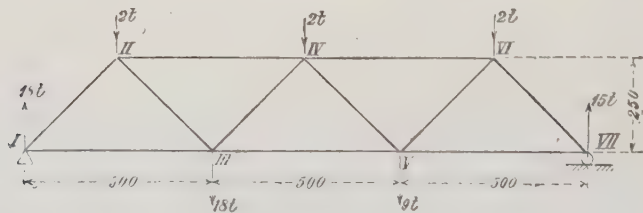


Abb. 69.

und die äußeren Kräfte in Tonnen angegeben. Die umstehende Tabelle enthält ferner die Stablängen l , die Stabquerschnitte F , die Stabkräfte S und die hieraus berechneten Längenänderungen

$$\Delta l = \frac{lS}{\epsilon F}$$

Der Elastizitätsmodul ε des Stabmaterials ist gleich $2000 \text{ t} \cdot \text{cm}^{-2}$.
Der Maßstab des Verschiebungsplans, Abb. 70, ist 10:1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Stab	l	F	S	$10 \cdot \Delta l$	100 000 ψ'	100 000 ψ''	10 000 ψ	$\frac{N}{1000}$
	cm	cm ²	t	cm				cm · t
I II	350	50	− 26	− 0,9	+ 160	− 17	+ 14	9
I III	500	50	+ 18	+ 0,9	+ 168	− 17	+ 15	6
II III	350	40	+ 23	+ 1,0	+ 126	− 17	+ 11	7
II IV	500	60	− 34	− 1,4	+ 88	− 17	+ 7	8
III IV	350	30	+ 3	+ 0,2	+ 34	− 17	+ 2	5
III V	500	70	+ 32	+ 1,2	0	− 17	− 2	9
IV V	350	30	− 6	− 0,3	− 17	− 17	− 3	5
IV VI	500	60	− 28	− 1,2	− 62	− 17	− 8	8
V VI	350	40	+ 18	+ 0,8	− 77	− 17	− 9	7
V VII	500	50	+ 15	+ 0,8	− 118	− 17	− 13	6
VI VII	350	50	− 21	− 0,8	− 114	− 17	− 13	9

Die Bewegung der Formänderung, als deren Zeitdauer wir die Zeiteinheit annehmen, läßt sich in *drei* gleichzeitige Bewegungen *A*, *B*, *C* zerlegen. Bei der Bewegung *A* wird ein Knotenpunkt, z. B. der Knoten III, und die Richtung eines von ihm ausgehenden Stabes III V festgehalten, während alle Stäbe ihre gegebenen Längenänderungen ausführen. Die Wahl jenes Stabes ist zwar willkürlich; es empfiehlt sich aber, einen Stab in der Nähe der Mitte des Fachwerks zu wählen, damit die Größe des Geschwindigkeitsplans und die Anzahl der sich summierenden Zeichenfehler tunlichst eingeschränkt werden.

Im Geschwindigkeitsplan der Bewegung *A* entsprechen den Knoten I, II, III... die Ziffern 1, 2, 3... (Abb. 70). Von dem willkürlich gewählten Punkte 3 ist also die Strecke 35 in der Richtung und dem Sinne der Stabstrecke III V:

$$35 = 10 \Delta l_{35} = + 1,2 \text{ cm}$$

aufzutragen. Man bestimmt darauf den Punkt 4 durch die Dehnungen der Stabstrecken III IV und V IV:

$$3a = 10 \Delta l_{34} = + 0,2 \text{ cm}$$

$$5b = 10 \Delta l_{45} = - 0,3 \text{ cm.}$$

Die Strecke 3a hat wegen des positiven Vorzeichens den Sinn III IV, während die Strecke 5b wegen des negativen Vorzeichens den

Sinn IV V erhält. Der Punkt 4 bestimmt die Drehgeschwindigkeiten ψ'_{34} , ψ'_{45} der Stabsehn III IV und V IV in der Bewegung A:

Abb. 70.

$$\psi'_{34} = \frac{a_4}{l_{34}} = + \frac{0,12}{350} = + 0,00034$$

und

$$\psi'_{45} = \frac{b_4}{l_{45}} = - \frac{0,06}{350} = - 0,00017.$$

Die Drehgeschwindigkeit ψ'_{34} ist *positiv*, weil die relative Drehgeschwindigkeit a_4 des Knotens IV gegen den Knoten III von III aus gesehen nach rechts zeigt. Die relative Drehgeschwindigkeit b_4 des Knotens IV gegen den Knoten V zeigt von V aus gesehen nach links, und daher ist ψ'_{45} negativ.

In gleicher Weise ergibt sich im Geschwindigkeitsplan der Punkt

2 durch die Dehnungen der beiden Stabstrecken III II und IV II

1	"	"	"	"	"	"	III I	"	II I
6	"	"	"	"	"	"	IV VI	"	V VI
7	"	"	"	"	"	"	V VII	"	VI VII.

Die in den Geschwindigkeitsplan eingeschriebenen relativen Drehgeschwindigkeiten bestimmen die Winkel:

$$\psi'_{12} = \frac{f_1}{l_{12}} = + \frac{0,56}{350} = + 0,00160$$

$$\psi'_{13} = \frac{e_1}{l_{13}} = + \frac{0,84}{500} = + 0,00168$$

$$\psi'_{23} = \frac{c_2}{l_{23}} = + \frac{0,44}{350} = + 0,00126$$

$$\psi'_{24} = \frac{d_2}{l_{24}} = + \frac{0,44}{500} = + 0,00088$$

$$\psi'_{34} = \frac{a \ 4}{l_{34}} = + \frac{0,12}{350} = + 0,00034$$

$$\psi'_{35} = 0$$

$$\psi'_{45} = \frac{b \ 4}{l_{45}} = - \frac{0,06}{350} = - 0,00017$$

$$\psi'_{46} = \frac{g \ 6}{l_{46}} = - \frac{0,31}{500} = - 0,00062$$

$$\psi'_{56} = \frac{h \ 6}{l_{56}} = - \frac{0,27}{350} = - 0,00077$$

$$\psi'_{57} = \frac{i \ 7}{l_{57}} = - \frac{0,59}{500} = - 0,00118$$

$$\psi'_{67} = \frac{k \ 7}{l_{67}} = - \frac{0,40}{350} = - 0,00114.$$

Bei der Bewegung *A* hat der Knoten III die Geschwindigkeit null, während die Geschwindigkeiten der übrigen Knoten I, II, IV . . . durch die Strecken 3 1, 3 2, 3 4 . . . dargestellt werden.

Die *zweite* Bewegung *B* besteht aus einer *Parallelverschiebung* mit der allen Knoten gemeinschaftlichen Geschwindigkeit 1 3. Durch Zusammensetzung der beiden Bewegungen *A* und *B* erhalten die Knoten I, II, III, IV . . . die Geschwindigkeiten null, 1 2, 1 3, 1 4 . . . Die *Drehgeschwindigkeiten* der Stäbe ändern sich hierbei nicht, bleiben also wie in der Bewegung *A*.

Die *dritte* Bewegung *C*, deren Geschwindigkeiten durch die Strecken 2' 1, 3' 1, 4' 1 . . . 7' 1 dargestellt werden, besteht in einer *Drehung des starren Fachwerks um den Knoten I*. Daher sind diese Geschwindigkeitsstrecken zu den entsprechenden Strecken II I, II I, IV I . . . des Fachwerks rechtwinklig gerichtet, und es ist

$$1 \ 2' \ 3' \ 4' \ 5' \ 6' \ 7' \approx I \ II \ III \ IV \ V \ VI \ VII$$

(vergl. Abhandlung IV, 2).

Die Drehgeschwindigkeit der Bewegung *C*:

$$\psi''' = \frac{7' \ 1}{VII \ I} = - \frac{0,25}{1500} = - 0,00017$$

ist so groß zu wählen, daß die aus allen drei Bewegungen für den Knoten VII resultierende Geschwindigkeit 7' 7 die Richtung der Auflagerbahn dieses Knotens erhält. Die resultierenden Geschwindig-

Die Beziehung zwischen den Biegemomenten M , den Stabdrehwinkeln ψ und den Knotendrehwinkeln φ . In Abb. 72 bezeichnet die Kurve III die elastische Linie des Stabes nach der Formänderung, während die beiden parallelen Geraden IA und IIB die Richtung des Stabes III vor der Formänderung angeben. Die eingeschriebenen Bezeichnungen lassen unmittelbar erkennen, daß der Drehwinkel im Sinne der Uhrzeigerbewegung von der Stabsehne III nach der Tangente der elastischen Linie im Knoten I die Größe $(\varphi_1 - \psi_{12})$ und im Knoten II die Größe $(\varphi_2 - \psi_{12})$ hat. Wir erinnern an das Ergebnis der Abhandlung X, daß die elastische Linie eines Stabes, dessen Querschnitt in bezug auf die zur Biegungsebene senkrecht gerichtete Hauptschwerpunktsachse das Trägheitsmoment J hat, als Seilkurve angesehen werden kann, wenn die zur Stabsehne parallel gerichtete Seilkraft gleich εJ und die zur Stabsehne senkrecht gerichtete Längeneinheitsbelastung des Seils dem Biegemoment des Stabes gleichgesetzt wird. Bei Bestimmung der Biegemomente darf in der

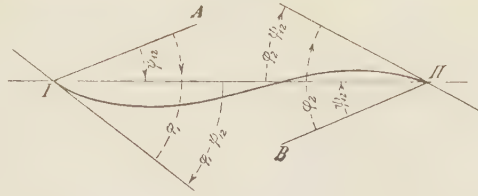


Abb. 72.

Regel (Abb. 73) die sehr kleine Ordinate z der elastischen Linie in bezug auf die Stabsehne im Vergleich mit der Ordinate y der Kraftachse vernachlässigt werden. Die Belastungsfläche des Seils hat demnach die Form eines Trapezes $ABCD$ (Abb. 74), welches in die beiden Dreiecksflächen:

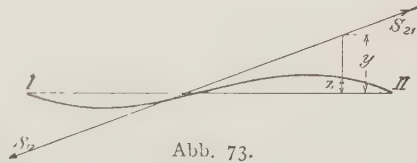


Abb. 73.

$$P = ABD = \frac{1}{2} l_{12} M_{12}$$

und

$$Q = DBC = \frac{1}{2} l_{12} M_{21}$$

zerlegt werden kann. Die Resultanten P , Q der von diesen Dreiecken dargestellten Seillasten gehen durch die Schwerpunkte S_1 , S_2 der Dreiecke und zerlegen also die Stablänge AB in drei gleiche Teile. Damit in den folgenden Momentengleichungen ohne weiteres

so ergeben sich aus den vorstehenden Gleichungen die einfachen Beziehungen:

$$\begin{aligned} M_{12} &= N_{12} (2 \varphi_1 + \varphi_2 - 3 \psi_{12}) \\ M_{21} &= N_{12} (\varphi_1 + 2 \varphi_2 - 3 \psi_{12}). \end{aligned} \quad (72)$$

Die *gegebenen* Werte der Momente N sind in der Tabelle für alle Stäbe in Zentimeter-Tonnen angegeben.

Die *Bestimmung der Knotendrehwinkel φ aus den Gleichgewichtsbedingungen.* Das Gleichgewicht der auf einen Knoten einwirkenden Kräfte wird durch drei Gleichungen ausgedrückt. Zwei dieser Gleichungen sind bereits zur Bestimmung der Stabkräfte verwendet worden; sie bedingen, daß die geometrische Summe der Gleichgewichtsgruppe gleich null ist. Die dritte Gleichgewichtsbedingung fordert, daß die Momentensumme der Kräftegruppe in bezug auf irgend einen Punkt, z. B. in bezug auf den Knotenpunkt, gleich null sein muß. Wir setzen voraus, daß die äußere Kraft des Knotens, die Last oder die Stützkraft, durch den Knotenpunkt geht, also ein Moment null hat. Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so muß selbstverständlich auch das Moment der äußeren Kraft in die Momentengleichung eingesetzt werden. In dem vorliegenden Beispiel lautet die Momentengleichung für den Knoten

$$\left. \begin{aligned} \text{I: } 0 &= M_{12} + M_{13} \\ \text{II: } 0 &= M_{21} + M_{23} + M_{24} \\ \text{III: } 0 &= M_{31} + M_{32} + M_{34} + M_{35} \\ \text{IV: } 0 &= M_{42} + M_{43} + M_{45} + M_{46} \\ \text{V: } 0 &= M_{53} + M_{54} + M_{56} + M_{57} \\ \text{VI: } 0 &= M_{64} + M_{65} + M_{67} \\ \text{VII: } 0 &= M_{75} + M_{76} \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

In diese Gleichgewichtsbedingungen sind nach den Gleichungen 72) die Größen M mit Benutzung der Zahlenwerte der Momente N und der Winkel ψ aus der Tabelle einzusetzen. Es entstehen hierdurch k Gleichungen ersten Grades mit den k unbekannten Knotendrehwinkeln φ , die für das vorliegende Beispiel die Form annehmen:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -648 + 30 \varphi_1 + 9 \varphi_2 + 6 \varphi_3 \\ 0 &= -777 + 9 \varphi_1 + 48 \varphi_2 + 7 \varphi_3 + 8 \varphi_4 \\ 0 &= -477 + 6 \varphi_1 + 7 \varphi_2 + 54 \varphi_3 + 5 \varphi_4 + 9 \varphi_5 \\ 0 &= +39 + 8 \varphi_2 + 5 \varphi_3 + 52 \varphi_4 + 5 \varphi_5 + 8 \varphi_6 \\ 0 &= +522 + 9 \varphi_3 + 5 \varphi_4 + 54 \varphi_5 + 7 \varphi_6 + 6 \varphi_7 \\ 0 &= +732 + 8 \varphi_4 + 7 \varphi_5 + 48 \varphi_6 + 9 \varphi_7 \\ 0 &= +585 + 6 \varphi_5 + 9 \varphi_6 + 30 \varphi_7 \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Wenn, wie in dem vorliegenden Beispiel, das Fachwerk in bezug auf seine Mittelachse symmetrisch geformt ist, so nehmen auch die Gleichgewichtsbedingungen eine symmetrische Form an. In einem solchen Falle wird die Auflösung der Gleichungen wesentlich vereinfacht, indem man zunächst die Summen und die Differenzen der symmetrisch belegenen Knotendrehwinkel φ berechnet. Man erhält aus den Gleichungen 74):

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -63 + 30(\varphi_1 + \varphi_7) + 9(\varphi_2 + \varphi_6) + 6(\varphi_3 + \varphi_5) \\ 0 &= -45 + 9(\varphi_1 + \varphi_7) + 48(\varphi_2 + \varphi_6) + 7(\varphi_3 + \varphi_5) + 16\varphi_4 \\ 0 &= +45 + 6(\varphi_1 + \varphi_7) + 7(\varphi_2 + \varphi_6) + 63(\varphi_3 + \varphi_5) + 10\varphi_4 \\ 0 &= +39 \qquad \qquad \qquad + 8(\varphi_2 + \varphi_6) + 5(\varphi_3 + \varphi_5) + 52\varphi_4 \end{aligned} \right\} (75)$$

und hieraus das 10000-fache der Winkelsummen:

$$\varphi_1 + \varphi_7 = +1,99, \quad \varphi_2 + \varphi_6 = +0,96, \quad \varphi_3 + \varphi_5 = -0,88, \quad \varphi_4 = -0,81. \quad (76)$$

Ferner ergibt sich aus den Gleichungen 74):

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -1233 + 30(\varphi_1 - \varphi_7) + 9(\varphi_2 - \varphi_6) + 6(\varphi_3 - \varphi_5) \\ 0 &= -1509 + 9(\varphi_1 - \varphi_7) + 48(\varphi_2 - \varphi_6) + 7(\varphi_3 - \varphi_5) \\ 0 &= -999 + 6(\varphi_1 - \varphi_7) + 7(\varphi_2 - \varphi_6) + 45(\varphi_3 - \varphi_5) \end{aligned} \right\} (77)$$

und in $\frac{1}{10000}$ als Einheit:

$$\varphi_1 - \varphi_7 = +31,17, \quad \varphi_2 - \varphi_6 = +23,49, \quad \varphi_3 - \varphi_5 = +14,89. \quad (78)$$

Die Gleichungen 76) und 78) bestimmen dann ebenfalls in $\frac{1}{10000}$ als Einheit:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= +16,58, & \varphi_2 &= +12,23, & \varphi_3 &= +6,76, & \varphi_4 &= -0,81, \\ \varphi_5 &= -7,64, & \varphi_6 &= -11,27, & \varphi_7 &= -14,59. \end{aligned} \right\} (79)$$

Um die Biegemomente M der Stabenden und hieraus die Nebenspannungen zu berechnen, sind die Werte von N , ψ und φ in die Gleichungen 72) einzusetzen, was einer weiteren Erklärung nicht bedarf.

Annäherungsverfahren zur Berechnung der Knotendrehwinkel φ .
Vergleicht man die Faktoren der unbekannten Winkel φ in den Gleichungen 74), so ersieht man, daß in der ersten Gleichung der Faktor 30 von φ_1 die beiden anderen Faktoren 9 und 6 von φ_2 und φ_3 bedeutend überwiegt. Ebenso ist es in der zweiten Gleichung mit dem Faktor von φ_2 , in der dritten mit dem Faktor von φ_3 usw. Es ist ferner zu beachten, daß algebraisch

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3 > \varphi_4 > \varphi_5 > \varphi_6 > \varphi_7$$

ist. Man erhält daher einen Annäherungswert von φ_1 , wenn in der ersten der Gleichungen 74)

$$\varphi_3 = \varphi_2 = \varphi_1$$

gesetzt wird. Ebenso erhält man aus der *zweiten* Gleichung einen Annäherungswert von φ_2 , wenn φ_1 , φ_3 , φ_4 gleich φ_2 eingesetzt werden, usf. Man erhält auf diesem Wege als erste Annäherungswerte φ_1' , φ_2' , φ_3' . . . :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1' &= \frac{648}{45} = +14,4 \\ \varphi_2' &= \frac{777}{72} = +10,8 \\ \varphi_3' &= \frac{477}{81} = +5,9 \\ \varphi_4' &= -\frac{39}{78} = -0,5 \\ \varphi_5' &= -\frac{522}{81} = -6,4 \\ \varphi_6' &= -\frac{732}{72} = -10,2 \\ \varphi_7' &= -\frac{585}{45} = -13,0. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Eine *zweite* Annäherung φ_1'' , φ_2'' , φ_3'' . . . gewinnt man dadurch, daß man den Gleichungen 74) die folgende Form gibt:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -648 + \varphi_1'' \left(30 + \frac{9\varphi_2' + 6\varphi_3'}{\varphi_1'} \right) \\ 0 &= -777 + \varphi_2'' \left(48 + \frac{9\varphi_1' + 7\varphi_3' + 8\varphi_4'}{\varphi_2'} \right) \\ 0 &= -477 + \varphi_3'' \left(54 + \frac{6\varphi_1' + 7\varphi_2' + 5\varphi_4' + 9\varphi_5'}{\varphi_3'} \right) \\ 0 &= +39 + \varphi_4'' \left(52 + \frac{8\varphi_2' + 5\varphi_3' + 5\varphi_5' + 8\varphi_6'}{\varphi_4'} \right) \\ 0 &= +522 + \varphi_5'' \left(54 + \frac{9\varphi_3' + 5\varphi_4' + 7\varphi_6' + 6\varphi_7'}{\varphi_5'} \right) \\ 0 &= +732 + \varphi_6'' \left(48 + \frac{8\varphi_4' + 7\varphi_5' + 9\varphi_7'}{\varphi_6'} \right) \\ 0 &= +585 + \varphi_7'' \left(30 + \frac{6\varphi_5' + 9\varphi_6'}{\varphi_7'} \right), \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

woraus sich durch Einsetzen der ersten Annäherungswerte φ_1' , φ_2' , φ_3' . . . ergibt:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1'' &= +16,53, & \varphi_2'' &= +12,25, & \varphi_3'' &= +6,69, & \varphi_4'' &= -0,82, \\ \varphi_5'' &= -7,52, & \varphi_6'' &= -11,39, & \varphi_7'' &= -14,62. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Diese Werte stimmen nahezu mit den genauen Werten aus den Gleichungen 79) überein. Wird eine größere Genauigkeit verlangt, so ist das letzte Verfahren zu wiederholen und eine *dritte* Reihe von Annäherungswerten mit Benutzung der Verhältniszahlen aus der zweiten Reihe zu berechnen.

22. Literarische Notizen. Bei der Abfassung der vorstehenden Abhandlung wurden folgende Aufsätze verwendet:

1. *Beitrag zur Theorie der Bogenfachwercksträger*; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1874 S. 223. In diesem Aufsätze wurde zum ersten Mal das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten benutzt, um, wie es im Abschnitt 18 der hier vorliegenden Abhandlung beschrieben worden ist, die Stabkräfte eines zusammengesetzten Fachwerks mit *einem* überrähligen Stabe zu berechnen.

2. *Beiträge zur Theorie des Fachwerks*; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1874 S. 509 und 1875 S. 17. Das im zuerst genannten Aufsätze beschriebene Verfahren wird hier verallgemeinert und auf die Berechnung der Stabkräfte und der Formänderungen aller zusammengesetzten Fachwerke angewandt.

3. *Beitrag zur Theorie des Bogenfachwerks*; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1881 S. 243. Dieser Aufsatz enthält das im Abschnitt 20 beschriebene Verfahren zur Vereinfachung der Berechnung eines Bogenfachwerks mit *drei* überrähligen Stäben.

4. *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*; Zivilingenieur, 1885 S. 289. Hier werden die Ergebnisse der vorhergehenden Aufsätze zusammengefaßt, um die Vorteile zu zeigen, die mit der Anwendung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten verbunden sind. Zu dem Zweck werden auch die Arbeiten von Clapeyron, Maxwell und Castigliano kurz besprochen. Es wird in dem Aufsätze nachdrücklich darauf hingewiesen, daß das genannte Prinzip, das in der Gleichung 1) der vorliegenden Abhandlung seinen Ausdruck findet, nicht nur geeignet ist, die Formänderungen der Fachwerke und die Stabkräfte der zusammengesetzten Fachwerke zu bestimmen, sondern daß es außerdem *alle* Fragen beantwortet, die bei der Berechnung einfacher und zusammengesetzter Fachwerke vorkommen können.

5. *Ueber das sogenannte Prinzip der kleinsten Deformationsarbeit*. Wochenblatt für Architekten und Ingenieure, 1883 S. 171; enthält die im Abschnitt 16 gegebene Ableitung des Satzes von Menabrea.

6. *Ueber Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne*, Zivilingenieur, 1887 S. 631; enthält als Anwendung das im Abschnitt 4 der vorliegenden Abhandlung beschriebene Verfahren.

7. *Die Berechnung des Fachwerks mit starren Knotenverbindungen*; Zivilingenieur, 1892 S. 577 und 1893 S. 67. Dieser Aufsatz enthält die im Abschnitt 21 entwickelte Berechnung der *Nebenspannungen* eines ebenen Fachwerks.

8. *Technische Mechanik*; nach den Vorlesungen von Mohr bearbeitet und herausgegeben vom Ingenieur-Verein am Polytechnikum zu Stuttgart, 1877; enthält u. a. die im Abschnitt 7 beschriebene *erste* Anordnung der Kräftepläne einfacher Fachwerke.

In betreff der umfangreichen Literatur der Theorie des ebenen Fachwerks verweisen wir im übrigen auf die Abhandlung *Hennebergs*: *Die graphische Statik* in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Abteilung IV, 1, Heft 3.

Abhandlung XIII.

Allgemeine Theorie der ebenen Träger.

Die einfachste Körperverbindung besteht aus einer Reihe gerader Stäbe, die durch Gelenke miteinander verbunden sind. Die Bewegungen einer solchen *Kette* können durch *Dehnungen* der Kettenglieder und durch ihre *Drehungen* um die Gelenke herbeigeführt werden. Wenn diese Bewegungen unendlich klein oder doch sehr klein sind, so unterliegen sie einfachen Gesetzen, die eine *statische* Deutung zulassen und dadurch an Anschaulichkeit gewinnen. Es handelt sich hier um kinematisch-statische Beziehungen von ähnlicher Art, wie sie in der Abhandlung I zwischen dem Gleichgewicht und den unendlich kleinen Bewegungen eines *starren* Körpers abgeleitet worden sind. Auf jene einfachen Gesetze lassen sich alle Aufgaben zurückführen, die mit den inneren Kräften und mit den Formänderungen der ebenen Träger sich befassen.

1. Kleine Bewegungen einer Kette aus dehnbaren Gliedern. In den nebenstehenden Abbildungen bezeichnen $A_1, A_2, A_3 \dots$ die Gelenke einer ebenen Kette, die in ihrer Ebene sich bewegt und deren Anfangsgelenk A_1 eine *feste* Lage hat. Die Reihenfolge $A_1, A_2, A_3 \dots$ bestimmt den *Sinn* der Stabstrecken, deren Längen $l_1, l_2, l_3 \dots$ bei einer unendlich kleinen Bewegung der Kette um $dl_1, dl_2, dl_3 \dots$ sich ändern. Die Zahlenwerte

$$\delta_1 = \frac{dl_1}{l_1}, \quad \delta_2 = \frac{dl_2}{l_2}, \quad \delta_3 = \frac{dl_3}{l_3} \dots \quad (1)$$

bestimmen also die *Dehnungen*, deren Werte *positiv* sind, wenn die Glieder sich *verlängern*. Außer diesen Zahlen seien gegeben die *unendlich kleinen* Winkel α , um die sich jedes Kettenglied *gegen* das *nächst vorhergehende Glied* dreht. Das Glied l_1 dreht sich um

das feste Gelenk A_1 und beschreibt den Winkel α_1 , das Glied l_2 dreht sich um das Gelenk A_2 und beschreibt gegen das Glied l_1 den Winkel α_2 usf. Die Winkel α sollen das positive Vorzeichen erhalten, wenn die Drehung im Sinne der Uhrzeigerbewegung erfolgt. Der Weg, den ein Gelenk, z. B. das Gelenk A_5 bei diesen unendlich kleinen Bewegungen beschreibt, setzt sich durch geometrische Summierung zusammen aus den Wegstrecken, die es bei den Einzelbewegungen zurücklegt, und ist daher unabhängig von der Reihenfolge der kleinen Bewegungen (vergl. I, 8). Für das Gelenk A_5 kommen also acht Einzelbewegungen in Betracht:

die vier Drehungen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ der Glieder l_1, l_2, l_3, l_4 , die zwischen A_5 und dem festen Anfangsgelenk A_1 liegen, und die vier Dehnungen $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ dieser Glieder. In den Abb. 1 u. 2 sind in unendlich vergrößertem Maße beispielsweise die Wege dargestellt, die das Gelenk A_5 bei der Drehung α_2 und bei der Dehnung δ_2 des Gliedes l_2 durchläuft. Zu dem Zweck

sind durch das Gelenk A_5 zwei feste Achsen u, v gelegt. Richtung und Sinn der Achse u wurden beliebig gewählt. Die Achse v liegt gegen die Achse u so, daß der Uhrzeiger 90° durchläuft, um von u nach v zu gelangen. Diese Bestimmung ist wesentlich, weil sie die Vorzeichen der Wegstrecken bedingt. Wenn das Glied l_2 um den unendlich kleinen Winkel α_2 im Sinne des Uhrzeigers sich dreht, während alle Gliedlängen und alle Kettenwinkel mit Ausnahme des Winkels A_2 unverändert bleiben, so beschreibt das Gelenk A_5 (Abb. 1) den unendlich kleinen Kreisbogen

$$\overline{A_5 B} = r_2 \alpha_2$$

mit dem Halbmesser

$$r_2 = \overline{A_2 A_5}.$$

Wir bezeichnen die Abstände des Gelenkes A_2 von den Achsen u, v mit u_2, v_2 und geben diesen Strecken das positive

Abb. 1.

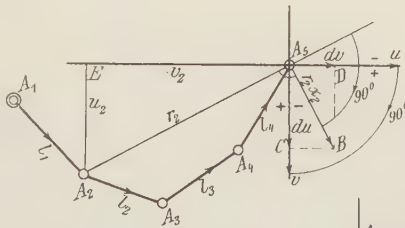
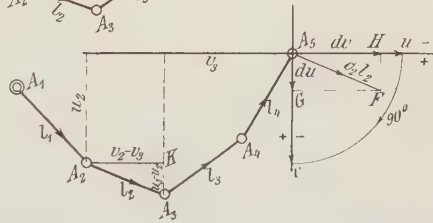


Abb. 2.



Vorzeichen, wenn sie *rechts* von den Achsen liegen. Dementsprechend erhalten die Wegstrecken

$$\overline{A_5 C} = du \quad \text{und} \quad \overline{A_5 D} = dv$$

das *positive* Vorzeichen, wenn das Gelenk A_5 in bezug auf die Achsen u und v nach *rechts* sich bewegt. Im vorliegenden Falle liegt das Gelenk A_2 *rechts* von der Achse u und *rechts* von v , daher sind die Abstände u_2 und v_2 *positiv*. Der Punkt B liegt *rechts* von u und *links* von v , daher ist du positiv und dv negativ. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$A_5 CB \sim A_5 EA_2$$

folgt daher:

$$+ du : - dv : r_2 \alpha_2 = + v_2 : + u_2 : r_2$$

oder

$$du = + v_2 \alpha_2$$

$$dv = - u_2 \alpha_2.$$

In gleicher Weise ergeben sich die Wegstrecken, die das Gelenk A_5 gegen die Achsen u, v zurücklegt infolge der Drehungen $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ der übrigen zwischen A_5 und A_1 liegenden Kettenglieder. Die Wegstrecken du und dv summieren sich algebraisch. Daher ist bei beliebiger Reihenfolge der vier Drehungen α , wenn die Kettenglieder sich nicht dehnen:

$$\left. \begin{aligned} du_5 &= v_1 \alpha_1 + v_2 \alpha_2 + v_3 \alpha_3 + v_4 \alpha_4 = \Sigma^4 v \alpha \\ dv_5 &= -(u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3 + u_4 \alpha_4) = -\Sigma^4 u \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Bei der Bildung dieser algebraischen Summen sind also die Vorzeichen der Abstände u, v und der Drehungswinkel α nach den oben gemachten Angaben zu berücksichtigen.

In Abb. 2 ist ferner der Weg dargestellt, den das Gelenk A_5 zurücklegt, wenn das Kettenglied l_2 eine positive Dehnung δ_2 erleidet, während keine andere Bewegung stattfindet. In diesem Falle verschieben sich alle Punkte des Kettenteils $A_3 A_4 A_5$ in der Richtung und dem Sinne des Gliedes l_2 um die unendlich kleine Strecke

$$A_5 F = \delta_2 l_2,$$

die in der Richtung und dem Sinne der positiven Abstände u, v die Längen

$$A_5 G = du \quad \text{und} \quad \overline{A_5 H} = dv$$

hat. Der Punkt F liegt *rechts* von der Achse u und *links* von der Achse v , daher ist du positiv und dv negativ. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$A_5 HF \sim A_2 K A_3$$

folgt daher:

$$+ du : - dv : \delta_2 l_2 = (u_3 - u_2) : (v_2 - v_3) : l_2$$

oder

$$du = \delta_2 (u_3 - u_2) \quad \text{und} \quad dv = \delta_2 (v_3 - v_2).$$

Dehnen sich in beliebiger Reihenfolge alle Kettenglieder, während die Kettenwinkel sich nicht ändern, so ergibt sich durch algebraische Summierung:

$$du_5 = \delta_1 (u_2 - u_1) + \delta_2 (u_3 - u_2) + \delta_3 (u_4 - u_3) - \delta_4 u_4$$

$$dv_5 = \delta_1 (v_2 - v_1) + \delta_2 (v_3 - v_2) + \delta_3 (v_4 - v_3) - \delta_4 v_4$$

oder, wenn folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\delta_1 = \beta_1, \quad \delta_2 - \delta_1 = \beta_2, \quad \delta_3 - \delta_2 = \beta_3, \quad \delta_4 - \delta_3 = \beta_4, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} du_5 &= -u_1 \beta_1 - u_2 \beta_2 - u_3 \beta_3 - u_4 \beta_4 = -\Sigma^4 u \beta \\ dv_5 &= -v_1 \beta_1 - v_2 \beta_2 - v_3 \beta_3 - v_4 \beta_4 = -\Sigma^4 v \beta \end{aligned} \quad (4)$$

Wenn die im vorstehenden betrachteten Bewegungen alle gleichzeitig ausgeführt werden, so ergeben sich die Wegstrecken du_5 und dv_5 des Gelenkes A_5 durch Vereinigung der Gleichungen 2) und 4):

$$\begin{aligned} du_5 &= \Sigma^4 v \alpha - \Sigma^4 u \beta \\ dv_5 &= -\Sigma^4 u \alpha - \Sigma^4 v \beta \end{aligned} \quad (5)$$

Das Zeichen Σ^4 deutet an, daß die Summierung sich auf alle Glieder erstreckt, die zwischen dem *festen* Anfangsgelenk A_1 und dem Gelenk A_5 liegen.

2. Statische Darstellung der Kettenbewegung. Die kleinen Bewegungen einer Kette lassen sich auf statischem Wege darstellen, wenn man einem jeden Gelenk A_x die zwei Gewichte α_x und β_x beilegt. Bei der Bewegung des Gelenkes A_5 kommen also die beiden Gewichtsgruppen $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ und $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ in Betracht. *In bezug auf die durch das Gelenk A_5 gelegten Achsen u, v* haben die beiden Gewichtsgruppen die statischen Momente $\Sigma^4 u \alpha$, $\Sigma^4 u \beta$, $\Sigma^4 v \alpha$, $\Sigma^4 v \beta$. Der Vorteil dieser Darstellung besteht darin, daß die bekannten einfachen Eigenschaften der statischen Momente sich auf die Kettenbewegung anwenden lassen. Da die Zahlenwerte α und β die Drehungen und die Dehnungen der Kettenglieder bestimmen, so nennen wir α die *Drehungsgewichte* und β die *Dehnungsgewichte* der Kettengelenke.

3. Die geschlossene Kette aus dehnbaren Gliedern. Die von der Kette umschlossene Fläche liegt entweder links oder rechts von der Kette. Im ersten Falle nennen wir die Kette eine *Linkskette*, im zweiten eine *Rechtskette*. Da α den Winkel be-

zeichnet, um den ein Kettenglied *gegen das nächst vorhergehende Glied* im Sinne des Uhrzeigers sich dreht, so bezeichnen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ in einer *Linkskette* die Aenderungen der *Innenwinkel*, in einer Rechtskette dagegen die Aenderungen der *Außenwinkel* des Ketten-vielecks. Da die Summe der Vieleckwinkel, sowohl der inneren als auch der äußeren, unveränderlich ist, so ist die Summe ihrer Aenderungen in jedem Falle gleich null:

$$\Sigma \alpha = 0. \quad (6)$$

Die Drehungsgewichte α einer geschlossenen Kette bilden demnach ein Kräftepaar, d. h. sie sind gleichwertig zwei gleichen Gewichten von entgegengesetzten Vorzeichen. Aus den Bezeichnungen der Zahlenwerte β geht ferner ohne weiteres hervor, daß die

Dehnungsgewichte β einer geschlossenen Kette ebenfalls ein Kräftepaar bilden. Beispielsweise ist für das Kettenviereck $A_1 A_2 A_3 A_4 A_1$ (Abb. 3)

$$\beta_2 = \delta_2 - \delta_1,$$

$$\beta_3 = \delta_3 - \delta_2,$$

$$\beta_4 = \delta_4 - \delta_3,$$

$$\beta_1 = \delta_1 - \delta_4,$$

also:

$$\Sigma \beta = 0 \quad (7)$$

Da der Endpunkt der geschlossenen Kette mit dem *ruhenden* Anfangsgelenk A_1 dauernd zusammenfällt, so ist für jedes Achsenpaar u, v , das durch diesen Punkt gelegt wird, nach den Gleichungen 5):

$$\begin{aligned} 0 &= \Sigma v \alpha - \Sigma u \beta \\ 0 &= \Sigma u \alpha + \Sigma v \beta \end{aligned} \quad (8)$$

wenn die Summen auf *alle* Gelenke der Kette sich erstrecken. Es ist hierbei zu beachten, daß das Moment eines Kräftepaares durch Parallelverschiebung der Momentenachse nicht geändert wird. Daher gelten die Gleichungen 8) nicht nur für die durch das Gelenk A_1 gelegten Achsen, sondern für jedes Achsenpaar in der Kettenebene, das der Bedingung:

$$(u, v) = 90^\circ$$

entspricht (Abb. 3). Die Gleichungen 8) drücken aus, daß die beiden Kräftepaare (α) und (β) numerisch *von gleicher Größe* sind. Wird die Achse u in starrer Verbindung mit der Gewichtsgruppe (β) im Sinne des Uhrzeigers um 90° gedreht, so erhalten die beiden

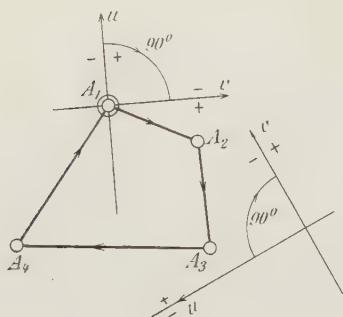


Abb. 3.

Kräftepaare auch dieselbe Lage und *sind also in dieser Lage gleichwertig*. Wird dagegen die Achse u in starrer Verbindung mit der Gewichtsgruppe (β) im Sinne des Uhrzeigers um 270° gedreht, so bilden beide Gruppen (α) und (β) zusammen eine *Gleichgewichtsgruppe*. Durch diese Lagenänderungen erhalten manche Aufgaben eine anschauliche Form.

Die Gleichwertigkeit zweier ebenen Gewichtsgruppen wird ausgedrückt durch *drei* Momentengleichungen in bezug auf Achsen, die nicht in *einem* Punkt sich schneiden. Die Formänderung einer geschlossenen Kette aus dehnbaren Gliedern ist demnach bestimmt, wenn von den Gewichten α und β nur *drei* unbekannt sind.

4. Die Kette aus undehnbaren Gliedern. Wenn die Dehnungen δ der Kettenglieder gleich null sind, so verschwinden auch die Dehnungsgewichte β der Gelenke. Nach den Gleichungen 5) erhalten also die Wege die ein Gelenk A_5 in der Richtung und dem Sinne der positiven Abstände u, v zurücklegt, die Größen:

$$\left. \begin{aligned} du_5 &= \Sigma^4 v\alpha \\ dv_5 &= -\Sigma^4 u\alpha \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Es ist zu beachten, daß du_5 den *Schubweg* der Achse v und $-dv_5$ den Schubweg der Achse u bezeichnet, wenn diese Achsen mit dem Gliede $A_4 A_5$ starr verbunden werden. Ferner ist zu beachten, daß die Gleichungen 9) nicht nur für die durch das Gelenk A_5 gelegten Achsen, sondern für *jede* Achse gelten, *die mit dem Gliede $A_4 A_5$ starr verbunden ist*. Denn man kann den Schnittpunkt der Achse mit dem Gliede als das Gelenk A_5 ansehen, ohne die Gleichungen 9) ändern zu müssen. Es folgt hieraus, daß der *Schwerpunkt* γ_4 der Gewichtsgruppe ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$) bei der unendlich kleinen Bewegung der Kette der *augenblickliche Drehpunkt* des Gliedes $A_4 A_5$ ist. Denn das Moment des Schwerpunktes γ_4 vom Gewicht

$$\gamma_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

ist für jede Achse gleich der Momentensumme der Gruppe ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$). Der Schubweg einer jeden mit dem Gliede $A_4 A_5$ starr verbundenen Achse, die durch den Schwerpunkt γ_4 geht, ist daher gleich null.

5. Die geschlossene Kette aus undehnbaren Gliedern. Die Drehungsgewichte α aller Gelenke einer *geschlossenen* Kette aus undehnbaren Gliedern bilden eine *Gleichgewichtsgruppe*, weil nach den Gleichungen 8) ihre Momentensumme für jede Achse gleich null

ist. Die Bedingungen des Gleichgewichts einer ebenen Gewichtsgruppe werden durch *drei* Momentengleichungen dargestellt zu denen auch die Bedingung

$$\sum \alpha = 0$$

gehört. Die Formänderung einer geschlossenen Kette aus undeformbaren Gliedern ist daher bestimmt, wenn *drei* nicht auf einer Geraden liegende Drehungsgewichte α unbekannt sind.

Beispiele zu den Abschnitten 3 bis 5

Beispiel 1. Bezogen auf eine sehr kleine Zahleneinheit, die hier und in den folgenden Beispielen gleich 10^{-6} angenommen wird, sind die Dehnungen der drei Seiten l_1, l_2, l_3 der dreigliedrigen Linkskette $A_1 A_2 A_3$ (Abb. 4) gegeben:

$$\delta_1 = +63,$$

$$\delta_2 = +25,$$

$$\delta_3 = -56.$$

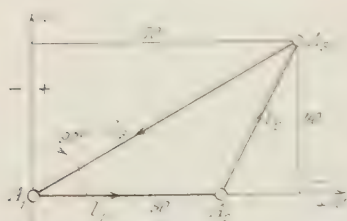


Abb. 4.

Es sind die Änderungen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ der Innenwinkel des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ zu bestimmen.

Lösung durch Rechnung. Um die Rechnung tunlichst zu vereinfachen, legt man *eine* der beiden Achsen u, v durch *zwei* Gelenke und die andere durch *ein* Gelenk, so daß drei Gewichtsmomente gleich null werden und nur drei Abstände u, v aus der Zeichnung zu entnehmen sind, und zwar im vorliegenden Beispiel:

$$u_2 = +50 \text{ cm.} \quad u_3 = +70 \text{ cm.} \quad v_3 = -40 \text{ cm.}$$

Durch die gegebenen Dehnungen δ sind die Dehnungsgewichte der drei Gelenke bestimmt:

$$\beta_1 = \delta_1 - \delta_3 = 63 - 56 = +119$$

$$\beta_2 = \delta_2 - \delta_1 = 25 - 63 = -38$$

$$\beta_3 = \delta_3 - \delta_2 = -56 - 25 = -81.$$

Demnach ist

$$\sum u \alpha = +50 \alpha_2 + 70 \alpha_3$$

$$\sum u \beta = +50 \beta_2 + 70 \beta_3 = -7570$$

$$\sum v \alpha = -40 \alpha_3$$

$$\sum v \beta = -40 \beta_3 = +3240.$$

Die erste der Gleichungen 8) fordert

$$0 = \sum v \alpha - \sum u \beta = -40 \alpha_3 + 7570$$

oder

$$\alpha_3 = +189.$$

Ferner ergibt die zweite der Gleichungen 8)

$$0 = \sum \alpha + \sum \beta = 50 \alpha_2 + 70 \alpha_3 + 3240$$

oder

$$\alpha_2 = \frac{-3240 - 70 \cdot 189}{50} = -329.$$

Endlich ergibt die Bedingung

$$0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 - 329 + 189$$

$$\alpha_1 = +140.$$

Die Größen α beziehen sich wie die Größen β auf 10^{-6} als Einheit.

Graphische Lösung (Abb. 5). Der Schwerpunkt B der beiden Gewichte β_2, β_3 der Gelenke A_2, A_3 :

$$\beta_2 = -38, \quad \beta_3 = -81$$

wird bestimmt durch die Bedingung

$$A_2 B : B A_3 = 81 : 38.$$

Das Kräftepaar der drei Gewichte $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ besteht also aus den Gewichten $+119$ und -119 der beiden Punkte A_1 und B . Wird dasselbe im Sinne des Uhrzeigers um 90° gedreht, so kommt es in die Lage $A_1 B_1$. In dieser Lage ist es *gleichwertig* einem jeden der drei Kräftepaare, die gebildet werden können aus den Gewichten α_1 und $(\alpha_2 \mp \alpha_3)$, α_2 und $(\alpha_1 \mp \alpha_3)$, α_3 und $(\alpha_1 \mp \alpha_2)$. Die Schwerpunkte C_1, C_2, C_3 der Gewichtspaare $(\alpha_2 \mp \alpha_3)$, $(\alpha_1 \mp \alpha_3)$, $(\alpha_1 \mp \alpha_2)$ liegen daher auf den Geraden

$$A_1 C_1 \parallel A_2 C_2 \parallel A_3 C_3 \parallel A_1 B_1.$$

Da die vier Kräftepaare gleichen Sinn haben, so erhalten die Drehungsgewichte α_1 und α_3 das *positive* Vorzeichen des Gewichtes β_1 , während α_2 negativ ist. Die in die Zeichnung eingeschriebenen Abmessungen ergeben hiernach:

$$\alpha_1 = + \frac{119 \cdot 68,6}{58,3} = +140$$

$$\alpha_2 = - \frac{119 \cdot 68,6}{24,8} = -329$$

$$\alpha_3 = + \frac{119 \cdot 68,6}{43,2} = +189.$$

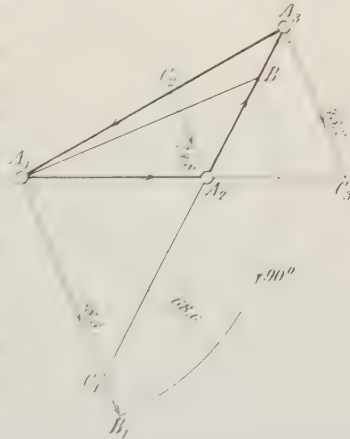


Abb. 5.

Eine Probe für die Genauigkeit der Zeichnung liefert die Bedingung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Beispiel 2 (Abb. 6). Wenn nur *eins* der drei Glieder, z. B. l_1 , eine Dehnung δ_1 erleidet, während die beiden anderen Glieder l_2 und l_3 ihre Längen nicht ändern, so erhält die geometrische Darstellung des vorigen Beispiels die in Abb. 6 angegebene Form. Das Kräftepaar der Gewichte β besteht aus den beiden Punkten A_1 und A_2 mit den Gewichten $\beta_1 = +\delta_1$, $\beta_2 = -\delta_1$, und es ergibt sich wie im vorigen Beispiel

$$\delta_1 \overline{A_1 A_2} = -\alpha_1 \overline{A_1 C_1} = -\alpha_2 \overline{A_2 C_2} = +\alpha_3 \overline{C_3 A_3}.$$

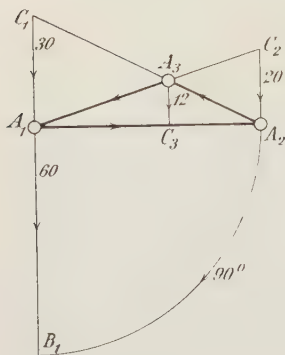


Abb. 6.

In Abb. 6 ist gegeben

$$\delta_1 = +70 \cdot 10^{-6},$$

$$A_1 A_2 = 60 \text{ cm},$$

$$A_1 C_1 = 30 \text{ cm},$$

$$A_2 C_2 = 20 \text{ cm},$$

$$C_3 A_3 = 12 \text{ cm},$$

also

$$+70 \cdot 60 = -30 \alpha_1$$

$$= -20 \alpha_2 = +12 \alpha_3.$$

folglich

$$\alpha_1 = -140 \cdot 10^{-6},$$

$$\alpha_2 = -210 \cdot 10^{-6},$$

$$\alpha_3 = +350 \cdot 10^{-6}.$$

Beispiel 3. Die Winkeländerungen einer geschlossenen viergliedrigen Kette aus undehnbaren Gliedern. Die vier Drehungsgewichte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ bilden eine Gleichgewichtsgruppe und können

also durch die drei Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden, wenn *eins* der vier Gewichte bekannt ist.

In dem Beispiel der Abb. 7 ist gegeben die Änderung des Innenwinkels A_1 :

$$\alpha_1 = +80 \cdot 10^{-6};$$

$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ bezeichnen daher ebenfalls die Änderungen der Innenwinkel $A_2,$

A_3, A_4 , und es kommt nicht in Betracht, ob die Kette eine Linkskette oder eine Rechtskette ist. Man zieht die Strecken

$$A_2 B_2 \parallel A_1 A_4, \quad A_4 B_4 \parallel A_1 A_2$$

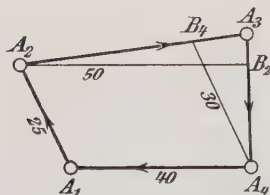


Abb. 7.

und entnimmt aus der Zeichnung die Längen

$$\begin{aligned}\overline{A_1 A_2} &= 25 \text{ cm}, & \overline{A_1 A_4} &= 40 \text{ cm} \\ \overline{A_2 B_2} &= 50 \text{ cm}, & \overline{A_4 B_4} &= 30 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Die Momentengleichungen in bezug auf die beiden Achsen $A_2 A_3$ und $A_3 A_4$ ergeben dann:

$$\begin{aligned}0 &= 25 \alpha_1 + 30 \alpha_4 = 25 \cdot 80 + 30 \alpha_4 \\ 0 &= 40 \alpha_1 + 50 \alpha_2 = 40 \cdot 80 + 50 \alpha_2;\end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned}\alpha_4 &= -\frac{25 \cdot 80}{30} = -67 \\ \alpha_2 &= -\frac{40 \cdot 80}{50} = -64\end{aligned}$$

und

$$\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 = -80 + 67 + 64 = +51.$$

Besondere Fälle. Bildet das Kettenviereck ein Trapez mit den parallelen Seiten $A_1 A_4$, $A_2 A_3$ (Abb. 8), so fordern die Momentengleichungen in bezug auf die drei Achsen $A_2 A_3$, $A_1 A_4$ und $A_3 A_4$:

$$\begin{aligned}0 &= \alpha_1 + \alpha_4 \\ 0 &= \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 &= \alpha_1 \overline{A_1 A_4} + \alpha_2 \overline{A_2 A_3} = 20 \alpha_1 + 35 \alpha_2.\end{aligned}$$

Die Gewichte (α_1, α_4) und (α_2, α_3) bilden also zwei Kräftepaare, die der Größe nach gleich, dem Sinne nach verschieden sind.

Ist das Kettenviereck ein Parallelogramm (Abb. 9), so wird

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = +\alpha_3 = -\alpha_4.$$

Liegen die drei Gelenke A_1, A_2, A_3 des Vierecks in einer Geraden (Abb. 10), so wird

$$\alpha_4 = 0,$$

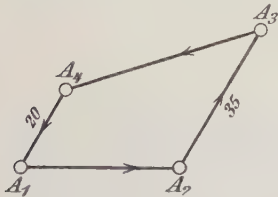


Abb. 8.

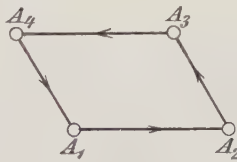


Abb. 9.

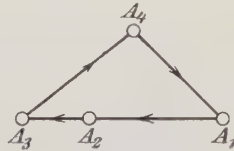


Abb. 10.

und da die drei Gewichte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eine Gleichgewichtsgruppe bilden, so ist mit Berücksichtigung des Streckensinns

$$\alpha_2 : \alpha_1 : \alpha_3 = \overline{A_1 A_3} : \overline{A_3 A_2} : \overline{A_2 A_1}.$$

Beispiel 4 (Abb. 11). In dem aus undehnbaren Gliedern bestehenden Kettenviereck $A_1 A_2 A_3 A_4$, ist gegeben die Dehnung

$\delta = +32 \cdot 10^{-6}$ der Diagonale $\overline{A_1 A_3}$. Es sind die Änderungen der Innenwinkel des Vierecks zu bestimmen. Man zieht

$$A_1 C_1 \parallel A_2 A_3, \quad A_3 C_3 \parallel A_4 A_1$$

und die vier Strecken $A_2 B_2$, $A_4 B_4$, $C_1 B_1$, $C_3 B_3$ normal zur Diagonale $\overline{A_1 A_3}$.

Nach Beispiel 2 ergibt sich zunächst

$$\delta \overline{A_1 A_3} = +\alpha_2 \overline{A_2 B_2} = +\alpha_4 \overline{A_4 B_4}.$$

Ferner folgt aus dem Gleichgewicht der vier Drehungsgewichte α_1 , α_2 , α_3 , α_4 :

$$0 = \alpha_1 C_1 A_1 + \alpha_2 A_3 A_2$$

und

$$0 = \alpha_3 C_3 A_3 + \alpha_4 A_1 A_4.$$

Demnach ist

$$\delta_1 \overline{A_1 A_3} = -\alpha_1 \overline{C_1 B_1} = +\alpha_2 \overline{A_2 B_2} = -\alpha_3 \overline{C_3 B_3} = +\alpha_4 \overline{A_4 B_4}.$$

In dem Beispiel der Abb. 11 ist

$$\overline{A_1 A_3} = 61,0 \text{ cm}, \quad C_1 B_1 = 18,9 \text{ cm}, \quad A_2 B_2 = 22,8 \text{ cm}, \quad C_3 B_3 = 35,5 \text{ cm}, \\ A_4 B_4 = 27,2 \text{ cm};$$

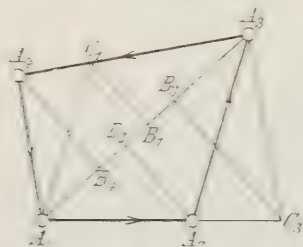


Abb. 11.

$$\alpha_1 = -\frac{61,0 \cdot 32}{18,9} = -103$$

$$\alpha_2 = +\frac{61,0 \cdot 32}{22,8} = +86$$

$$\alpha_3 = -\frac{61,0 \cdot 32}{35,5} = -55$$

$$\alpha_4 = +\frac{61,0 \cdot 32}{27,2} = +72.$$

Eine Rechnungsprobe besteht darin, daß

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

sein muß.

Beispiel 5 (Abb. 12). In der viergliedrigen Links-kette sind bekannt: die Änderungen der Innenwinkel

$$\alpha_2 = +80, \quad \alpha_4 = +24$$

und die drei Dehnungen

$$\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0.$$

Zu berechnen ist die Dehnung δ_1 des Gliedes $\overline{A_1 A_2}$. Die Aufgabe ist bestimmt, weil sie drei Unbekannte δ_1 , α_1 , α_3 enthält, von denen jedoch nur eine gefordert wird. Um die beiden anderen,



Abb. 12.

α_1 und α_3 , aus der Rechnung auszuschneiden, legt man die Achse v durch die Gelenke A_1, A_3 und die Achse u durch A_1 . Dann ist

$$\beta_1 = +\delta_1, \quad \beta_2 = -\delta_1, \quad \beta_3 = \beta_4 = 0$$

$$\sum u\beta = -45\beta_1, \quad \sum v\alpha = +22 \cdot 80 - 30 \cdot 24 = +1040,$$

also nach Gleichung 8)

$$0 = \sum v\alpha - \sum u\beta = 1040 + 45\beta_1$$

$$\beta_1 = -23 = \delta_1.$$

6. Die Einflußzahlen der Stabkräfte einfacher Fachwerke. Um die Stabkraft S zu berechnen, die in einem Stabe eines einfachen Fachwerks von gegebenen, beliebig gerichteten Lasten erzeugt wird, durchschneidet man diesen Stab und erteilt seiner Länge l eine unendlich kleine Vergrößerung dl , während die Längen aller anderen Stäbe sich nicht ändern. Bei der hierdurch bestimmten unendlich kleinen Bewegung des Fachwerks leisten die beiden Zugkräfte S , durch die man den durchschnittenen Stab ersetzen kann, die Arbeit $-Sdl$. Wird die Arbeitsumme der Lasten des Fachwerks mit L bezeichnet, so ist nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten

$$S = \frac{L}{dl}. \quad (10)$$

Die Gesetze der Kettenbewegung ergeben ein Verfahren zur Bestimmung der Arbeitsumme L , das im folgenden an einem Beispiel erklärt werden möge.

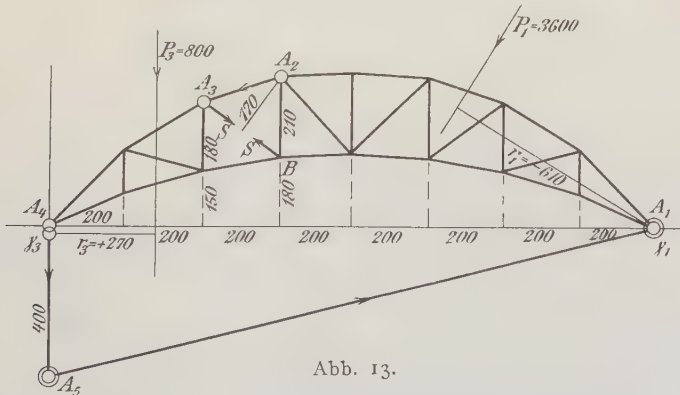


Abb. 13.

Der Dachbinder A_1A_4 (Abb. 13) ruht im Punkte A_1 auf einer festen Stütze und im Punkte A_4 auf einem Gleitlager, was durch den Stützstab A_4A_5 angedeutet ist. Wird der Stab A_3B durchgeschnitten, so läßt sich die Linkskette $A_1A_2A_3A_4A_5A_1$ bilden, die

aus fünf *starr*en Gliedern besteht. Die Drehungsgewichte der beiden Gelenke A_2 und A_3 ergeben sich nach Beispiel 2 und 3 aus den betreffenden Winkeländerungen:

$$\alpha_2 = \frac{dl}{170} = + \frac{100\,000}{170} = + 588$$

$$\alpha_3 = - \alpha_2 \frac{210}{180} = - 686,$$

wenn dl , bezogen auf eine *unendlich kleine* Längeneinheit, gleich 100 000 angenommen wird.

Da die fünf Drehungsgewichte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ eine Gleichgewichtsgruppe bilden, so fordern die Momentengleichungen in bezug auf die Achsen A_1A_4 und A_5A_4 :

$$0 = 390 \alpha_2 + 330 \alpha_3 - 400 \alpha_5$$

$$0 = 2 \alpha_3 + 3 \alpha_2 + 8 \alpha_1;$$

also ist

$$\alpha_5 = + 7$$

$$\alpha_1 = - 49.$$

Endlich folgt aus der Bedingung $\Sigma \alpha = 0$:

$$\alpha_4 = - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_5 = + 140.$$

Der starre Fachwerkteil A_1A_2 dreht sich um das Gelenk A_1 und beschreibt, da $\alpha_1 = - 49$ ist, dem Uhrzeiger entgegen einen unendlich kleinen Winkel von der Größe 49. Der Stab A_2A_3 dreht sich um den Schwerpunkt γ_2 der beiden Drehungsgewichte α_1 und α_2 , und zwar um den Winkel

$$\gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_2 = - 49 + 588 = + 539.$$

Der Schwerpunkt γ_2 braucht hier nicht bestimmt zu werden, weil er für den Zweck der Aufgabe unnötig ist. Der starre Fachwerkteil A_3A_4 dreht sich um den Schwerpunkt γ_3 der drei Drehungsgewichte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, und der Drehwinkel hat die Größe

$$\gamma_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = - 147.$$

Da die fünf Drehungsgewichte α eine Gleichgewichtsgruppe bilden, so fällt γ_3 zusammen mit dem Schwerpunkt der beiden Gewichte α_4 und α_5 . Daher ist die Strecke

$$\overline{A_4\gamma_3} = \frac{7}{140 + 7} 400 = 19 \text{ cm.}$$

In Abb. 13 bezeichnet $P_1 = 3600 \text{ kg}$ die *Resultante* sämtlicher Lasten, die von dem starren Fachwerkteil A_1A_2 mit Einschluß des Knotens A_2 aufgenommen werden. Der Drehpunkt A_1 liegt *links* von P_1 , sein Abstand r_1 hat daher die *negative* Größe

$$r_1 = - 610 \text{ cm.}$$

Der Schubweg der Kraft P_1 ist

$$r_1 \gamma_1 = + 610 \cdot 49 = + 29890$$

und ihre Arbeit

$$P_1 r_1 \gamma_1 = + 3600 \cdot 29890 = + 107\,604\,000.$$

Die Kraft

$$P_3 = 800 \text{ kg}$$

bezeichnet ferner die Resultante der von dem starren Fachwerkteil $A_3 A_4$ aufzunehmenden Lasten. Der Abstand des augenblicklichen Drehpunktes γ_3 von dieser Last ist

$$r_3 = + 270,$$

daher der Schubweg der Last

$$r_3 \gamma_3 = - 270 \cdot 147 = - 39690$$

und ihre Arbeit

$$P_3 r_3 \gamma_3 = - 800 \cdot 39690 = - 31\,752\,000.$$

Demnach ist

$$L = P_1 r_1 \gamma_1 + P_3 r_3 \gamma_3 = + 75\,852\,000$$

und

$$S = \frac{L}{dl} = + \frac{75\,852\,000}{100\,000} = + 759 \text{ kg.}$$

Die Einflußzahlen $\varkappa_1$ und $\varkappa_3$ der Lasten P_1 und P_3 haben also die Größen:

$$\varkappa_1 = \frac{r_1 \gamma_1}{dl} = + \frac{29890}{100\,000} = + 0,299$$

$$\varkappa_3 = \frac{r_3 \gamma_3}{dl} = - \frac{39690}{100\,000} = - 0,397.$$

7. Die Formänderung eines Fachwerks. Wir nehmen an, daß die *Dehnungen* δ aller Stäbe des einfachen oder zusammengesetzten Fachwerks bestimmt worden sind, und daß die hieraus hervorgehenden Verschiebungen der Fachwerkelenke berechnet werden sollen. Für jede offene oder geschlossene Kette, die aus den Fachwerkstäben gebildet wird, sind dann die *Dehnungsgewichte* β der Gelenke gegeben, und die nächste Aufgabe besteht darin, die *Drehungsgewichte* α der Kettengelenke daraus zu berechnen. In der Regel setzen sich die Größen α zusammen aus Winkeländerungen von *Stabdreiecken*, die nach Anleitung der Beispiele 1 und 2 durch Rechnung oder durch Zeichnung zu bestimmen sind. In abweichenden Fällen sind Rechnungen auszuführen, die an zwei Beispielen erklärt werden mögen.

Beispiel 6. Aus den gegebenen Stabdehnungen des in Abb. 14 dargestellten Fachwerks sind die neun Drehungsgewichte α der Kette 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1 zu berechnen. Die sechs Drehungsgewichte $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$ ergeben sich aus Winkeländerungen von Stabdreiecken. Die übrigen drei

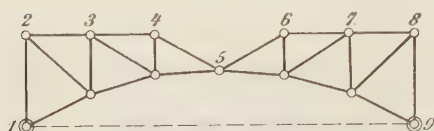


Abb. 14.

Gewichte $\alpha_1, \alpha_5, \alpha_9$ werden nach Gleichung 8) bestimmt durch die drei Formänderungsbedingungen der geschlossenen Kette. Damit die Bedingung

$$\sum v \alpha = \sum u \beta$$

jedesmal nur eine Unbekannte enthalte, legt man die Achse v zuerst auf die Gerade 1, 9, darauf auf die Gerade 8, 9 und das dritte Mal auf die Gerade 1, 2. Die dritte Gleichung kann durch die Bedingung

$$\sum \alpha = 0$$

ersetzt werden.

Um weniger einfache Aufgaben zu bilden, muß man, wie im nächsten Beispiel, Anordnungen des Fachwerks wählen, die in der Praxis nicht vorkommen.

Beispiel 7. Aus den gegebenen Stabdehnungen sind die Drehungsgewichte der Kette 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1 (Abb. 15) zu berechnen. Die vier Drehungsgewichte $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6$ ergeben sich aus den Winkeländerungen der Stabdreiecke. Da die drei Formänderungsbedingungen der geschlossenen Kette nicht genügen, um die vier übrigen Drehungsgewichte $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_8$ zu bestimmen, so muß

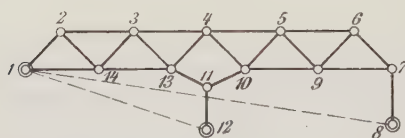


Abb. 15.

eine Winkeländerung, z. B. die Änderung des Winkels 10, 4, 13 zunächst unbestimmt bleiben und als Unbekannte x in die Rechnung eingeführt werden. Dann ergeben sich die drei Gewichte $\alpha_1, \alpha_7, \alpha_8$ als Funktionen

von x . Man bestimmt ferner aus den Formänderungsbedingungen der geschlossenen Kette 4, 10, 11, 13 die Änderung des Winkels 4, 13, 11 ebenfalls als Funktion von x .

Bildet man darauf die Bedingung

$$\sum v \alpha = \sum u \beta$$

für die geschlossene Kette 1, 14, 13, 11, 12, indem man die Achse v auf die Gerade 11, 12 legt, so enthält diese Gleichung die Größe x als einzige Unbekannte.

Die Berechnung der Gelenkverschiebungen. Nachdem alle Drehungsgewichte α bestimmt worden sind, können die Gelenkverschiebungen vermittle der Gleichungen 5) berechnet werden. Um die Rechnung in tabellarischer Form ausführen zu können, empfiehlt es sich, die Gleichungen 5) in folgender Weise umzuformen.

Wir bezeichnen zu diesem Zweck in Abb. 16 die Projektionen der Gliedstrecken $l_1, l_2, l_3 \dots$ auf die beiden festen Achsen u, v mit $m_1, m_2, m_3 \dots$ und $n_1, n_2, n_3 \dots$ und

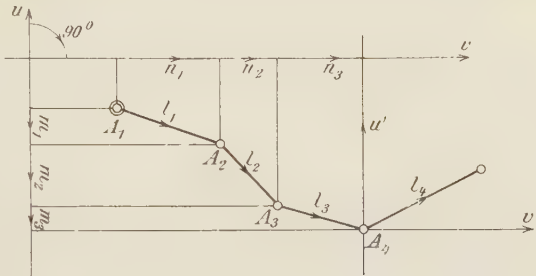


Abb. 16.

geben diesen Projektionen das positive Vorzeichen, wenn sie den Sinn der Achsen haben. Wir erinnern ferner daran, daß in den Gleichungen 5):

$$\begin{aligned} du_4 &= \Sigma^3 v\alpha - \Sigma^3 u\beta \\ dv_4 &= -\Sigma^3 u\alpha - \Sigma^3 v\beta, \end{aligned}$$

welche beispielsweise die Verschiebungen des Gelenkes A_4 in der Richtung und dem Sinne der positiven Abstände u, v bestimmen, die vier Momentensummen $\Sigma^3 u\alpha, \Sigma^3 v\alpha, \Sigma^3 u\beta, \Sigma^3 v\beta$ sich auf die beiden durch das Gelenk A_4 gelegten Achsen u', v' beziehen. Demgemäß ist

$$\begin{aligned} \Sigma^3 v\alpha &= + (m_1 + m_2 + m_3) \alpha_1 + (m_2 + m_3) \alpha_2 + m_3 \alpha_3 \\ \Sigma^3 u\alpha &= - (n_1 + n_2 + n_3) \alpha_1 - (n_2 + n_3) \alpha_2 - n_3 \alpha_3 \\ \Sigma^3 u\beta &= - (n_1 + n_2 + n_3) \beta_1 - (n_2 + n_3) \beta_2 - n_3 \beta_3 \\ \Sigma^3 v\beta &= + (m_1 + m_2 + m_3) \beta_1 + (m_2 + m_3) \beta_2 + m_3 \beta_3. \end{aligned}$$

Beachtet man ferner die früher eingeführten Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_1, & \gamma_2 &= \alpha_1 + \alpha_2, & \gamma_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \dots \\ \delta_1 &= \beta_1, & \delta_2 &= \beta_1 + \beta_2, & \delta_3 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \dots \end{aligned}$$

so ergibt sich für das Gelenk A_4 :

$$\begin{aligned} du_4 &= m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 + m_3 \gamma_3 + n_1 \delta_1 + n_2 \delta_2 + n_3 \delta_3 \\ dv_4 &= n_1 \gamma_1 + n_2 \gamma_2 + n_3 \gamma_3 - m_1 \delta_1 - m_2 \delta_2 - m_3 \delta_3 \end{aligned}$$

oder allgemein für das Gelenk A_z :

$$\begin{aligned} du_z &= \Sigma^z m \gamma + \Sigma^z n \delta \\ dv_z &= \Sigma^z n \gamma - \Sigma^z m \delta \end{aligned} \quad (11)$$

Die Summen erstrecken sich auf alle Glieder, die zwischen dem festen Anfangsgelenk A_1 und dem Gelenk A_z liegen. Indem

man die Werte $m\gamma$, $n\gamma$, $m\delta$, $n\delta$ in einer Zahlentafel zusammenstellt, erhält die Rechnung eine übersichtliche, bequeme Form.

Man kann die Rechnung zum Teil durch die Zeichnung ersetzen, indem man die Strecken $l\gamma$ und $l\delta$ *geometrisch* summiert. Dieses graphische Verfahren gewährt jedoch keine Zeitersparnis und ist wegen seiner ungenügenden Genauigkeit nicht zu empfehlen. Ebenso wenig empfehlenswert ist die Bestimmung der Momentensummen $\Sigma u\alpha$, $\Sigma v\alpha$, $\Sigma u\beta$, $\Sigma v\beta$ durch Seilpolygone.

8. Die Stabkräfte der überzähligen Stäbe eines zusammengesetzten Fachwerks. Durch Beseitigung der überzähligen Stäbe 1', 2', 3' . . . eines *zusammengesetzten* Fachwerks (Abb. 17) entsteht ein *einfaches* Fachwerk. Wenn in dieses einfache Fachwerk *einer* der überzähligen Stäbe, z. B. der Stab 1' wieder eingefügt und mit der Stabkraft $+1$ angespannt wird, so entstehen Stabkräfte x' , die an jedem Knoten eine Gleichgewichtsgruppe bilden. Erteilt man den Knoten willkürlich gewählte, unendlich kleine Verschiebungen, wobei die Stablängen l um dl sich verändern, so gilt nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten für jede solche Formänderung des Fachwerks die Bedingung

$$\Sigma' x' dl = 0. \quad (12)$$

Das Zeichen Σ' deutet an, daß die Summe sich erstreckt auf alle Stäbe des einfachen Fachwerks und auf den *einen* überzähligen Stab 1', für den die Stabkraft gleich $+1$ angenommen wurde. Die Aenderung der Länge l' dieses überzähligen Stabes hat daher die Größe

$$dl' = - \Sigma x' dl, \quad (13)$$

wenn die Summe Σ auf die Stäbe des *einfachen* Fachwerks bezogen wird. Diese Gleichung gilt für jede Formänderung des Fachwerks, also auch dann, wenn das Verhältnis $\frac{l'}{dl}$ für alle Stäbe denselben Wert hat, d. h. wenn das Fachwerk seiner ursprünglichen Form geometrisch ähnlich bleibt. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit diesem Verhältnis, so ergibt sich die Beziehung zwischen der Länge l' des überzähligen Stabes 1' und den Stablängen l des einfachen Fachwerks

$$l' = - \Sigma x' l. \quad (14)$$

Mit großer Annäherung gelten die Gleichungen 13) und 14) auch für die sehr kleinen Längenänderungen

$$\Delta l = \frac{Sl}{\epsilon F} + l \delta t = S r + l \delta t, \quad (15)$$

die bei einer gegebenen Belastung $P_1, P_2, P_3 \dots$ durch die Stabkräfte S und im Vergleich mit dem spannungslosen Zustande durch die Temperaturänderungen t erzeugt werden. Das Fachwerk möge beispielsweise *drei* überzählige Stäbe $1', 2', 3'$ enthalten, deren Stabkräfte S', S'', S''' als Lasten des einfachen Fachwerks angesehen werden. Die unbekannten Lasten S', S'', S''' und die gegebenen Lasten $P_1, P_2, P_3 \dots$ erzeugen in den Stäben des *einfachen* Fachwerks Stabkräfte von der Größe

$$S = \kappa' S' + \kappa'' S'' + \kappa''' S''' + \kappa_1 P_1 + \kappa_2 P_2 + \dots \quad (16)$$

Die Einflußzahlen κ können in bekannter Weise durch Rechnung oder durch Zeichnung bestimmt werden und gelten hier als bekannte Größen. Aus der Verbindung der Gleichung 13) mit den Gleichungen 15) und 16) entsteht eine der drei Bedingungen, die zur Bestimmung der drei unbekannten Stabkräfte S', S'', S''' dienen:

$$\left. \begin{aligned} \Delta l' &= l' \delta t' + S' r' = -\Sigma \kappa' l' \delta t - S' \Sigma \kappa'^2 r - S'' \Sigma \kappa' \kappa'' r \\ &\quad - S''' \Sigma \kappa' \kappa''' r - P_1 \Sigma \kappa' \kappa_1 r - P_2 \Sigma \kappa' \kappa_2 r - \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Sämtliche Summen in dieser Gleichung erstrecken sich nur auf die Stäbe des *einfachen* Fachwerks. Die beiden anderen Bedingungen können ohne weiteres der Gleichung 17) nachgebildet werden.

Die Gleichung 17) drückt aus, daß die Längenänderung $\Delta l'$ der Stabstrecke l' des beseitigten überzähligen Stabes $1'$ auf zwei voneinander unabhängigen Wegen berechnet werden kann. Auf der *linken* Seite der Gleichung wird $\Delta l'$ nach Gleichung 15) bestimmt aus der Stabkraft S' und der Temperaturänderung t' des Stabes $1'$. Auf der *rechten* Seite wird die Strecke $\Delta l'$ zerlegt in eine Reihe von Teilstrecken, die von den Stabtemperaturen t und von den Lasten $S', S'', S''', P_1, P_2 \dots$ des einfachen Fachwerks erzeugt werden. Demnach bestimmt z. B. die Summe $\Sigma \kappa' \kappa_1 r$ die Aenderung der Länge l' , die von einer Last $P_1 = 1$ herbeigeführt wird. Folglich ist $-1 \text{ kg } \Sigma \kappa' \kappa_1 r$ die Arbeit der beiden Kräfte $S' = 1 \text{ kg}$ bei der von der Last $P_1 = 1 \text{ kg}$ erzeugten Formänderung des Fachwerks. Ebenso groß ist nach dem Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen (Abhandlung XII, 17) die Arbeit der Last $P_1 = 1 \text{ kg}$ bei der von den beiden Lasten $S' = 1 \text{ kg}$ herbeigeführten Formänderung des einfachen Fachwerks. In gleicher Weise bezeichnen die mit -1 kg multiplizierten Summen

$$S' \Sigma \kappa'^2 r, \quad S'' \Sigma \kappa' \kappa'' r, \quad S''' \Sigma \kappa' \kappa''' r, \quad P_2 \Sigma \kappa' \kappa_2 r \dots$$

die bei der genannten Formänderung des Fachwerks von den Lasten $S', S'', S''', P_2 \dots$ geleisteten Arbeiten.

Für die Bildung der Gleichung 17) ergibt sich hiernach der folgende Rechnungsgang. Man bildet aus den Fachwerkstäben, deren Gelenke die Lasten S und P aufnehmen, eine Kette. Um die Formänderung dieser Kette zu bestimmen, sind zunächst die Stabkräfte und die Stabdehnungen zu berechnen, die von den beiden Lasten $S' = 1$ kg in dem einfachen Fachwerk erzeugt werden. Hieraus ergeben sich die Dehnungsgewichte β und die Drehungsgewichte α der Kettengelenke und endlich die Gelenkwege, welche die in Gleichung 17) vorkommenden Summen bestimmen. Eine besondere Rechnung erfordert die Bildung der Summe $\Sigma x' l \delta t$. Wenn die Temperaturänderungen t der Stäbe *verschiedene* Werte haben, so läßt sich die Berechnung dieser Summe nicht vereinfachen. Hat dagegen δt für alle Stäbe des einfachen Fachwerks denselben Wert, so ist nach Gleichung 14)

$$-\Sigma x' l \delta t = -\delta t \Sigma x' l = +l' \delta t.$$

Ist die Temperaturänderung t' des überzähligen Stabes $1'$ auch gleich t , so heben sich die Glieder $l' \delta t$ auf beiden Seiten der Gleichung 17), d. h. im Fachwerk entstehen *keine* Stabkräfte, wenn die Dehnungen aller Stäbe gleich groß sind.

Durch Auflösung der drei Bedingungen von der Form der Gleichungen 17) ergeben sich die Stabkräfte S' , S'' , S''' der drei überzähligen Stäbe als Funktionen der gegebenen Lasten P und der Temperaturänderungen t . In einzelnen Fällen ist es möglich, als überzählige Stäbe *starre Stützstäbe* auszuwählen und diese so anzuordnen, daß die Arbeiten $S'' \Sigma x' x'' r$ und $S''' \Sigma x' x''' r$ gleich null werden. Dann wird auf der linken Seite der Gleichungen 17) das Glied $S' r'$ gleich null, und die rechte Seite enthält als einzige Unbekannte die Stabkraft S' .

Beispiel 8. Für das in Abb. 17 dargestellte Bogenfachwerk sind in bezug auf die Stabkraft S' des überzähligen Stabes $1'$ die Einflußzahlen der lotrechten, nach unten zeigenden Lasten V und der wagerechten, nach rechts zeigenden Lasten U der oberen Gurtung zu berechnen. Von der Einwirkung der Temperatur und den Aenderungen der Stützenlage soll in diesem Beispiel abgesehen werden (vergl. XII, 20).

Die vier Knoten A_1 , A_2 , A_6 , A_7 sind *fest* gelagert. Um der Gleichung 17) eine Form zu geben, in der die Stabkraft S' als *einzige* Unbekannte erscheint, sind die beiden festen Lager A_6 , A_7 beseitigt und durch die punktierten, undehnbaren Stützstäbe ersetzt worden. Die Endpunkte B_1 , B_2 , B_3 der mit $1'$, $2'$, $3'$ bezeichneten

Gleichungen 11) ausgeführt werden kann. Die Größen $\frac{du_3}{du_7}$, $\frac{dv_3}{du_7}$, $\frac{du_4}{du_7}$. . . bestimmen die Einflußzahlen der Lasten U , V in bezug auf die Stabkraft S' des überzähligen Stabes 1'.

Die folgende Zahlentafel enthält die Stablängen l , die Stabquerschnitte F , die durch einen Kräfteplan bestimmten Zahlen α' , d. h. die von der Last $S' = +1$ kg erzeugten Stabkräfte und die Stabdehnungen

$$\delta = \frac{\alpha'}{\varepsilon F}.$$

Das Elastizitätsmaß ε ist gleich 2 000 000 kg/qcm angenommen.

	l cm	F qcm	α' $\frac{1 \text{ kg}}{10^3}$	δ $\frac{1}{10^{10}}$
$A_1 A_2$ und $A_7 A_6$	—	—	—	0
$A_1 A_{12}$ und $A_7 A_9$	400	50	— 1264	— 126
$A_2 A_{12}$ und $A_6 A_9$	313	20	— 1554	— 388
$A_2 A_3$ und $A_6 A_5$	500	50	+ 1700	+ 170
$A_3 A_{12}$ und $A_5 A_9$	313	20	+ 72	+ 18
$A_{11} A_{12}$ und $A_{10} A_9$	400	50	— 2596	— 260
$A_3 A_{11}$ und $A_5 A_{10}$	313	20	— 1370	— 343
$A_3 A_4$ und $A_5 A_4$	500	50	+ 2650	+ 265
$A_4 A_{11}$ und $A_4 A_{10}$	313	20	— 804	— 201
$A_{10} A_{11}$	400	50	— 3072	— 307

Nach Anleitung des Beispiels 1 ergaben sich aus den Stabdehnungen δ die Aenderungen der folgenden Dreieckswinkel:

$$\begin{array}{ll}
 A_1 A_2 A_{12} \text{ und } A_7 A_6 A_9 : & + 113 \quad 10^{-10} \\
 A_{12} A_2 A_3 \text{ und } A_9 A_6 A_5 : & - 319 \quad 10^{-10} \\
 A_2 A_3 A_{12} \text{ und } A_6 A_5 A_9 : & - 625 \quad 10^{-10} \\
 A_{12} A_3 A_{11} \text{ und } A_9 A_5 A_{10} : & - 162 \quad 10^{-10} \\
 A_{11} A_3 A_4 \text{ und } A_{10} A_5 A_4 : & - 661 \quad 10^{-10} \\
 A_{11} A_4 A_3 \text{ und } A_{10} A_4 A_5 : & - 767 \quad 10^{-10} \\
 A_{11} A_4 A_{10} & : - 176 \quad 10^{-10}.
 \end{array}$$

Da diese Winkel *rechts* von der Kette $A_1 A_2 A_3 A_4 \dots$ liegen, so erhalten die Drehungsgewichte der Kettengelenke die folgenden Werte in 10^{-10} als Einheit:

$$\alpha_1 = \alpha_7 = 0$$

$$\alpha_2 = \alpha_6 = -113 + 319 = +206$$

$$\alpha_3 = \alpha_5 = +625 + 162 + 661 = +1448$$

$$\alpha_4 = +767 + 176 + 767 = +1710$$

$$\alpha_8 = -206 - 1448 - 1710 - 1448 - 206 = -5018.$$

Man beachte, daß α_1 und α_7 gleich null sind, weil die Gelenke A_1 , A_2 und A_8 sich nicht bewegen, und weil das Dreieck $A_6 A_7 A_8$ aus starren Stäben besteht. Die folgende Zahlentafel (S. 502) enthält die nach den Gleichungen 11) ausgeführte Berechnung der Gelenkwege du und dv :

$$du = \sum m \gamma + \sum n \delta$$

$$dv = \sum n \gamma - \sum m \delta.$$

Die Strecken m und n sind aus der Zeichnung und die Werte δ aus der ersten Zahlentafel entnommen. Die Verschiebungen des Gelenkes A_8 :

$$du_8 = -2813 + 5,018 m_7$$

$$dv_8 = +4004 + 5,018 n_7$$

werden gleich null, d. h. A_8 wird der augenblickliche Drehpunkt des starren Gliedes $A_6 A_7 A_8$, wenn

$$m_7 = + \frac{2813}{5,018} = +560 \text{ cm}$$

und

$$n_7 = - \frac{4004}{5,018} = -798 \text{ cm.}$$

gewählt wird, wie es in der Zeichnung geschehen ist. Der Symmetrie wegen muß das Gelenk A_8 auf der lotrechten Symmetrieachse des Fachwerks liegen, was durch die vorstehende Rechnung bestätigt wird, denn es ist

$$n_7 = -n_6 - n_5 - n_4 = +73 - 384 - 487 = -798.$$

Werden die Werte der Verschiebungen du und dv in die Gleichung 18) eingesetzt, so ergeben sich die Einflußzahlen der Lasten U , V in bezug auf die Stabkraft S' :

$$S' = -\frac{1}{2813} (+131 U_3 + 25 V_3 + 450 U_4 + 800 V_4 + 192 U_5 \\ + 2468 V_5 - 1283 U_6 + 4370 V_6 - 2813 U_7 + 4004 V_7)$$

oder

$$1000 S' = -47 U_3 - 9 V_3 - 160 U_4 - 284 V_4 - 68 U_5 \\ - 877 V_5 + 456 U_6 - 1554 V_6 + 1000 U_7 - 1423 V_7.$$

Gelenk	m cm	n cm	a 10-10	$\gamma = \Sigma a$ 10-10	δ 10-10	$m\gamma$ 10-7 cm	$\Sigma m\gamma$ 10-7 cm	$n\delta$ 10-7 cm	$\Sigma m\delta$ 10-7 cm	$n\gamma$ 10-7 cm	$\Sigma n\gamma$ 10-7 cm	$n\delta$ 10-7 cm	$\Sigma n\delta$ 10-7 cm	$du =$ $+\Sigma m\gamma$ $+\Sigma n\delta$	$dv =$ $+\Sigma n\gamma$ $-\Sigma m\delta$ 10-7 cm
A_1	+305	-73	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
A_2	+320	+384	+206	+206	+170	+66	0	+54	+54	+79	0	+65	0	0	0
A_3	+115	+487	+1448	+1634	+265	+190	+66	+30	+54	+805	+79	+129	+65	-131	+25
A_4	-115	+487	+1710	+3304	+265	-387	+256	+84	+84	+1638	+884	+129	+194	+450	+800
A_5	-320	+384	+1448	+4812	+170	-1540	-131	-54	-54	+1848	+2522	+65	+323	+192	+2468
A_6	-305	-73	0	+5018	0	-1530	-1671	0	0	-366	+4370	0	+388	-1283	+4370
A_7	m_7	n_7	0	+5018	0	+5,018 m_7	-3201	0	0	+5,018 n_7	+4004	0	+388	-2813	+4004
A_8						-3201 +5,018 m_7					+4004 +5,018 n_7		+388 -2813	-2813 +5,018 m_7	+4004 +5,018 n_7

Das vorstehende Beispiel ist auf einem anderen Wege in der Abhandlung XII, Abschnitt 20 berechnet worden. Die Rechnung beschränkte sich dort auf den Einfluß der Lasten V_3 , V_4 , V_5 und ergab

$$1000 S' = -10 V_3 - 284 V_4 - 876 V_5.$$

Die geringen Abweichungen von den obigen Ergebnissen sind durch Abrundung der letzten Zahlenstelle entstanden.

9. Die elastische Linie des geraden Balkens. Die in der Abhandlung X gegebene Theorie der elastischen Linie, die hier als bekannt vorausgesetzt wird, steht in naher Beziehung zu der in den vorstehenden Abschnitten enthaltenen Darstellung der kleinen Kettenbewegungen. Wir erklären diese Beziehungen an dem folgenden Beispiel.

Beispiel 9. In der Abb. 18 ist $ABCDE$ die elastische Linie eines in den Punkten A und E gestützten geraden Balkens, dessen Bieugungsmomente durch ein Trapez dargestellt werden. Die Bieugungsmomente in den Punkten A und E sind

$$M_1 = +24 \cdot 10^5 \text{ cm} \cdot \text{kg} \quad \text{und} \quad M_2 = -18 \cdot 10^5 \text{ cm} \cdot \text{kg}.$$

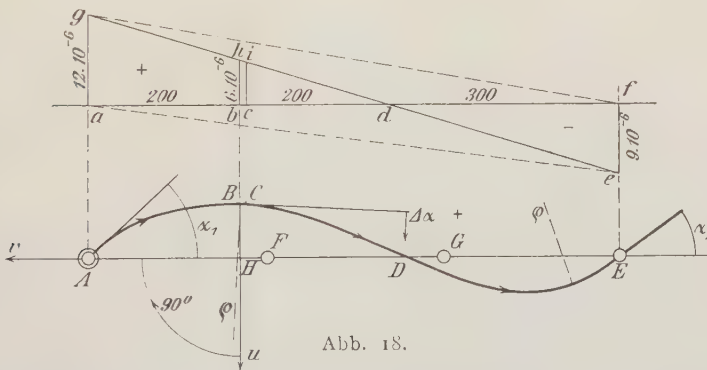


Abb. 18.

Das Trägheitsmoment J des Balkenquerschnitts hat die unveränderliche Größe 10^5 cm^4 , und das Elastizitätsmaß ϵ ist gleich $2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Die Größe $\frac{M}{\epsilon J}$ ist also im Punkte A gleich

$$ag = + \frac{24 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{11}} = + \frac{12 \cdot 10^{-6}}{1 \text{ cm}}$$

und im Punkte E gleich

$$fe = - \frac{18 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{11}} = - \frac{9 \cdot 10^{-6}}{1 \text{ cm}}.$$

Die elastische Linie kann angesehen werden als ein Seil oder eine Kette aus sehr kurzen undehnbaren Gliedern, z. B. von der Länge

$$BC = As = 10 \text{ cm.}$$

Wir geben der Kette nach Belieben den durch Pfeile angedeuteten Sinn $ABC \dots$. Bei der Biegung des Balkens dreht sich jedes Kettenglied BC gegen das im Sinne der Kette nächst vorhergehende Glied um einen Winkel

$$\Delta\alpha = \frac{MAs}{\epsilon J}$$

(vergl. Abhandlung IX, Gleichung 2). Von dem Sinne der Kette und von der Lage des Krümmungshalbmessers ϱ gegen die Kette ist das gemeinschaftliche Vorzeichen der Größen M und $\Delta\alpha$ abhängig. Liegt ϱ *rechts* von der Kette, wie z. B. im Punkte B , so dreht sich das Glied BC gegen das nächst vorhergehende Glied im Sinne des Uhrzeigers. Daher haben in diesem Falle M und $\Delta\alpha$ *positive* Werte. Liegt ϱ dagegen links von der Kette, wie an dem Kettenteil DE , so sind M und $\Delta\alpha$ *negativ*. Im Punkte B ist

$$\frac{M}{\epsilon J} = + \frac{6 \cdot 10^{-6}}{1 \text{ cm}}.$$

Das Glied BC von 10 cm Länge dreht sich also gegen das nächst vorhergehende Glied im Sinne des Uhrzeigers um den durch die Fläche *beih* dargestellten Winkel

$$\Delta\alpha = \frac{MAs}{\epsilon J} = + 6 \cdot 10^{-5}.$$

Demnach werden die *Drehungsgewichte* der Kettengelenke durch die Größen $\Delta\alpha$ dargestellt. Die Kette $ABCDE$ kann durch das starre Glied EA geschlossen werden. Da die Kettenglieder bei der Biegung des Balkens sich nicht *dehnen*, so bilden die Drehungsgewichte α_1 und α_2 der beiden Gelenke A und E mit den Drehungsgewichten $\Delta\alpha$ aller übrigen Gelenke eine *Gleichgewichtsgruppe*. Hierbei ist zu beachten, daß die Gelenke *vor* der Bewegung alle auf der Geraden AE lagen, und daß das Gleichgewicht auf *diese* Lage der Gelenke sich bezieht. Um die Drehungsgewichte α_1 , α_2 der Gelenke A , E aus den Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen, kann man die Gewichte $\Delta\alpha$ der ganzen Balkenlänge $AE = 700 \text{ cm}$ ersetzen durch *zwei* Gewichte α_3 und α_4 der beiden Punkte F , G , welche die Länge AE in drei gleiche Teile zerlegen:

$$\alpha_3 = + \frac{1}{2} 700 \cdot 12 \cdot 10^{-6} = + 420 \cdot 10^{-5}$$

$$\alpha_4 = - \frac{1}{2} 700 \cdot 9 \cdot 10^{-6} = - 315 \cdot 10^{-5},$$

denn die Ordinaten des Trapezes $agdef$ bilden die geometrischen Summen der Ordinaten der beiden Dreiecke agf und afe . Das Gleichgewicht der vier Gewichte $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_2$ fordert:

$$\alpha_1 = -\frac{2}{3} \alpha_3 - \frac{1}{3} \alpha_4 = -175 \cdot 10^{-5}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{3} \alpha_3 - \frac{2}{3} \alpha_4 = +70 \cdot 10^{-5}.$$

Die Drehungsgewichte α_1 und α_2 bezeichnen die beiden Winkel, welche die Tangenten der elastischen Linie in den Punkten A und E mit der Geraden AE einschließen. Die *Gelenkwege*, z. B. der Weg HB , den das Gelenk B bei der Biegung des Balkens beschreibt, werden durch die Gleichungen 9):

$$du = \Sigma v \alpha, \quad dv = -\Sigma u \alpha$$

bestimmt. Diese Gleichungen beziehen sich auf zwei Achsen u, v , die durch die ursprüngliche Lage H des Gelenkes B gelegt sind, und auf alle Drehungsgewichte, die zwischen dem festen Anfangsgelenk A und dem Gelenk H liegen. Da sämtliche Gelenke vor der Bewegung auf der Achse v liegen, so ist

$$du = \Sigma v \alpha = 0,$$

d. h. das Gelenk B bewegt sich auf der lotrechten Geraden HB . Die Summe $\Sigma u \alpha$ bezeichnet in bezug auf die Achse u die Momentensumme des Gewichtes α_1 und der zwischen A und H liegenden Gewichte $\Delta \alpha$, die durch das Trapez $abhg$ dargestellt werden. Da $\alpha_1 = -175 \cdot 10^{-5}$, $ab = 200$ cm, $ag = +12 \cdot 10^{-6}$, $bh = +6 \cdot 10^{-6}$ ist, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Sigma u \alpha = & -200 \cdot 175 \cdot 10^{-5} + \frac{1}{2} 200 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \frac{2}{3} \cdot 200 \\ & + \frac{1}{2} 200 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \frac{200}{3} \end{aligned}$$

und

$$HB = -\Sigma u \alpha = +0,15 \text{ cm.}$$

Die vorstehenden Rechnungen sind genau in derselben Form auszuführen, wenn man nach Anleitung der Abhandlung X die elastische Linie als ein Seil ansieht, das die lotrechten Lasten

$$\Delta \alpha = \frac{M \Delta s}{\epsilon J}$$

trägt, und dessen Seilkräfte eine wagerechte Projektion gleich der Zahl *eins* haben. Die folgenden Abschnitte enthalten weitere Anwendungen der hier gegebenen Darstellung.

10. Die Berechnung der Pfostenträger. Ein Pfostenträger entsteht aus einem Fachwerk mit viereckigen Fächern, wenn die *Diagonalstäbe* beseitigt werden. Er besteht also aus zwei Gurtungen und starr mit ihnen verbundenen Pfosten. Die Steifigkeit der Knoten hat die Funktionen der Stabkräfte der beseitigten Diagonalstäbe zu übernehmen.

Die Stabkräfte S , die Querkräfte Q und die Knotenmomente K . Von einem unbelasteten Stabe $A_3 A_4$ (Abb. 19) werden, wenn von seinem Eigengewicht abgesehen wird, auf die beiden Knoten A_3 und A_4 zwei zusammenfallende Kräfte R_{34} und R_{43} übertragen, die der Größe nach gleich, dem Sinne nach verschieden sind. Durch die in der Zeichnung angegebene Zerlegung kann R_{34} durch die beiden Kräfte S_{34}' und Q_{34} und darauf S_{34}' durch die Kraft S_{34} in

Verbindung mit dem Kräftepaar (S_{34}', S_{34}'') ersetzt werden. Das Kräftepaar hat das Moment

$$K_{34} = a_{34} S_{34}. \quad (19)$$

Der Stab $A_3 A_4$ überträgt demnach auf den Knoten A_3 die mit der Stabachse zusammenfallende Stabkraft S_{34} , die zur Stabachse normal gerichtete Querkraft Q_{34} und das Knotenmoment K_{34} . Ebenso überträgt dieser Stab auf seinen zweiten Knoten A_4 die Stabkraft S_{43} , die Querkraft Q_{43} und das Knotenmoment

$$K_{43} = a_{43} S_{43}. \quad (20)$$

Die Vorzeichen der unbekannten Größen S , K und Q . Die beiden gleichen und entgegengesetzten Stabkräfte S_{34} und S_{43} erhalten das *positive* Vorzeichen, wenn der Stab *gezogen* wird. Den nach Größe und Sinn voneinander unabhängigen Knotenmomenten

K_{34} und K_{43} soll das *positive* Vorzeichen beigelegt werden, wenn sie den Sinn der Uhrzeigerbewegung haben, also *rechtsdrehend* sind. Wie in jeder algebraischen Rechnung sind die unbekannten Größen S und K mit dem positiven Vorzeichen einzuführen, wie es in der Zeichnung geschehen ist. Die Kräfte (S_{34}', S_{34}'') und (S_{43}', S_{43}'') bilden demnach *rechtsdrehende* Kräftepaare, und da die vier Kräfte $S_{34}', Q_{34}, S_{43}', Q_{43}$ eine Gleichgewichtsgruppe bilden, so ist (Q_{34}, Q_{43}) ein *linksdrehendes* Kräftepaar von der Größe

$$Q_{34} l_{34} = S_{34} (a_{34} + a_{43}) = K_{34} + K_{43}.$$

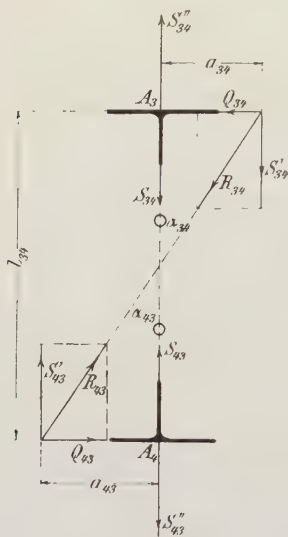


Abb. 19.

Die von einem Stabe $A_3 A_4$ auf seine beiden Knoten zu übertragenden Querkräfte haben demnach im Sinne eines *linksdrehenden* Kräftepaares die *algebraische* Größe

$$Q_{34} = Q_{43} = \frac{K_{34} + K_{43}}{l_{34}}. \quad (21)$$

Ist die algebraische Summe $K_{34} + K_{43}$ *negativ*, so dreht das Kräftepaar Q_{34}, Q_{43} im Sinne des Uhrzeigers. Da sonach die Querkräfte Q durch die Knotenmomente K ohne weiteres bestimmt werden, so bringt jeder Stab $A_3 A_4$ nur *drei* unbekannte Größen S_{34}, K_{34}, K_{43} in die Rechnung.

Die Biegemomente M der Stäbe. Wir geben der Stabstrecke $A_3 A_4$ den durch die Zahlenfolge bestimmten, von A_3 nach A_4 zeigenden Sinn. Um den entsprechenden Sinn der Biegemomente und die Vorzeichen der Drehungsgewichte

$$d\alpha = \frac{M ds}{\varepsilon J} \quad (22)$$

festzustellen, sind die Kräfte in Betracht zu ziehen, die *von den Knoten A_3, A_4 auf den Stab $A_3 A_4$ übertragen werden*. Es ist also der Sinn aller Kräfte der Abb. 19 zu wenden, wie es in Abb. 20 geschehen ist. Aus dem Sinn der Kräfte erkennt man, daß der gebogene Stab die in der Zeichnung angegebene Form annimmt, wenn die Knotenmomente K_{34} und K_{43} *positive* Werte haben. Nach den Bestimmungen des Abschnitts 9 ist dem Biegemoment M eines Stabquerschnitts das *positive* Vorzeichen beizulegen, wenn der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie *rechts* von der Kette $A_3 A_4$ liegt. Demgemäß haben die Biegemomente M_{34} und M_{43} an den Stabenden A_3, A_4 die algebraischen Größen

$$M_{34} = +K_{34} \quad \text{und} \quad M_{43} = -K_{43}. \quad (23)$$

Die Drehungsgewichte α_{34} und α_{43} des Stabes $A_3 A_4$. Wir nehmen hier zunächst an, daß die Stäbe von *prismatischer* Form sind, daß also die Größe

$$\varphi_{34} = \frac{l_{34}}{2 \varepsilon J} \quad (24)$$

auf der ganzen Länge l_{34} des Stabes unveränderlich ist. Da die graphische Darstellung der Biegemomente M von der *Trapezfläche* zwischen den Achsen der Kräfte S_{34} und R_{34} (Abb. 19) ge

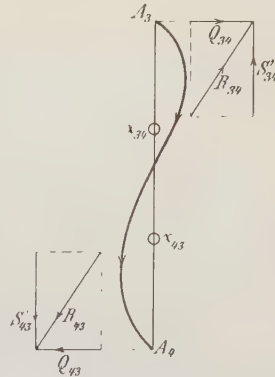


Abb. 20.

bildet wird, so können die Drehungsgewichte $d\alpha$ der ganzen Stablänge ersetzt werden durch *zwei* Gewichte:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{34} &= \frac{M_{34} l_{34}}{2 \varepsilon J} = \varphi_{34} M_{34} = + \varphi_{34} K_{34} \\ \alpha_{13} &= \frac{M_{43} l_{34}}{2 \varepsilon J} = \varphi_{34} M_{43} = - \varphi_{34} K_{43} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

deren Angriffspunkte die Stablänge in drei gleiche Teile zerlegen:

$$A_3 \alpha_{34} = \alpha_{34} \alpha_{43} = \alpha_{43} A_4.$$

Die Dehnungen der Stäbe. Die von den Stabkräften S erzeugten Dehnungsgewichte β sind im Vergleich mit den Drehungsgewichten α in der Regel verschwindend klein und brauchen daher bei der Bestimmung der Formänderung des Trägers nicht berücksichtigt zu werden.

Auch die Einwirkungen der Temperaturänderungen sind sehr gering, wie in einem der folgenden Abschnitte an einem Zahlenbeispiel gezeigt wird. Vorläufig nehmen wir an, daß der unbelastete Träger spannungslos ist, und daß Temperatureinwirkungen nicht zu berücksichtigen sind.

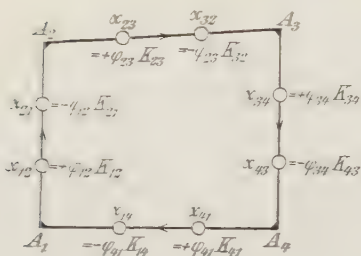


Abb. 21.

Die Formänderungsbedingungen.

Jedes viereckige Fach $A_1 A_2 A_3 A_4$ des Trägers bildet eine geschlossene Kette aus unendlich vielen undehnbaren Gliedern ds , deren Drehungsgewichte durch die acht Gewichte:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{12} &= + \varphi_{12} K_{12}, & \alpha_{21} &= - \varphi_{12} K_{21} \\ \alpha_{23} &= + \varphi_{23} K_{23}, & \alpha_{32} &= - \varphi_{23} K_{32} \\ \alpha_{34} &= + \varphi_{34} K_{34}, & \alpha_{43} &= - \varphi_{34} K_{43} \\ \alpha_{41} &= + \varphi_{41} K_{41}, & \alpha_{14} &= - \varphi_{41} K_{14} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

bestimmt werden. Hierbei ist vorausgesetzt, daß — wie es die Regel ist — die Lasten des Trägers *von den Knoten, nicht von den Stäben* aufgenommen werden. Diese acht Gewichte bilden eine Gleichgewichtsgruppe. Die Formänderungsbedingungen des Faches $A_1 A_2 A_3 A_4$ werden also ausgedrückt durch *drei* Momentengleichungen, welche fordern, daß die Momentensumme der acht Gewichte in bezug auf drei Achsen, die nicht durch einen Punkt gehen, gleich null sein müssen. Wird eine der Momentengleichungen auf die unendlich ferne Achse der Bildebene bezogen, so ergibt sich die Bedingung, daß die algebraische Summe der acht Drehungsgewichte gleich null sein muß.

Die Bestimmtheit der Aufgabe. Ein Pfostenträger mit f Fächern enthält $(2f + 2)$ Knoten und $(3f + 1)$ Stäbe. Wir nehmen an, daß außer den lotrechten und wagerechten Knotenlasten die Querschnittsabmessungen der Stäbe, also die Größen φ gegeben sind, und daß der Träger in statisch bestimmter Weise von einem festen und einem beweglichen Auflager gestützt ist. Die Gleichgewichtsgruppe der *äußeren* Kräfte enthält daher *drei* unbekannte Stützkkräfte, und da jeder Stab *drei* Unbekannte in die Rechnung bringt, so ist die Anzahl der Unbekannten:

$$3 + 3(3f + 1) = 9f + 6.$$

Zu ihrer Bestimmung ergeben sich für jeden Knoten *drei* Gleichgewichtsbedingungen und für jedes Fach *drei* Formänderungsbedingungen.

Die Anzahl der Bedingungsgleichungen

$$3(2f + 2) + 3f = 9f + 6$$

ist demnach ebenso groß wie die Anzahl der Unbekannten. Zur weiteren Erläuterung dienen die folgenden Zahlenbeispiele, die es gestatten, die Gesetzmäßigkeit des Rechnungsganges zur Anschauung zu bringen.

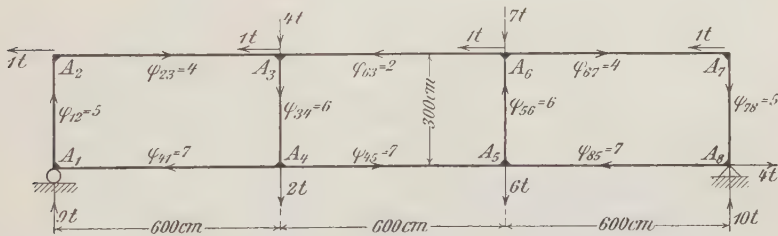


Abb. 22.

Beispiel 10. Der in Abb. 22 dargestellte Pfostenträger besteht aus ($f=3$) rechteckigen Fächern. Die Zeichnung enthält die Stablängen in Zentimeter, die lotrechten und wagerechten Knotenlasten und die hieraus berechneten Stützkkräfte in Tonnen. Die Werte

$$\varphi = \frac{l}{2 \cdot J}$$

sind in $\frac{1}{10^6 \text{ cm} \cdot \text{t}}$ als Einheit angegeben. Die Zahlenfolge der Knoten

bestimmt den Sinn der drei geschlossenen Ketten ($A_1 A_2 A_3 A_4$), ($A_3 A_4 A_5 A_6$), ($A_5 A_6 A_7 A_8$). Die Abb. 23 zeigt die auf jeden Knoten einwirkenden Kräfte mit Ausnahme der Momente K . Es ist hierbei zu beachten, daß die Querkkräfte Q an jedem Stabe ein *linksdrehendes*

Paar bilden. Die $(9f + 6 = 33)$ Bedingungsgleichungen können in drei Gruppen I, II und III zerlegt werden. Die $(4f + 4 = 16)$ Gleichungen der Gruppe I, die unmittelbar aus der Zeichnung abzulesen sind,

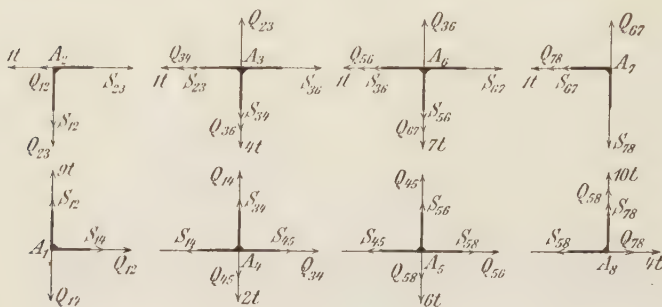


Abb. 23.

fordern, daß die Projektionen der Kräfte eines jeden der $(2f + 2 = 8)$ Knoten, bezogen auf die lotrechte und auf die waagrechte Achse,

gleich null sein müssen. Sie bestimmen die Stabkräfte S als Funktionen der Querkräfte Q und der gegebenen äußeren Kräfte:

- I 1) $S_{12} = + Q_{14} - 9,00 \text{ t}$
- I 2) $S_{14} = - Q_{12}$
- I 3) $S_{12} = - Q_{23}$
- I 4) $S_{23} = + Q_{12} + 1,00 \text{ t}$
- I 5) $S_{34} = + Q_{23} - Q_{36} - 4,00 \text{ t}$
- I 6) $S_{36} = + S_{23} + Q_{34} + 1,00 \text{ t} = + Q_{12} + Q_{34} + 2,00 \text{ t}$
- I 7) $S_{34} = - Q_{14} + Q_{45} + 2,00 \text{ t}$
- I 8) $S_{45} = + S_{14} - Q_{34} = - Q_{12} - Q_{34}$
- I 9) $S_{56} = - Q_{45} + Q_{58} + 6,00 \text{ t}$
- I 10) $S_{58} = + S_{45} - Q_{56} = - Q_{12} - Q_{34} - Q_{56}$
- I 11) $S_{56} = + Q_{36} - Q_{67} - 7,00 \text{ t}$
- I 12) $S_{67} = + S_{36} + Q_{56} + 1,00 \text{ t} = + Q_{12} + Q_{34} + Q_{56} + 3,00 \text{ t}$
- I 13) $S_{78} = + Q_{67}$
- I 14) $S_{67} = - Q_{78} - 1,00 \text{ t}$
- I 15) $S_{78} = - Q_{58} - 10,00 \text{ t}$
- I 16) $S_{58} = + Q_{78} + 4,00 \text{ t}$

Die Gleichungsgruppe II fordert, daß für jeden der $(2f + 2 = 8)$ Knoten die Momentensumme der auf ihn einwirkenden Kräfte null sein muß:

- II 1) $0 = K_{12} + K_{14}$
- II 2) $0 = K_{21} + K_{23}$
- II 3) $0 = K_{32} + K_{34} + K_{36}$
- II 4) $0 = K_{41} + K_{43} + K_{45}$
- II 5) $0 = K_{54} + K_{56} + K_{58}$
- II 6) $0 = K_{63} + K_{65} + K_{67}$
- II 7) $0 = K_{76} + K_{78}$
- II 8) $0 = K_{85} + K_{87}$

Die beiden Gruppen I und II bedingen das Gleichgewicht eines jeden Knotens, also auch das Gleichgewicht des ganzen Trägers, so daß die drei Stützkkräfte als Unbekannte eingeführt und *aus den obigen Gleichungen* berechnet werden könnten. Wählt man, wie es hier geschehen ist, den gewöhnlichen einfacheren Weg, so ist zu beachten, daß alsdann jene Gleichungen nicht voneinander unabhängig sind, und daß aus den $(4f + 4 = 16)$ Gleichungen der Gruppe I nach Beseitigung der $(3f + 1 = 10)$ Stabkräfte S und der drei Stützkkräfte nur $(4f + 4) - (3f + 1) - 3 = (f = 3)$ voneinander unabhängige Bedingungen abgeleitet werden können, die von den Querkraften Q zu erfüllen sind. Diese Bedingungen ergeben sich aus den Gleichungspaaren (1, 3), (5, 7), (9, 11) der Gruppe I:

$$0 = Q_{14} + Q_{23} - 9,00 \text{ t}$$

$$0 = Q_{14} + Q_{23} - Q_{36} - Q_{45} - 6,00 \text{ t}$$

$$0 = Q_{36} + Q_{45} - Q_{58} - Q_{67} - 13,00 \text{ t},$$

woraus folgt:

$$0 = Q_{14} + Q_{23} - 9,00 \text{ t}$$

$$0 = Q_{36} + Q_{45} - 3,00 \text{ t}$$

$$0 = Q_{58} + Q_{67} + 10,00 \text{ t}.$$

Diese Gleichungen drücken aus, daß für jeden lotrechten Schnitt die Querkraft des ganzen Trägers der Summe der Querkkräfte der beiden Gurtstäbe gleich sein muß. Wenn man nach Gleichung 21) die Querkkräfte Q durch die Knotenmomente K ersetzt, so entstehen die $(f = 3)$ Gleichungen der Gruppe Ia:

$$\text{Ia 1) } 0 = K_{41} + K_{32} + K_{14} + K_{23} - 5400 \text{ cm} \cdot \text{t}$$

$$\text{Ia 2) } 0 = K_{63} + K_{54} + K_{45} + K_{36} - 1800 \text{ cm} \cdot \text{t}$$

$$\text{Ia 3) } 0 = K_{85} + K_{76} + K_{58} + K_{67} + 6000 \text{ cm} \cdot \text{t}.$$

Die Gleichungsgruppe III besteht aus den $(3f = 9)$ Formänderungsbedingungen der $(f = 3)$ Fächer. In die Abb. 24 sind die Werte der Drehungsgewichte $\alpha = \varphi K$ und die Achsen 1, 2, 3 ... 8, 9 eingetragen, auf welche die Momentengleichungen III 1), III 2), III 3) ... III 8), III 9) sich beziehen:

$$\text{III 1) } 0 = + 7K_{41} - 4K_{32} + 8K_{23} - 14K_{14} + 15K_{12} - 15K_{21}$$

$$\text{III 2) } 0 = + 6K_{34} - 8K_{32} + 8K_{23} - 5K_{21} + 7K_{14} - 7K_{41}$$

$$\text{III 3) } 0 = + 18K_{34} - 18K_{43} + 14K_{41} - 8K_{32} + 4K_{23} - 7K_{14}$$

$$\text{III 4) } 0 = + 2K_{63} - 7K_{54} + 14K_{45} - 4K_{36} + 18K_{34} - 18K_{43}$$

$$\text{III 5) } 0 = - 6K_{65} + 4K_{63} - 4K_{36} + 6K_{34} - 7K_{45} + 7K_{54}$$

$$\text{III 6) } 0 = + 18K_{56} - 18K_{65} + 4K_{63} - 14K_{54} + 7K_{45} - 2K_{36}$$

$$\text{III 7) } 0 = + 7K_{85} - 4K_{76} + 8K_{67} - 14K_{58} + 18K_{56} - 18K_{65}$$

$$\text{III 8) } 0 = + 5K_{78} - 8K_{76} + 8K_{67} - 6K_{65} + 7K_{58} - 7K_{85}$$

$$\text{III 9) } 0 = + 15K_{78} - 15K_{87} + 14K_{85} - 8K_{76} + 4K_{67} - 7K_{58}.$$

Für die Berechnung der $(6f + 2 = 20)$ Knotenmomente K stehen demnach zur Verfügung: $(f = 3)$ Gleichungen der Gruppe Ia, $(2f + 2 = 8)$ Gleichungen der Gruppe II und $(3f = 9)$ Gleichungen der Gruppe III. Um der Rechnung eine übersichtliche Form zu geben, läßt man die beiden Größen K_{12} und K_{21} vorläufig un-

bestimmt. Die übrigen Unbekannten können alsdann als Funktionen von K_{12} und K_{21} dargestellt werden, und zwar:

K_{14} durch Gleichung II 1),
 K_{23} „ „ II 2),
 K_{41} und K_{32} durch das Gleichungspaar Ia 1) III 1),

K_{34} durch Gleichung III 2),

K_{43} „ „ III 3),

K_{36} „ „ II 3),

K_{45} „ „ II 4),

K_{63} und K_{54} durch das Gleichungspaar Ia 2), III 4),

K_{65} durch Gleichung III 5),

K_{56} „ „ III 6),

K_{58} „ „ II 5),

K_{67} „ „ II 6),

K_{85} und K_{76} durch das Gleichungspaar Ia 3), III 7),

K_{78} durch Gleichung III 8),

K_{87} „ „ III 9).

Endlich bestimmt das Gleichungspaar II 7), II 8) die Zahlenwerte von K_{12} und K_{21} , welche in die übrigen Gleichungen einzusetzen sind.

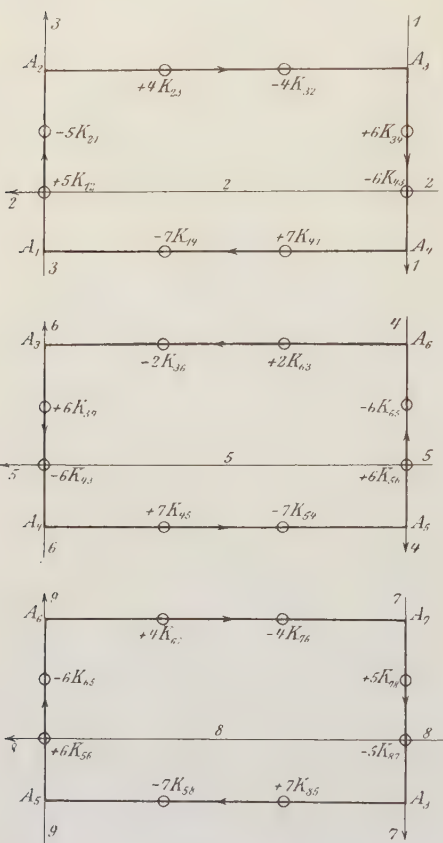


Abb. 24.

Die vorstehende Uebersicht läßt die Gesetzmäßigkeit der Reihenfolge erkennen, in der die Bedingungsgleichungen zu verwenden sind. Sie zeigt, daß $(f + 1 = 4)$ Gleichungspaare mit *zwei* Unbekannten aufzulösen sind, während jede der anderen Gleichungen nur *eine* neue Unbekannte enthält. Auf dem angegebenen Wege ergibt sich:

$$K_{14} = -K_{12}$$

$$K_{23} = -K_{21}$$

$$\begin{aligned}
K_{41} &= - & 2,273 & K_{12} + & 2,455 & K_{21} + & 1\,964 \\
K_{32} &= + & 3,273 & K_{12} - & 1,455 & K_{21} + & 3\,436 \\
K_{34} &= + & 2,879 & K_{12} + & 3,091 & K_{21} + & 6\,873 \\
K_{43} &= + & 0,045 & K_{12} + & 5,424 & K_{21} + & 6\,873 \\
K_{36} &= - & 6,152 & K_{12} - & 1,636 & K_{21} - & 10\,309 \\
K_{45} &= + & 2,227 & K_{12} - & 7,879 & K_{21} - & 8\,836 \\
K_{63} &= - & 8,813 & K_{12} + & 23,596 & K_{21} + & 25\,451 \\
K_{54} &= + & 12,737 & K_{12} - & 14,081 & K_{21} - & 4\,509 \\
K_{65} &= + & 13,366 & K_{12} + & 12,677 & K_{21} + & 35\,761 \\
K_{56} &= + & 23,682 & K_{12} - & 0,636 & K_{21} + & 28\,889 \\
K_{58} &= - & 36,919 & K_{12} + & 14,717 & K_{21} - & 24\,380 \\
K_{67} &= - & 4,553 & K_{12} - & 36,273 & K_{21} - & 61\,212 \\
K_{85} &= - & 45,022 & K_{12} + & 74,735 & K_{21} + & 53\,678 \\
K_{76} &= + & 85,994 & K_{12} - & 53,179 & K_{21} + & 25\,914 \\
K_{78} &= + & 146,870 & K_{12} + & 72,198 & K_{21} + & 291\,596 \\
K_{87} &= + & 74,767 & K_{12} + & 153,772 & K_{21} + & 322\,929 \\
K_{12} &= - & 1242,1 \\
K_{21} &= - & 1486,5.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte von K_{12} und K_{21} in die vorstehenden Gleichungen ergeben sich die Knotenmomente in Zentimeter-Tonnen:

$$\begin{aligned}
K_{12} &= -1242, & K_{21} &= -1487, \\
K_{14} &= +1242, & K_{23} &= +1487, \\
K_{41} &= +1138, & K_{32} &= +1534, \\
K_{34} &= -1298, & K_{43} &= -1247, \\
K_{36} &= -236, & K_{45} &= +109, \\
K_{63} &= +1322, & K_{54} &= +601, \\
K_{65} &= +314, & K_{56} &= +420, \\
K_{58} &= -1021, & K_{67} &= -1636, \\
K_{85} &= -1485, & K_{76} &= -1845, \\
K_{78} &= +1815, & K_{87} &= +1485.
\end{aligned}$$

Die Knotenmomente K bestimmen nach Gleichung 21) die Querkräfte Q . Man erhält in Tonnen:

$$\begin{aligned}
Q_{12} &= -9,10, & Q_{23} &= +5,03, & Q_{34} &= -8,48, \\
Q_{41} &= +3,97, & Q_{45} &= +1,18, & Q_{56} &= +2,45, \\
Q_{36} &= +1,81, & Q_{67} &= -5,80, & Q_{78} &= +11,10, \\
Q_{58} &= -4,18.
\end{aligned}$$

Endlich ergeben sich die *Stabkräfte* S in Tonnen, indem man die Werte der Querkräfte Q in die Gleichungen der Gruppe I einsetzt:

$$\begin{aligned}
S_{12} &= -5,03, & S_{14} &= +9,10, & S_{23} &= -8,10, \\
S_{34} &= -0,78, & S_{36} &= -15,58, & S_{45} &= +17,58, \\
S_{56} &= +0,62, & S_{58} &= +15,13, & S_{67} &= -12,10, \\
S_{78} &= -5,81.
\end{aligned}$$

Will man die *Einflußzahlen* der Knotenlasten in bezug auf die Größen K , Q und S bestimmen, so bleibt der hier beschriebene Rechnungsgang in allen Punkten unverändert. Bei der Bildung der Gleichungen Ia) setzt man:

$$Q_{14} + Q_{23} = Q_1$$

$$Q_{36} + Q_{45} = Q_2$$

$$Q_{58} + Q_{67} = Q_3,$$

wodurch die Gleichungen Ia) die folgende Form annehmen:

$$\text{Ia 1)} \quad 0 = K_{41} + K_{32} + K_{14} + K_{23} + 600 Q_1$$

$$\text{Ia 2)} \quad 0 = K_{63} + K_{54} + K_{45} + K_{36} + 600 Q_2$$

$$\text{Ia 3)} \quad 0 = K_{85} + K_{76} + K_{58} + K_{67} + 600 Q_3.$$

Q_1 , Q_2 , Q_3 bezeichnen die *Querkräfte des Trägers* im ersten, zweiten, dritten Fach; sie sind also *bekannte Funktionen der Knotenlasten*. Auf dem beschriebenen Wege erhält man zunächst die Knotenmomente K , darauf die Stabquerkräfte Q und endlich die Stabkräfte S als Funktionen der Knotenlasten.

Beispiel 11. Eine erhebliche Vereinfachung der Rechnung ergibt sich, wenn die Werte $\varphi = \frac{l}{2\varepsilon J}$ für die beiden Gurtstäbe eines jeden Faches von gleicher Größe sind. Dieser Fall ist kaum als eine Ausnahme, sondern fast als Regel anzusehen. Denn da die beiden Gurtstäbe eines Faches sowohl in bezug auf die Stabkräfte, als auch in bezug auf die Biegemomente nur wenig voneinander abweichen, so besteht kein Grund, ihnen Querschnitte von verschiedener Form und Größe zu geben. Wir ändern das vorige Beispiel nur, indem wir annehmen:

$$\varphi_{23} = \varphi_{14} = 4,$$

$$\varphi_{36} = \varphi_{45} = 2,$$

$$\varphi_{67} = \varphi_{58} = 4,$$

während alles übrige unverändert bleibt. Die Gleichungen der Gruppen I, Ia und II ändern sich nicht, weil sie die Größen φ nicht enthalten. Die Momentengleichungen der Gruppe III beziehen wir für jedes Fach auf die Stabachsen der beiden Pfosten und auf die wagerechte Achse, welche die Trägerhöhe halbiert, wodurch sie folgende Form annehmen:

für das *erste* Fach:

$$\text{III 1)} \quad 0 = 15 (K_{12} - K_{21}) + 8 (K_{23} - K_{14}) + 4 (K_{41} - K_{32})$$

$$\text{III 2)} \quad 0 = 4 (K_{23} - K_{14}) + 8 (K_{41} - K_{32}) + 18 (K_{34} - K_{43})$$

$$\text{III 3)} \quad 0 = 5 (K_{12} + K_{21}) - 12 (K_{23} + K_{14}) + 12 (K_{41} + K_{32}) \\ - 6 (K_{34} + K_{43}),$$

ferner für das *zweite* Fach:

$$\begin{aligned}\text{III 4)} \quad 0 &= 18(K_{34} - K_{43}) + 4(K_{45} - K_{36}) + 2(K_{63} - K_{54}) \\ \text{III 5)} \quad 0 &= 2(K_{45} - K_{36}) + 4(K_{63} - K_{54}) + 18(K_{56} - K_{65}) \\ \text{III 6)} \quad 0 &= (K_{34} + K_{43}) - (K_{45} + K_{36}) + (K_{63} + K_{54}) - (K_{56} + K_{65})\end{aligned}$$

und für das *dritte* Fach:

$$\begin{aligned}\text{III 7)} \quad 0 &= 18(K_{56} - K_{65}) + 8(K_{67} - K_{58}) + 4(K_{85} - K_{76}) \\ \text{III 8)} \quad 0 &= 4(K_{67} - K_{58}) + 8(K_{85} - K_{76}) + 15(K_{78} - K_{87}) \\ \text{III 9)} \quad 0 &= 6(K_{56} + K_{65}) - 12(K_{67} + K_{58}) + 12(K_{85} + K_{76}) \\ &\quad - 5(K_{78} + K_{87}).\end{aligned}$$

Aus den Gleichungspaaren (1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8) der Gruppe II lassen sich ferner die folgenden Bedingungen ableiten:

$$\begin{aligned}\text{II 9)} \quad 0 &= (K_{12} - K_{21}) - (K_{23} - K_{14}) \\ \text{II 10)} \quad 0 &= (K_{41} - K_{32}) - (K_{34} - K_{43}) + (K_{45} - K_{36}) \\ \text{II 11)} \quad 0 &= (K_{63} - K_{54}) - (K_{56} - K_{65}) + (K_{67} - K_{58}) \\ \text{II 12)} \quad 0 &= (K_{85} - K_{76}) - (K_{78} - K_{87})\end{aligned}$$

Die ($2f=6$) Gleichungen 1), 2), 4), 5), 7), 8) der Gruppe III und die ($f+1=4$) Gleichungen 9), 10), 11), 12) der Gruppe II bilden sonach ($3f+1=10$) *homogene* Gleichungen zwischen den ($3f+1$) unbekannten Größen $(K_{12} - K_{21})$, $(K_{23} - K_{14})$, $(K_{41} - K_{32})$, $(K_{34} - K_{43})$, $(K_{45} - K_{36})$, $(K_{63} - K_{54})$, $(K_{56} - K_{65})$, $(K_{67} - K_{58})$, $(K_{85} - K_{76})$, $(K_{78} - K_{87})$. Nach einer bekannten algebraischen Regel sind diese Größen sämtlich gleich null, und es ergeben sich hieraus die ($3f+1$) Gleichungen *der Gruppe IV*:

$$\begin{aligned}\text{IV 1)} \quad K_{21} &= K_{12}, & \text{IV 2)} \quad K_{23} &= K_{14}, & \text{IV 3)} \quad K_{32} &= K_{41}, \\ \text{IV 4)} \quad K_{34} &= K_{43}, & \text{IV 5)} \quad K_{36} &= K_{45}, & \text{IV 6)} \quad K_{63} &= K_{54}, \\ \text{IV 7)} \quad K_{65} &= K_{56}, & \text{IV 8)} \quad K_{67} &= K_{58}, & \text{IV 9)} \quad K_{76} &= K_{85}, \\ \text{IV 10)} \quad K_{78} &= K_{87},\end{aligned}$$

wodurch die Anzahl der unbekannten Knotenmomente K auf die Hälfte, von $(6f+2)$ auf $(3f+1)$ zurückgeführt wird. Für die Berechnung der $(3f+1)$ auf der rechten Seite der Gleichungen IV stehenden Unbekannten sind zu verwenden: die infolge der Gruppe IV vereinfachten f Gleichungen der Gruppe Ia:

$$\begin{aligned}\text{Ia 1)} \quad 0 &= K_{14} + K_{41} - 2700 \text{ cm} \cdot t \\ \text{Ia 2)} \quad 0 &= K_{45} + K_{54} - 900 \text{ cm} \cdot t \\ \text{Ia 3)} \quad 0 &= K_{58} + K_{85} + 3000 \text{ cm} \cdot t,\end{aligned}$$

ferner die ebenfalls vereinfachten f Gleichungen 3), 6), 9) der Gruppe III:

$$\begin{aligned}\text{III 3)} \quad 0 &= +5K_{12} - 12K_{14} + 12K_{41} - 6K_{43} \\ \text{III 6)} \quad 0 &= +K_{43} - K_{45} + K_{54} - K_{56} \\ \text{III 9)} \quad 0 &= +6K_{56} - 12K_{58} + 12K_{85} - 5K_{87},\end{aligned}$$

endlich die $(f+1)$ Gleichungen 1), 4), 5), 8) der Gruppe II:

$$\text{II 1)} \quad 0 = K_{12} + K_{14}$$

$$\text{II 4)} \quad 0 = K_{41} + K_{43} + K_{45}$$

$$\text{II 5)} \quad 0 = K_{54} + K_{56} + K_{58}$$

$$\text{II 8)} \quad 0 = K_{85} + K_{87}$$

Bleibt K_{12} vorläufig unbestimmt, so lassen sich die vorstehenden $(3f+1)$ Gleichungen so ordnen, daß jede nur *eine* neue Unbekannte enthält, so daß eine Auflösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten überhaupt nicht nötig wird:

$$\text{II 1)} \quad K_{14} = -K_{12}$$

$$\text{Ia 1)} \quad K_{41} = +K_{12} + 2700$$

$$\text{III 3)} \quad K_{43} = +4,833 K_{12} + 5400$$

$$\text{II 4)} \quad K_{45} = -5,833 K_{12} - 8100$$

$$\text{Ia 2)} \quad K_{54} = +5,833 K_{12} + 9000$$

$$\text{III 6)} \quad K_{56} = +16,500 K_{12} + 22500$$

$$\text{II 5)} \quad K_{58} = -22,333 K_{12} - 31500$$

$$\text{Ia 3)} \quad K_{85} = +22,333 K_{12} + 28500$$

$$\text{III 9)} \quad K_{87} = +127,000 K_{12} + 171000$$

$$\text{II 8)} \quad 0 = +149,333 K_{12} + 199500.$$

Die letzte Gleichung bestimmt K_{12} und hierdurch alle übrigen Knotenmomente in Zentimeter-Tonnen:

$$K_{21} = K_{12} = -1336, \quad K_{14} = K_{23} = +1336,$$

$$K_{41} = K_{32} = +1364, \quad K_{43} = K_{34} = -1057,$$

$$K_{45} = K_{36} = -307, \quad K_{54} = K_{63} = +1207,$$

$$K_{56} = K_{65} = +456, \quad K_{58} = K_{67} = -1663,$$

$$K_{85} = K_{76} = -1337, \quad K_{87} = K_{78} = +1337.$$

Hieraus ergeben sich in bekannter Weise die Querkräfte Q und die Stabkräfte S in Tonnen:

$$Q_{12} = -8,91, \quad Q_{14} = Q_{23} = +4,50, \quad Q_{34} = -7,05, \quad Q_{45} = Q_{36} = +1,50,$$

$$Q_{56} = +3,04, \quad Q_{67} = Q_{58} = -5,00, \quad Q_{78} = +8,91,$$

ferner:

$$S_{12} = -4,50, \quad S_{14} = +8,91, \quad S_{23} = -7,91, \quad S_{34} = -1,00,$$

$$S_{36} = -13,96, \quad S_{45} = +15,96, \quad S_{56} = -0,50, \quad S_{67} = -9,92,$$

$$S_{78} = -5,00, \quad S_{87} = +12,91.$$

Pfostenträger mit trapezförmigen Fächern. Wenn die Gurtungen des Trägers nicht parallel, die Fächer also trapezförmig sind, so bleibt der beschriebene Rechnungsgang in allen wesentlichen Punkten unverändert, und es erscheint daher nicht nötig, ein Zahlenbeispiel hier vorzuführen. Es bietet keine Schwierigkeit, die Gleichungen der Gruppe I zu bilden und die hierzu geeigneten Projektionsachsen

auszuwählen. Man legt diese Achsen zweckmäßig parallel zu den unbekannten Stabkräften. Die Gleichungen II bleiben ganz unverändert. In den Gleichungen III ändern sich nur die Beizahlen, nicht aber die Form der Gleichungen. Daher bleiben auch die Gleichungen IV und die hiermit verbundenen Vereinfachungen bestehen, wenn die Werte φ für die beiden Gurtstäbe eines jeden Faches von gleicher Größe sind.

Die Wirkungen der Temperaturänderungen.

Beispiel 12. Die oberen Gurtstäbe $A_2 A_3$, $A_3 A_6$, $A_6 A_7$ des im Beispiel 11 gegebenen Pfostenträgers mögen durch Temperatureinwirkungen die Dehnungen δ_{23} , δ_{36} , δ_{67} erleiden. Es sind die hierdurch erzeugten inneren Kräfte zu berechnen. Zu diesem Zweck sind alle äußeren Kräfte des Trägers gleich null zu setzen. In den Gleichungen I bleiben daher nur die Unbekannten S und Q , während die von den äußeren Kräften herrührenden Zahlenwerte verschwinden. Die Gleichungen II bleiben unverändert. Um die Formänderungsbedingungen III zu bilden, sind den Drehungsgewichten $\alpha = \varphi K$ die Dehnungsgewichte β der Knoten

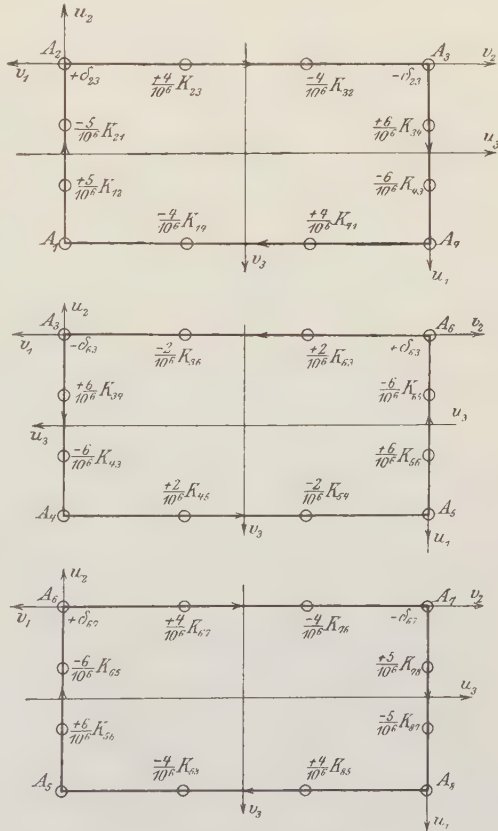


Abb. 25.

hinzuzufügen, und zwar sind den Anfangsgelenken A_2 , A_3 , A_6 der Stäbe $A_2 A_3$, $A_3 A_6$, $A_6 A_7$ die Gewichte $+\delta_{23}$, $+\delta_{36}$, $+\delta_{67}$ und den Endgelenken A_3 , A_6 , A_7 die Gewichte $-\delta_{23}$, $-\delta_{36}$, $-\delta_{67}$ beizulegen. Für jede der drei geschlossenen Ketten bestehen drei Bedingungen von der Form der Gleichung 8):

$$0 = \sum u \alpha + \sum v \beta.$$

In die Abb. 25 sind die Gewichte α und β und die willkürlich gewählten Achsenpaare (u_1, v_1) , (u_2, v_2) , (u_3, v_3) eingetragen. Für

die beiden Achsen v_1 und v_2 einer jeden Kette ist die Momentensumme $\Sigma v\beta$ gleich null, weil die Dehnungsgewichte β auf diesen Achsen liegen. Daher bleiben die sechs Bedingungen III 1), III 2), III 4), III 5), III 7), III 8) des Beispiels 11 unverändert, und da auch die Gleichungen II sich nicht ändern, so bleibt die Homogenität der zehn Gleichungen, von der die Gruppe IV abhängt, ungestört. Die Gleichungen IV sind also auch hier gültig. Dies würde nicht mehr der Fall sein, wenn die Fächer trapezförmig wären und wenn die Dehnungen δ sich auch auf die Pfosten erstreckten. In solchen Fällen ist der umständlichere Rechnungsgang des Beispiels 10 auszuführen. Mit Berücksichtigung der Gleichungen IV nehmen die drei Bedingungen für die Achsenpaare (v_3, v_3) die folgende Form an:

$$\begin{aligned} 0 &= +100 \cdot 5 \cdot 10^{-6} K_{12} + 300 \cdot 4 \cdot 10^{-6} (K_{41} - K_{14}) \\ &\quad - 100 \cdot 6 \cdot 10^{-6} K_{43} + 600 \delta_{23} \\ 0 &= 100 \cdot 6 \cdot 10^{-6} K_{43} + 300 \cdot 2 \cdot 10^{-6} (K_{45} - K_{54}) \\ &\quad + 100 \cdot 6 \cdot 10^{-6} K_{56} - 600 \delta_{63} \\ 0 &= 100 \cdot 6 \cdot 10^{-6} K_{56} + 300 \cdot 4 \cdot 10^{-6} (K_{85} - K_{58}) \\ &\quad - 100 \cdot 5 \cdot 10^{-6} K_{87} + 600 \delta_{67} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \text{III 3)} \quad 0 &= 5 K_{12} + 12 (K_{41} - K_{14}) - 6 K_{43} + 6 \cdot 10^6 \delta_{23} \\ \text{III 6)} \quad 0 &= K_{43} - K_{45} + K_{54} - K_{56} + 10^6 \delta_{63} \\ \text{III 9)} \quad 0 &= 6 K_{56} + 12 (K_{85} - K_{58}) - 5 K_{87} + 6 \cdot 10^6 \delta_{67}. \end{aligned}$$

Für die Berechnung der auf der *rechten* Seite der Gleichungen IV stehenden zehn Knotenmomente sind ferner zu verwenden die *drei* Gleichungen Ia, aus denen die von den äußeren Kräften stammenden Zahlenwerte fortfallen:

$$\begin{aligned} \text{Ia 1)} \quad 0 &= K_{14} + K_{41} \\ \text{Ia 2)} \quad 0 &= K_{45} + K_{54} \\ \text{Ia 3)} \quad 0 &= K_{58} + K_{85} \end{aligned}$$

und ferner die *vier* Gleichungen der Gruppe II:

$$\begin{aligned} \text{II 1)} \quad 0 &= K_{12} + K_{14} \\ \text{II 4)} \quad 0 &= K_{41} + K_{43} + K_{45} \\ \text{II 5)} \quad 0 &= K_{54} + K_{56} + K_{58} \\ \text{II 8)} \quad 0 &= K_{85} + K_{87}. \end{aligned}$$

Nach dem Rechnungsgange des Beispiels 11 ergibt sich aus den vorstehenden zehn Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{II 1)} \quad K_{14} &= -K_{12} \\ \text{Ia 1)} \quad K_{41} &= +K_{12} \\ \text{III 3)} \quad K_{43} &= +4,833 K_{12} + 10^6 \delta_{23} \\ \text{II 4)} \quad K_{45} &= -5,833 K_{12} - 10^6 \delta_{23} \end{aligned}$$

- Ia 2) $K_{54} = + 5,833 K_{12} + 10^6 \delta_{23}$
 III 6) $K_{56} = + 16,500 K_{12} + 3 \cdot 10^6 \delta_{23} + 10^6 \delta_{63}$
 II 5) $K_{58} = - 22,333 K_{12} - 4 \cdot 10^6 \delta_{23} - 10^6 \delta_{63}$
 Ia 3) $K_{85} = + 22,333 K_{12} + 4 \cdot 10^6 \delta_{23} + 10^6 \delta_{63}$
 III 9) $K_{87} = + 127,000 K_{12} + 228 \cdot 10^5 \delta_{23} + 6 \cdot 10^6 \delta_{63} + 12 \cdot 10^5 \delta_{67}$
 II 8) $K_{12} = - 179\,464 \delta_{23} - 46\,875 \delta_{63} - 8036 \delta_{67}$.

Demnach ist in abgerundeten Zahlen:

$$\begin{aligned} K_{21} &= K_{12} = - 179\,000 \delta_{23} - 47\,000 \delta_{63} - 8\,000 \delta_{67} \\ K_{23} &= K_{14} = + 179\,000 \delta_{23} + 47\,000 \delta_{63} + 8\,000 \delta_{67} \\ K_{32} &= K_{41} = - 179\,000 \delta_{23} - 47\,000 \delta_{63} - 8\,000 \delta_{67} \\ K_{34} &= K_{43} = + 133\,000 \delta_{23} - 227\,000 \delta_{63} - 39\,000 \delta_{67} \\ K_{36} &= K_{45} = + 45\,000 \delta_{23} + 274\,000 \delta_{63} + 45\,000 \delta_{67} \\ K_{54} &= K_{63} = - 45\,000 \delta_{23} - 274\,000 \delta_{63} - 45\,000 \delta_{67} \\ K_{65} &= K_{56} = + 39\,000 \delta_{23} + 227\,000 \delta_{63} - 133\,000 \delta_{67} \\ K_{67} &= K_{58} = + 8\,000 \delta_{23} + 47\,000 \delta_{63} + 179\,000 \delta_{67} \\ K_{76} &= K_{85} = - 8\,000 \delta_{23} - 47\,000 \delta_{63} - 179\,000 \delta_{67} \\ K_{78} &= K_{87} = + 8\,000 \delta_{23} + 47\,000 \delta_{63} + 179\,000 \delta_{67}. \end{aligned}$$

Haben beispielsweise die Dehnungen die seltene Größe

$$\delta_{23} = \delta_{63} = \delta_{67} = 0,0005,$$

so wird in Zentimeter-Tonnen:

$$\begin{aligned} K_{12} &= K_{21} = K_{32} = K_{41} = K_{76} = K_{85} = - 117 \\ K_{23} &= K_{14} = K_{67} = K_{58} = K_{78} = K_{87} = + 117 \\ K_{34} &= K_{43} = - 66, & K_{36} &= K_{45} = + 182 \\ K_{63} &= K_{54} = - 182, & K_{65} &= K_{56} = + 66. \end{aligned}$$

Ferner ist in diesem Falle nach Gleichung 21) in Tonnen:

$$Q_{23} = Q_{14} = Q_{45} = Q_{36} = Q_{58} = Q_{67} = 0$$

$$Q_{12} = - 0,78, \quad Q_{34} = - 0,44, \quad Q_{56} = + 0,44, \quad Q_{78} = + 0,78$$

und nach den Gleichungen I ebenfalls in Tonnen:

$$\begin{aligned} S_{12} &= S_{34} = S_{56} = S_{78} = 0 \\ S_{14} &= S_{58} = + 0,78 \\ S_{23} &= S_{67} = - 0,78 \\ S_{36} &= - 1,22, \quad S_{45} = + 1,22. \end{aligned}$$

Aus diesem Beispiel ist zu ersehen, daß die Temperatur einwirkungen nicht beträchtlich sind.

Abweichungen von der prismatischen Form der Stäbe. Die Voraussetzung, daß $\varphi = \frac{l}{2 \varepsilon J}$ auf der ganzen Länge eines jeden Stabes eine unveränderliche Größe sei, weicht in der Regel von der Wirklichkeit weit ab. Mit Rücksicht auf die Biegemomente ist

man genötigt, die Stabquerschnitte nach den Stabenden hin bedeutend zu verstärken. Das Gesetz der Biegung solcher Stäbe von stark veränderlichem Querschnitt ist nicht bekannt; jedenfalls ist die Formel für die Drehungsgewichte

$$d\alpha = \frac{M ds}{\epsilon J}$$

ziemlich unsicher. Solange Versuche über diesen Gegenstand fehlen, ist man auf Schätzungen angewiesen. Es liegt am nächsten, bei Berechnung der Drehungsgewichte

$$\alpha = q K$$

für die Größen q Mittelwerte einzuführen. Aber es ist zu beachten, daß auch die Lage der Gewichte α sich ändert. Anhaltspunkte für Schätzungen ergeben sich aus dem folgenden Beispiel. Es mögen die Größen M und q durch die Ordinaten des Dreiecks ABC und der Parabelfläche $DEFG$ (Abb. 26) dargestellt werden; dann ist für die Abszisse s :

$$M = K \frac{s}{l}$$

und

$$q = \frac{l}{2 \epsilon J} = q_1 + 4 q_2 \left(\frac{s}{l} - \frac{s^2}{l^2} \right).$$

Hieraus folgt, wenn mit s_1 die Abszisse des resultierenden Drehungsgewichtes α_1 bezeichnet wird:

$$\alpha_1 = \int_0^l \frac{M ds}{\epsilon J} = K \left(q_1 + \frac{2}{3} q_2 \right) \quad (27)$$

und

$$s_1 \alpha_1 = \int_0^l \frac{M s ds}{\epsilon J} = K l \left(\frac{2}{3} q_1 + \frac{4}{10} q_2 \right),$$

also

$$s_1 = l \frac{10 q_1 + 6 q_2}{15 q_1 + 10 q_2}. \quad (28)$$

Die Lage der Drehungsgewichte α ist also nur in geringem Maße von der Stabform abhängig, denn die Abszisse s_1 ändert sich zwischen den beiden Grenzfällen

$$q_1 = 0 \quad \text{und} \quad q_2 = 0$$

nur von $s_1 = \frac{6}{10} l$ bis $s_1 = \frac{2}{3} l$.

Der *Mittelwert*

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{2}{3} \varphi_2$$

bezeichnet die mittlere Höhe der Parabelfläche $DEFG$. Man darf hieraus schließen, daß auch in anderen, weniger einfachen Fällen als Mittelwert von φ die Größe

$$\varphi = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi \, ds$$

einzuführen ist.

Vorzüge und Mängel der Pfostenträger. Die Pfostenträger gehören unseres Erachtens zu den Trägerformen, die nur im Notfalle angewandt werden sollten. Man behauptet, sie böten ästhetische Vorzüge; sie wirkten wegen der geringeren Stabzahl ruhiger als Fachwerke. Das mag richtig sein, und es können, namentlich bei Hochbauten, Fälle vorkommen, wo dieser Gesichtspunkt ausschlaggebend ist. Für Pfostenträger aus Eisenbeton wird ferner geltend gemacht, daß ihre Ausführung einfacher und deshalb sicherer sei. Auch das mag zutreffen. In allen anderen Beziehungen verdienen die Fachwerke entschieden den Vorzug. Die Zuverlässigkeit der Berechnung ist bei Fachwerken, auch bei solchen mit steifen Knotenverbindungen, erheblich größer als bei Pfostenträgern. Die *Hauptspannungen* der Fachwerke lassen sich mit großer Bestimmtheit ermitteln. Die Berechnung der *Nebenspannungen* ist zwar weniger zuverlässig, aber bei richtiger Anordnung spielen die Nebenspannungen keine große Rolle. Bei Pfostenträgern dagegen spielen die Nebenspannungen, d. h. die *Biegungsspannungen* die Hauptrolle, und ihre Berechnung ist wenig zuverlässig. Man muß aus diesem Grunde fordern, daß die rechnermäßigen Grenzspannungen bei Pfostenträgern *niedriger* anzunehmen sind als bei Fachwerken. Es kommen ferner die erheblichen Mehrkosten in Betracht, die bei den Pfostenträgern mit der weniger einfachen Form der Stäbe verbunden sind. Daher ist auch in wirtschaftlicher Beziehung der Vorzug entschieden auf Seite der Fachwerke.

II. Die Berechnung des Brückenrahmens. Der Brückenrahmen bildet einen Pfostenträger mit *einem* Fach, und seine Berechnung kann daher nach dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Verfahren ausgeführt werden. Hierbei kommen jedoch einige Besonderheiten in Betracht, die sich auf die Art der Belastung und auf die Form der Stützung des Rahmens beziehen. Wir ordnen die folgenden Beispiele nach der Art der Belastung.

Erster Belastungsfall. Die äußeren Kräfte wirken unmittelbar auf die vier Knoten des Rahmens.

Beispiel 13. In nebenstehender Abbildung sind die Abmessungen des Rahmens in Zentimeter, die Knotenlasten und die

aus dem Gleichgewicht des ganzen Trägers berechneten Stützkkräfte in Tonnen angegeben. Bezogen auf

$$\frac{1}{10^7 \text{ cm t}}$$

als Einheit, haben die Größen

$$\varphi = \frac{l}{2\varepsilon J}$$

für die vier Rahmenstäbe folgende Werte:

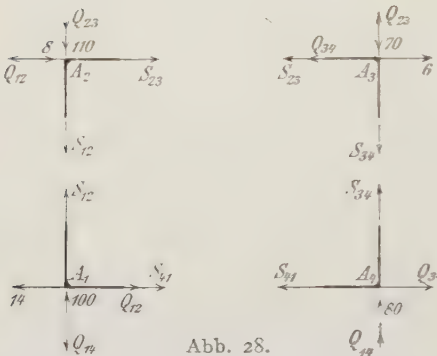
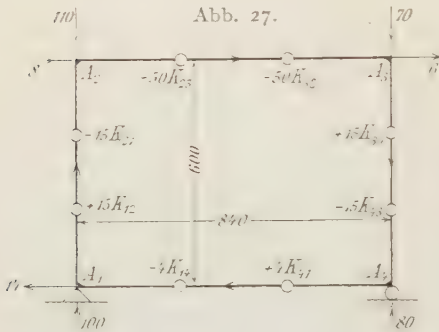
$$\varphi_{12} = 15,$$

$$\varphi_{23} = 50,$$

$$\varphi_{34} = 15,$$

$$\varphi_{41} = 4.$$

In der Abb. 28 sind die Kräftegruppen dargestellt, die außer den Momenten K von den vier Knoten aufzunehmen sind. Aus dieser Zeichnung lassen sich die folgenden Gleichgewichtsbedingungen ablesen:



Gruppe I:

$$\begin{array}{ll} \text{I 1)} & S_{12} = + Q_{14} - 100, \\ \text{I 2)} & S_{12} = - Q_{23} - 110, \\ \text{I 3)} & S_{23} = + Q_{12} - 8, \\ \text{I 4)} & S_{23} = - Q_{34} + 6, \\ \text{I 5)} & S_{34} = + Q_{23} - 70, \\ \text{I 6)} & S_{34} = - Q_{14} - 80, \\ \text{I 7)} & S_{41} = + Q_{34}, \\ \text{I 8)} & S_{41} = - Q_{12} + 14; \end{array}$$

Gruppe II:

$$\begin{array}{ll} \text{II 1)} & 0 = K_{12} + K_{14}, \\ \text{II 2)} & 0 = K_{21} + K_{23}, \\ \text{II 3)} & 0 = K_{32} + K_{34}, \\ \text{II 4)} & 0 = K_{43} + K_{41}. \end{array}$$

Es ist zu beachten, daß die Größen φ für die beiden Pfosten gleich groß sind:

$$\varphi_{12} = \varphi_{34} = 15.$$

Hieraus folgt, wie im Beispiel 11 gezeigt wurde, daß die zur lotrechten Mittelachse symmetrisch liegenden Knotenmomente gleiche Werte haben. Wir bezeichnen diese Bedingungen wie im Beispiel 11 als

Gruppe IV:

$$\begin{array}{ll} \text{IV 1)} & K_{12} = K_{43}, \\ \text{IV 2)} & K_{21} = K_{34}, \\ \text{IV 3)} & K_{23} = K_{32}, \\ \text{IV 4)} & K_{14} = K_{41}. \end{array}$$

Aus den Gleichungen II und IV folgt:

$$\text{V)} \quad \begin{cases} K_{12} = -K_{14} = -K_{41} = +K_{43} \\ K_{21} = -K_{23} = -K_{32} = +K_{34}. \end{cases}$$

Die acht Drehungsgewichte der geschlossenen Kette $A_1 A_2 A_3 A_4$ haben demnach die folgenden Werte:

$$\begin{array}{ll} \alpha_{12} = +15 K_{12}, & \alpha_{21} = -15 K_{21}, \\ \alpha_{23} = +50 K_{23} = -50 K_{21}, & \alpha_{32} = -50 K_{32} = +50 K_{21}, \\ \alpha_{34} = +15 K_{34} = +15 K_{21}, & \alpha_{43} = -15 K_{43} = -15 K_{12}, \\ \alpha_{41} = +4 K_{41} = -4 K_{12}, & \alpha_{14} = -4 K_{14} = +4 K_{12}. \end{array}$$

Die Gleichgewichtsgruppe der Drehungsgewichte besteht also aus vier parallel gestellten Kräftepaaren $(\alpha_{12}, \alpha_{43})$, $(\alpha_{14}, \alpha_{41})$, $(\alpha_{21}, \alpha_{34})$, $(\alpha_{23}, \alpha_{32})$, deren Momentensumme gleich null sein muß:

$$\text{III 1)} \quad 0 = 840 \cdot 15 K_{12} + 280 \cdot 4 K_{12} - 840 \cdot 15 K_{21} - 280 \cdot 50 K_{21}$$

oder

$$\text{III 1)} \quad K_{21} = \frac{49}{90} K_{12}$$

Eine zweite Bedingung zwischen K_{12} und K_{21} kann dem Gleichungspaar I 3), I 4) entnommen werden:

$$Q_{12} + Q_{34} = +14$$

oder, da den Gleichungen IV zufolge Q_{12} gleich Q_{34} ist:

$$\text{Ia)} \quad Q_{12} = \frac{K_{12} + K_{21}}{600} = +7.$$

Demnach ist in Zentimeter-Tonnen:

$$\begin{array}{l} K_{12} = -K_{14} = -K_{41} = +K_{43} = +2771 \\ K_{21} = -K_{23} = -K_{32} = +K_{34} = +1429. \end{array}$$

Ferner ist nach Gleichung 21) in Tonnen:

$$Q_{12} = Q_{34} = \frac{K_{12} + K_{21}}{600} = +7,00$$

$$Q_{23} = \frac{K_{23} + K_{32}}{840} = -3,40$$

$$Q_{14} = \frac{K_{41} + K_{14}}{840} = -6,60$$

und nach den Gleichungen I:

$$S_{12} = + Q_{14} - 100 = - Q_{23} - 110 = - 106.60$$

$$S_{23} = + Q_{12} - 8 = - Q_{34} + 6.00 = - 1.00$$

$$S_{34} = + Q_{23} - 70 = - Q_{14} - 80 = - 73.40$$

$$S_{41} = + Q_{34} = - Q_{12} + 14 = + 7.00.$$

Will man die *Einflußzahlen* der Knotenlasten in bezug auf die Größen K , Q , S bestimmen, so hat man zu beachten, daß Q_{12} gleich der halben wagerechten Querkraft des ganzen Trägers ist. Bezeichnet man die wagerechten Lasten der beiden Knoten A_2 , A_3 im Sinne von links nach rechts mit H_2 und H_3 , so ist

$$\text{Ia)} \quad Q_{12} = \frac{1}{2} (H_2 + H_3).$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der unveränderten Gleichung III 1) bestimmt die sämtlichen Knotenmomente K und darauf in bekannter Weise die Kräfte Q und S , wenn in die Gleichungen I die Buchstabenwerte der Knotenlasten eingeführt werden.

Beispiel 14. Die beiden Knoten A_1 und A_4 werden durch feste Gelenke ersetzt. Im übrigen bleiben Form und Belastung des Trägers wie im vorigen Beispiel. Ohne am Zustand des Trägers etwas zu ändern, darf man annehmen, der undeformbare Stab $A_1 A_4$ zur Verbindung der beiden Gelenke sei vorhanden. Ist er in Wirklichkeit nicht vorhanden, so sind die beiden Stabkräfte S_{14} ebenso wie die Stützkkräfte von den Gelenkfundamenten aufzunehmen. Demnach bleiben die Gleichungen I des Beispiels 13 unverändert. Da die Gelenke keine Momente aufnehmen können, so erhalten die Gleichungen V die einfachere Form:

$$\text{V)} \quad \begin{cases} K_{12} = - K_{14} = - K_{41} = + K_{43} = 0 \\ K_{21} = - K_{23} = - K_{32} = + K_{34}. \end{cases}$$

Auch die Gleichung Ia nimmt eine einfachere Form an:

$$\text{Ia)} \quad Q_{12} = \frac{K_{21}}{600} = + 7.$$

Demnach ist in Zentimeter-Tonnen:

$$K_{21} = - K_{23} = - K_{32} = + K_{34} = + 4200;$$

ferner in Tonnen:

$$\begin{array}{l|l} Q_{12} = \frac{K_{12} + K_{21}}{600} = + 7.00 & S_{12} = - Q_{23} - 110 = - 100 \\ Q_{23} = \frac{K_{23} + K_{32}}{840} = - 10.00 & S_{23} = + Q_{12} - 8 = - 1 \\ Q_{34} = \frac{K_{34} + K_{43}}{600} = + 7.00 & S_{34} = + Q_{23} - 70 = - 80 \\ Q_{41} = 0 & S_{41} = + Q_{34} = + 7.00. \end{array}$$

Beispiel 15. Es soll angenommen werden, daß die Stabenden A_1, A_4 der beiden Pfosten $A_2 A_1, A_3 A_4$ starr eingespannt sind, so daß sie keine Drehung ausführen können. Abmessungen und Knotenlasten bleiben wie im Beispiel 13. Der obigen Annahme kann entsprochen werden, indem man die Stützung des Rahmens läßt wie im Beispiel 13 und dem Querschnitt des Stabes $A_1 A_4$ ein unendlich großes Trägheitsmoment J beilegt, so daß

$$\varphi_{14} = \frac{l}{2 \varepsilon J} = 0$$

wird. Die Kräfte und Momente $S_{41}, Q_{41}, K_{14}, K_{41}$, die auf den Stab $A_1 A_4$ einwirken würden, wenn er vorhanden wäre, sind in Wirklichkeit von dem Fundamentkörper aufzunehmen, in den die Stabenden eingespannt sind. Die Gleichungen I, II, IV, V des Beispiels 13 bleiben unverändert. Es ändert sich nur die Gleichung III 1), in die anstatt φ_{14} gleich 4, φ_{14} gleich null einzusetzen ist:

$$0 = 840 \cdot 15 K_{12} - 840 \cdot 15 K_{21} - 280 \cdot 50 K_{21}$$

oder

$$\text{III 1) } K_{21} = \frac{9}{19} K_{12}.$$

In Verbindung mit der unveränderten Gleichung

$$\text{Ia) } Q_{12} = \frac{K_{12} + K_{21}}{600} = +7$$

ergibt sich in Zentimeter-Tonnen:

$$\begin{aligned} K_{12} &= -K_{14} = -K_{41} = +K_{43} = +2850 \\ K_{21} &= -K_{23} = -K_{32} = +K_{34} = +1350; \end{aligned}$$

ferner in Tonnen:

$Q_{12} = \frac{K_{12} + K_{21}}{600} = +7,00$	$S_{14} = Q_{14} - 100 = -106,79$
$Q_{23} = \frac{K_{23} + K_{32}}{840} = -3,21$	$S_{23} = Q_{12} - 8 = -1,00$
$Q_{34} = \frac{K_{34} + K_{43}}{600} = +7,00$	$S_{34} = Q_{23} - 70 = -73,21$
$Q_{41} = \frac{K_{41} + K_{14}}{840} = -6,79$	$S_{41} = Q_{34} = +7,00.$

Zweiter Belastungsfall. Die Angriffspunkte der äußeren Kräfte liegen zum Teil an den Knoten, zum Teil an den Kragarmen der Rahmenstäbe. Die Rahmenstäbe selbst sind nicht belastet.

Beispiel 16 (Abb. 29). Die Rahmenstäbe $A_1 A_2, A_3 A_4, A_4 A_1$ sind mit Kragarmen verbunden, welche die Stützkkräfte und einen Teil der in die Zeichnung eingetragenen Lasten aufnehmen. Die

Die wagerechte Achse $B_2 B_2$ geht durch die Schwerpunkte der Gewichtspaare $(\alpha_{12}, \alpha_{14} - 4720)$, $(\alpha_{41}, \alpha_{43} - 7500)$, und ihre Lage wird bestimmt durch die Strecke

$$A_1 B_2 = \frac{15}{15 + 4} 200 = 157,9 \text{ cm.}$$

Die dritte Achse $B_3 B_3$ ist die lotrechte Symmetrieachse des Rahmens. In bezug auf diese drei Achsen fordern die Momentengleichungen:

$$0 = 353,9 (\alpha_{12} + \alpha_{43}) + 553,9 (\alpha_{14} + \alpha_{41})$$

$$0 = 442,1 (\alpha_{23} + \alpha_{32}) + 242,1 (\alpha_{21} + \alpha_{34}) + 42,1 \cdot 7500 - 157,9 \cdot 4720$$

$$0 = 420 (\alpha_{12} + \alpha_{21} - \alpha_{34} - \alpha_{43}) + 140 (\alpha_{23} + \alpha_{14} - \alpha_{32} - \alpha_{41}).$$

Werden die Werte der Gewichte α eingesetzt, so ergeben sich nach einer einfachen Umformung die drei Formänderungsbedingungen:

$$\text{III 1) } K_{41} = -K_{12} - 700$$

$$\text{III 2) } K_{23} = -0,516 K_{12} - 79$$

$$\text{III 3) } K_{34} = +0,516 K_{12} + 96.$$

Die vierte Gleichung zur Bestimmung der vier Knotenmomente $K_{12}, K_{23}, K_{34}, K_{41}$ kann aus dem Gleichungspaar (1, 2) der Gruppe I entnommen werden:

$$0 = Q_{14} + Q_{23} + 70 - 58 = \frac{1}{840} (K_{14} + K_{41} + K_{23} + K_{32}) + 12$$

oder

$$\text{Ia) } 0 = -K_{12} + K_{41} + K_{23} - K_{34} + 8900.$$

Die Gleichungen III, Ia und II bestimmen die Knotenmomente in Zentimeter-Tonnen:

$$K_{12} = +2647, \quad K_{21} = +1444,$$

$$K_{23} = -1444, \quad K_{32} = -1461,$$

$$K_{34} = +1461, \quad K_{43} = +2847,$$

$$K_{41} = -3347, \quad K_{14} = -3827.$$

Hieraus ergeben sich die Querkräfte Q und die Stabkräfte S in Tonnen:

$$Q_{12} = \frac{K_{12} + K_{21}}{600} = +6,82 \quad S_{12} = +Q_{14} - 58 = -66,54$$

$$Q_{23} = \frac{K_{23} + K_{32}}{840} = -3,46 \quad S_{23} = +Q_{12} - 8 = -1,18$$

$$Q_{31} = \frac{K_{31} + K_{43}}{600} = +7,18 \quad S_{34} = +Q_{23} - 110 = -113,46$$

$$Q_{41} = \frac{K_{41} + K_{11}}{840} = -8,54 \quad S_{41} = +Q_{34} + 2 = +9,18.$$

Dritter Belastungsfall. Außer den Knoten und den Kragarmen sind auch die Rahmenstäbe zwischen den Knoten belastet.

Beispiel 17. Der in Abb. 31 dargestellte Rahmen trägt folgende Lasten: Der Stab A_1A_4 trägt eine gleichmäßig verteilte lotrechte Last

$$L_{14} = 20 \text{ t,}$$

die er zu gleichen Teilen auf die Knoten A_1 und A_4 überträgt. Der Stab A_1A_2 nimmt ferner eine wagerechte, von links nach rechts zeigende Einzellast auf:

$$L_{12} = 12 \text{ t.}$$

Da die Abstände dieser Last von den Knoten A_1 und A_2 gleich 400 und 200 cm sind, so überträgt der Stab auf den Knoten A_1 4 Tonnen und auf den Knoten A_2 8 Tonnen. Die übrigen Lasten der Knoten und Kragarme sind in die Zeichnung eingetragen. Die hiernach berechneten Stützkräfte werden von den Kragarmen der Rahmenstäbe A_2A_1 und A_3A_4 aufgenommen. Aus

der Abb. 32, welche

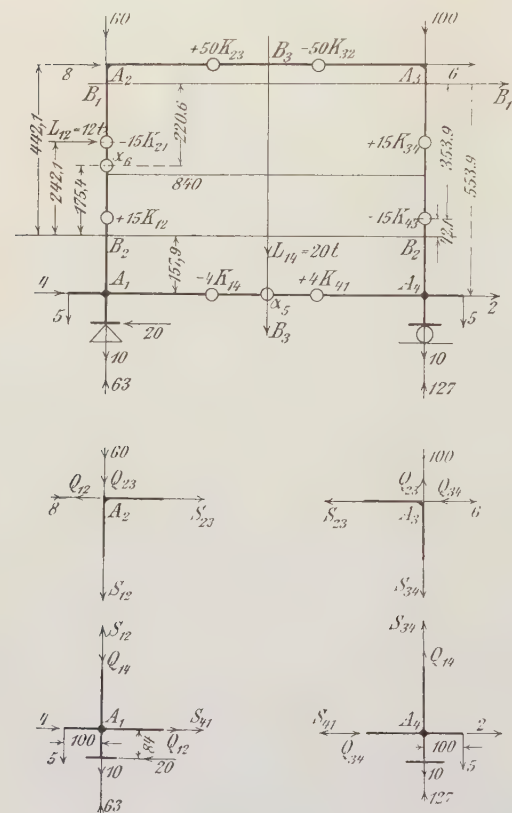


Abb. 32.

die Kräftegruppen der vier Knoten darstellt, lassen sich die folgenden Gleichgewichtsbedingungen ablesen:

Gruppe I:

- | | |
|--|---|
| I 1) $S_{12} = +Q_{14} - 63 + 10 + 5,$ | I 2) $S_{12} = -Q_{23} - 60,$ |
| I 3) $S_{23} = +Q_{12} - 8,$ | I 4) $S_{23} = -Q_{34} + 6,$ |
| I 5) $S_{34} = +Q_{23} - 100,$ | I 6) $S_{34} = -Q_{14} - 127 + 10 + 5,$ |
| I 7) $S_{41} = +Q_{34} + 2,$ | I 8) $S_{41} = -Q_{12} + 20 - 4,$ |

Gruppe II:

$$\begin{array}{ll}
 \text{II 1)} & K_{14} = -K_{12} - 20 \cdot 84 + 5 \cdot 100 = -K_{12} - 1180, \\
 \text{II 2)} & K_{21} = -K_{23}, \qquad \qquad \qquad \text{II 3)} & K_{32} = -K_{34}, \\
 \text{II 4)} & K_{43} = -K_{41} - 5 \cdot 100.
 \end{array}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Knotenmomenten K stimmen also mit dem vorigen Beispiel überein.

Die Formänderungsbedingungen. Da auch die Werte φ beibehalten sind, so ändern sich die *von den Knotenmomenten* erzeugten Drehungsgewichte nicht:

$$\begin{array}{ll}
 \alpha_{12} = +15K_{12}, & \alpha_{21} = +15K_{23}, \\
 \alpha_{23} = +50K_{23}, & \alpha_{32} = +50K_{34}, \\
 \alpha_{34} = +15K_{34}, & \alpha_{43} = +15K_{41} + 7500, \\
 \alpha_{41} = +4K_{41}, & \alpha_{14} = +4K_{12} + 4720.
 \end{array}$$

Zu diesen acht Drehungsgewichten treten noch zwei Gewichte α_5, α_6 hinzu, die von den Bieugungsmomenten der Lasten L_{14} und L_{12} hervorgerufen werden. Die Bieugungsmomente des Stabes A_1A_4 werden dargestellt durch die Trapezfläche $abcd$ (Abb. 33) in Verbindung mit der Parabelfläche dea . Die von der Trapezfläche dargestellten Drehungsgewichte sind in den Gewichten α_{14} und α_{41} bereits enthalten. Hier kommt also nur noch die Parabelfläche in Betracht. Ihre Pfeilhöhe ist gleich

$$\frac{1}{8} \cdot 20 \cdot 840 = 2100 \text{ cm} \cdot \text{t}$$

und ihre Fläche also

$$\frac{2}{3} \cdot 840 \cdot 2100 = 1176000 \text{ cm}^2 \cdot \text{t}.$$

Da für den Stab A_1A_4 :

$$\frac{1}{\epsilon J} = \frac{2 \varphi_{11}}{l_{14}} = \frac{2 \cdot 4}{840} = \frac{1}{105}$$

ist, so hat das von der Parabelfläche dargestellte Drehungsgewicht die Größe

$$\alpha_3 = + \frac{1176000}{105} = +11200.$$

Sein Wert ist *positiv*, weil der Krümmungshalbmesser der von der Last L_{14} erzeugten elastischen Linie *rechts* von der Kette $A_1A_2A_3A_4$ liegt.

Die nach innen zeigende Einzellast

$$L_{12} = 12 \text{ t}$$

des Stabes A_1A_2 erzeugt eine elastische Linie, deren Krümmungshalbmesser *links* von der Kette $A_1A_2A_3A_4$ liegt. Daher ist das von dem Dreieck fik dargestellte Drehungsgewicht α_6 *negativ*.

Das Dreieck hat die Höhe

$$\frac{12 \cdot 200 \cdot 400}{600} = 1600 \text{ cm} \cdot t,$$

daher ist die Fläche

$$\frac{1}{2} 600 \cdot 1600 = 480\,000 \text{ cm}^2 \cdot t,$$

und da für den Stab $A_1 A_2$

$$\frac{1}{\varepsilon J} = \frac{2 \varphi_{12}}{l_{12}} = \frac{2 \cdot 15}{600} = \frac{1}{20}$$

ist, so hat das Drehungsgewicht α_6 die Größe

$$\alpha_6 = -\frac{1}{20} 480\,000 = -24\,000.$$

Dem Schwerpunkt des Dreiecks fil entsprechend sind die Abstände des Drehungsgewichtes α_6 von den beiden Knoten A_1 und A_2 gleich 333,3 und 266,7 cm.

Wir beziehen die Momentengleichungen, die das Gleichgewicht der zehn Drehungsgewichte bedingen, wie im vorigen Beispiel, auf die drei Achsen $B_1 B_1$, $B_2 B_2$, $B_3 B_3$:

$$0 = 353,9 (\alpha_{12} + \alpha_{43}) + 553,9 (\alpha_{14} + \alpha_{41} + \alpha_5) + 220,6 \alpha_6$$

$$0 = 442,1 (\alpha_{23} + \alpha_{32}) + 242,1 (\alpha_{21} + \alpha_{34}) + 42,1 \cdot 7500 - 157,9 (4720 + \alpha_5) + 175,4 \alpha_6$$

$$0 = 420 (\alpha_{12} + \alpha_{21} + \alpha_6 - \alpha_{34} - \alpha_{43}) + 140 (\alpha_{23} + \alpha_{14} - \alpha_{32} - \alpha_{41}).$$

Werden die Werte der Gewichte α in diese Gleichungen eingesetzt, so ergeben sich die drei Formänderungsbedingungen:

$$\text{III 1) } K_{41} = -K_{12} - 821$$

$$\text{III 2) } K_{23} = -0,516 K_{12} + 385$$

$$\text{III 3) } K_{34} = +0,516 K_{12} - 136.$$

Die Gleichung Ia bleibt, wie im vorigen Beispiel:

$$\text{Ia) } 0 = -K_{12} + K_{41} + K_{23} - K_{34} + 8900.$$

Die acht Gleichungen II), III), Ia) bestimmen die Knotenmomente in Zentimeter-Tonnen:

$$K_{12} = +2837, \quad K_{21} = +1078,$$

$$K_{23} = -1078, \quad K_{32} = -1327,$$

$$K_{34} = +1327, \quad K_{43} = +3158,$$

$$K_{41} = -3658, \quad K_{14} = -4017.$$

In bekannter Weise ergeben sich hieraus die Querkräfte Q und die Stabkräfte S in Tonnen:

$$Q_{12} = \frac{K_{12} + K_{21}}{600} = +6,53$$

$$Q_{23} = \frac{K_{23} + K_{32}}{840} = -2,86$$

$$Q_{34} = \frac{K_{34} + K_{43}}{600} = +7,47$$

$$Q_{41} = \frac{K_{41} + K_{14}}{840} = -9,14$$

$$S_{12} = +Q_{14} - 48 = -57,14$$

$$S_{23} = +Q_{12} - 8 = -1,47$$

$$S_{34} = +Q_{23} - 110 = -112,86$$

$$S_{41} = +Q_{34} + 2 = +9,47.$$

Die Biegemomente der Rahmenstäbe sind in der Abb. 33 dargestellt. In betreff der Vorzeichen ist zu beachten, daß nach Gleichung 23) die Biegemomente neben den Knoten die folgenden Werte haben:

$$M_{12} = +K_{12} = +2837,$$

$$M_{21} = -K_{21} = -1078,$$

$$M_{23} = +K_{23} = -1078,$$

$$M_{32} = -K_{32} = +1327,$$

$$M_{34} = +K_{34} = +1327,$$

$$M_{43} = -K_{43} = -3158,$$

$$M_{41} = +K_{41} = -3658,$$

$$M_{14} = -K_{14} = +4017.$$

Die Wendepunkte w der elastischen Linien zerlegen die Rahmenstäbe in die Strecken mit positiven und mit negativen Biegemomenten. Erstere biegen sich nach außen, letztere nach innen.

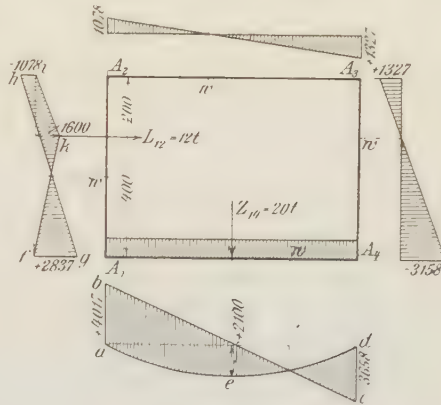


Abb. 33.

12. Die Berechnung des vollwandigen Bogenträgers mit eingespannten Enden. In der Abhandlung XI ist die Berechnung des Bogenträgers mit Kämpfergelenken beschrieben worden. Daher kommt hier nur der Bogenträger mit eingespannten Enden in Betracht. In der Abb. 34 bezeichnet ABC einen elastischen Stab, dessen Enden A und C starr eingespannt und dessen Abmessungen und Belastungen gegeben sind.

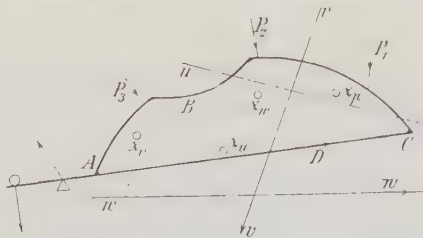


Abb. 34.

An dem Zustand dieses Stabes wird nichts geändert, wenn man die Einspannungen beseitigt, die Stabenden A und C mit einem

unbiegsamen und *undehnbaren* Stabe ADC starr verbindet und diesen Stab links von A in statisch bestimmter Weise durch ein festes und ein bewegliches Auflager stützt. Man hat es dann mit einer geschlossenen Kette $ABCD A$ zu tun, deren Drehungsgewichte

$$d\alpha = \frac{M ds}{\varepsilon J}$$

eine Gleichgewichtsgruppe bilden müssen. Diese Bedingung bestimmt die drei auf statischem Wege nicht bestimmbar Größen. Wir durchschneiden den starren Stab AC im Punkte D und ersetzen die unbekannte Kraft R , die vom Stabteil AD auf den Stabteil DC übertragen wird, durch *drei* Kräfte U, V, W von *beliebig gewählter*, also bekannter Lage und unbekannter Größe. Diese drei Kräfte bilden die statisch nicht bestimmbar Größen. Wir geben den Achsen u, v, w einen bestimmten Sinn und den Kräften U, V, W das positive Vorzeichen, wenn sie den Sinn der Achsen haben. Nachdem der Stab ADC durchschnitten ist, bildet der Stab ABC einen bei A eingespannten Träger, der außer den gegebenen Lasten $P_1, P_2, P_3 \dots$ die drei unbekannten Lasten U, V, W trägt. Um das Biegemoment M des Stabes ABC in irgend einem Punkte B zu bestimmen, sind in bezug auf diesen Punkt die Momente M_u, M_v, M_w der drei Kräfte U, V, W und die Momentensumme M_p der Lasten P_1, P_2 zu bilden, *die rechts von B liegen*, also den Stabteil BC belasten:

$$M = M_u + M_v + M_w + M_p.$$

Bezeichnet man mit u, v, w die Abstände des Punktes B von den Achsen u, v, w und legt diesen Abständen das positive Vorzeichen bei, wenn B *rechts* von den Achsen liegt, so ist

$$M_u = Uu, \quad M_v = Vv, \quad M_w = Ww$$

und also

$$M = Uu + Vv + Ww + M_p.$$

Der am Punkte B liegende unendlich kleine Stabteil ds hat demnach das Drehungsgewicht:

$$d\alpha = \frac{Uu ds}{\varepsilon J} + \frac{Vv ds}{\varepsilon J} + \frac{Ww ds}{\varepsilon J} + \frac{M_p ds}{\varepsilon J}.$$

Wir bezeichnen mit $\alpha_u, \alpha_v, \alpha_w, \alpha_p$ die *Schwerpunkte* der Drehungsgewichte $d\alpha$, die auf der ganzen Länge des Stabes ABC von den Lasten

$$U = +1 \text{ t}, \quad V = +1 \text{ t}, \quad W = +1 \text{ t}$$

$$\alpha_n = \int \frac{u ds}{\varepsilon J}, \quad \alpha_v = \int \frac{c ds}{\varepsilon J}, \quad \alpha_w = \int \frac{w ds}{\varepsilon J}, \quad \alpha_p = \int \frac{M_p ds}{\varepsilon J},$$

wenn die Integrale auf die ganze Stablänge AD ausgedehnt werden können und ihre *Lagen* können in bekannter Weise durch Momentengleichungen bestimmt werden. Es ist zu beachten, daß die Drehungsgewichte des zur Kette gehörenden starren Stabes AD gleich null sind, weil für diesen Stab ϵJ unendlich groß ist.

Die Gleichgewichtsgruppe der Drehungsgewichte der geschlossenen Kette $ABCD A$ wird demnach von den vier Gewichten

$$U_{a_u}, \quad V_{a_v}, \quad W_{a_w} \quad \text{und} \quad a_r$$

gebildet. Werden die Bedingungen des Gleichgewichts ausgedrückt durch drei Momentengleichungen in bezug auf die Achsen

$$U_r \quad U_{16}, \quad U_{24} \quad U_{16}, \quad U_{24} \quad U_r,$$

so enthält die erste Gleichung nur die Unbekannte U , die zweite nur V und die dritte nur W . Der im vorstehenden beschriebene Rechnungsgang, der nicht nur auf Bogenträger, sondern in gleicher Weise auch auf beliebig geformte Rahmenträger angewandt werden kann, möge durch ein einfaches Zahlenbeispiel erläutert werden.

Beispiel 18. Die Achse des in Abb. 35 nicht nach Maß skizzierten symmetrischen Bogenträgers ist ein Kreisbogen, dessen Halbmesser gleich 2000 cm und dessen Zentriwinkel gleich 60° ist. Die Bogenachse ist durch die Teilpunkte $B_0, B_1, B_2 \dots B_6$ in acht Teile von gleichen Längen Δs zerlegt. Die Werte von

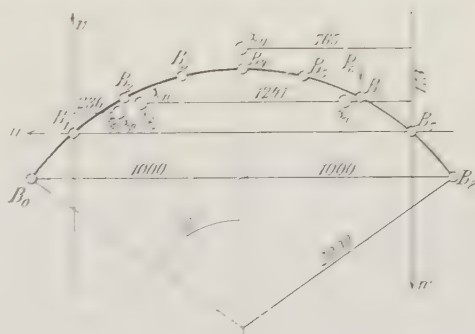


Abb. 35.

$$\frac{1}{\epsilon J} \text{ in } \frac{1}{10^6 \text{ cm}^2 \cdot \text{t}}$$

für die Teilpunkte B sind in der folgenden Zahlentafel verzeichnet. Der

Träger ist in dem Teilpunkt B_6 mit einer lotrechten Einzellast

$$P_{\ell} = 1 \text{ t}$$

belastet. Die wagerechte, nach *links* zeigende Achse u geht durch die Teilpunkte B_1 und B_7 , die lotrechte Achse v geht durch den Teilpunkt B_1 und zeigt nach *oben*, die lotrechte Achse w geht durch

den Teilpunkt B_7 und zeigt nach unten. Die nachfolgende Zahlen-
tafel enthält für die neun Teilpunkte die Werte der Größen

$$u, \quad v, \quad \frac{1}{\varepsilon J}, \quad \frac{u}{\varepsilon J}, \quad \frac{v}{\varepsilon J}, \quad \frac{u^2}{\varepsilon J}, \quad \frac{v^2}{\varepsilon J}, \quad \frac{uv}{\varepsilon J},$$

$$M_p, \quad \frac{M_p}{\varepsilon J}, \quad \frac{M_p u}{\varepsilon J} \quad \text{und} \quad \frac{M_p v}{\varepsilon J}.$$

Vermittels dieser Zahlen sind die von der Last $P_6 = 1 \text{ t}$ er-
zeugten Kräfte U, V, W zu berechnen.

Teilpunkt	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
$u = \text{cm}$	— 116	0	+ 84	+ 135	+ 152	+ 135	+ 84	0	—
$v = \text{cm}$	— 235	0	+ 248	+ 504	+ 765	+ 1 026	+ 1 282	+ 1 530	+ 1 782
$\frac{1}{\varepsilon J} = \frac{1}{10^{10} \text{ cm}^2 \cdot \text{t}}$	20	19	18	17	16	17	18	19	20
$\frac{u}{\varepsilon J} = \frac{1}{10^{10} \text{ cm} \cdot \text{t}}$	— 2320	0	+ 1512	+ 2295	+ 2 432	+ 2 295	+ 1 512	0	— 2320
$\frac{v}{\varepsilon J} = \frac{1}{10^{10} \text{ cm} \cdot \text{t}}$	— 4700	0	+ 4464	+ 8568	+ 12 240	+ 17 442	+ 23 076	+ 29 070	+ 35 072
$\frac{u^2}{\varepsilon J} = \frac{1}{10^7 \text{ t}}$	+ 269	0	+ 127	+ 310	+ 370	+ 310	+ 127	0	+ 269
$\frac{v^2}{\varepsilon J} = \frac{1}{10^7 \text{ t}}$	+ 1105	0	+ 1107	+ 4317	+ 9 365	+ 17 888	+ 29 584	+ 44 477	+ 62 325
$\frac{uv}{\varepsilon J} = \frac{1}{10^7 \text{ t}}$	+ 545	0	+ 375	+ 1156	+ 1 860	+ 2 354	+ 1 938	0	— 405
$M_p = \text{cm} \cdot \text{t}$	+ 1517	+ 1282	+ 1034	+ 778	+ 517	+ 256	0	0	0
$\frac{M_p}{\varepsilon J} = \frac{1}{10^8 \text{ t}}$	+ 303	+ 244	+ 186	+ 132	+ 83	+ 44	0	0	0
$\frac{M_p u}{\varepsilon J} = \frac{1}{10^6}$	— 352	0	+ 156	+ 179	+ 126	+ 59	0	0	0
$\frac{M_p v}{\varepsilon J} = \frac{1}{10^6}$	— 712	0	+ 461	+ 665	+ 635	+ 451	0	0	0

Vermittels der *Simpsonschen Regel* ergeben sich aus diesen
Zahlenwerten die Größen:

$$\alpha_u = \Sigma \frac{u \Delta s}{\varepsilon J} = + 24 632 \frac{\Delta s}{3 \cdot 10^{10}}, \quad \Sigma \frac{u^2 \Delta s}{\varepsilon J} = + 4 266 \frac{\Delta s}{3 \cdot 10^7}.$$

Der Schwerpunkt α_u liegt auf der Symmetrieachse des Bogen-trägers, und sein Abstand von der Achse u ist

$$\frac{4266 \cdot 10^3}{24\,632} = 173 \text{ cm.}$$

Man erhält ferner:

$$\alpha_v = \Sigma \frac{v \mathcal{A} s}{\varepsilon J} = + 330\,480 \frac{\mathcal{A} s}{3 \cdot 10^{10}}$$

$$\Sigma \frac{v^2 \mathcal{A} s}{\varepsilon J} = + 410\,245 \frac{\mathcal{A} s}{3 \cdot 10^7}$$

$$\Sigma \frac{uv \mathcal{A} s}{\varepsilon J} = + 18\,836 \frac{\mathcal{A} s}{3 \cdot 10^7}$$

und hieraus die Abstände des Schwerpunktes α_v von den Achsen u und v :

$$u = \frac{18\,836 \cdot 10^3}{330\,480} = + 57 \text{ cm}$$

$$v = \frac{410\,245 \cdot 10^3}{330\,480} = + 1241 \text{ cm.}$$

Der Schwerpunkt α_w liegt symmetrisch zu α_v und hat dasselbe Gewicht.

Endlich ergeben sich Gewicht und Lage des Schwerpunktes α_p durch die Gleichungen:

$$\alpha_p = \frac{M_p \mathcal{A} s}{\varepsilon J} = + 2521 \frac{\mathcal{A} s}{3 \cdot 10^8}$$

$$\Sigma \frac{u M_p \mathcal{A} s}{\varepsilon J} = + 1164 \frac{\mathcal{A} s}{3 \cdot 10^6}$$

$$\Sigma \frac{v M_p \mathcal{A} s}{\varepsilon J} = 5944 \frac{\mathcal{A} s}{3 \cdot 10^6}.$$

Die Abstände des Schwerpunktes α_p von den Achsen u und v sind daher:

$$u = + \frac{116\,400}{2521} = + 46 \text{ cm}$$

$$v = + \frac{594\,400}{2521} = + 236 \text{ cm.}$$

Diese Abmessungen bestimmen die in nebenstehender Skizze (Abb. 36) eingeschriebenen Momentenarme. Die Momentengleichungen, welche das Gleichgewicht der vier Drehungsgewichte α_p , $U\alpha_u$, $V\alpha_v$, $W\alpha_w$ bedingen, fordern demnach:

$$0 = 11 \alpha_p - 116 U\alpha_u$$

$$0 = 2 \alpha_p - 232 V\alpha_v$$

$$0 = 256 \alpha_p + 232 W\alpha_w.$$

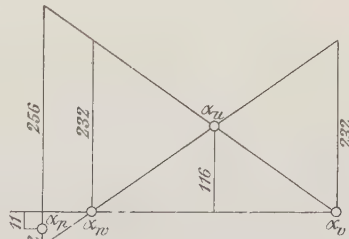


Abb. 36.

Werden die oben berechneten Werte von α_p , α_u , α_v , α_w eingesetzt, so ergibt sich:

$$U = +0,97 \text{ t}$$

$$V = +0,007 \text{ t}$$

$$W = -0,84 \text{ t.}$$

13. Die Berechnung der Nebenspannungen in Fachwerken mit steifen Knotenverbindungen. Die vorliegende Aufgabe hat offenbar große Ähnlichkeit mit der im Abschnitt 10 gegebenen Berechnung der *Pfostenträger*, und der dort gewählte Rechnungsgang kann hier fast unverändert beibehalten werden. Die Abweichungen ergeben sich aus folgenden Umständen. Die beiden Kräfte R_{34} , R_{43} , die von einem Stabe A_3A_4 auf seine beiden Knoten übertragen werden (Abb. 19, S. 506), weichen in einem *Fachwerk* von der Stabachse nur äußerst wenig ab, so daß die Stabkräfte S_{34} , S_{43} mit den Kräften R_{34} , R_{43} der Größe nach sehr nahe übereinstimmen. Die Stabkräfte S haben daher fast genau dieselben Größen wie in einem Fachwerk mit gelenkigen Knoten und können aus den gegebenen Lasten in bekannter Weise ermittelt werden. Sie gelten hier als gegebene Größen, und die bei der Berechnung der *Pfostenträger* mit I bezeichnete Gleichungsgruppe fällt also fort. Die Gruppe der Gleichungen II, welche fordert, daß für jeden Knoten die algebraische Summe der Knotenmomente K gleich null sein muß, bleibt unverändert. Die *Formänderungsbedingungen* eines Stabdreiecks, dessen Sinn durch die Zahlenfolge 1, 2, 3 der drei Knoten angegeben wird, können dargestellt werden durch die sechs Drehungsgewichte:

$$\alpha_{12} = +\varphi_{12} K_{12}, \quad \alpha_{21} = -\varphi_{12} K_{21},$$

$$\alpha_{23} = +\varphi_{23} K_{23}, \quad \alpha_{32} = -\varphi_{23} K_{32},$$

$$\alpha_{31} = +\varphi_{31} K_{31}, \quad \alpha_{13} = -\varphi_{31} K_{13}$$

in Verbindung mit den Dehnungsgewichten der drei Knoten:

$$\beta_1 = \delta_1 - \delta_3, \quad \beta_2 = \delta_2 - \delta_1, \quad \beta_3 = \delta_3 - \delta_2.$$

Bei den *Pfostenträgern* sind die Drehungsgewichte α sehr groß, so daß der Einfluß der kleinen Dehnungsgewichte β fast verschwindet. Bei den *Fachwerken* ist dies nicht der Fall. Hier sind beide Gewichtsguppen von derselben Größenordnung, und daher dürfen die Gewichte β nicht vernachlässigt werden. Sind die Stabkräfte S und die Temperaturänderungen t bekannt, so werden die Stabdehnungen δ durch die Formel

$$\delta = \frac{l}{\varepsilon F} + \lambda t$$

bestimmt. Sie gelten hier als gegebene Größen. Die *Formänderungsbedingungen* werden für jedes Stabdreieck ausgedrückt

durch drei Gleichungen der Gruppe III von der Form der Gleichungen 8):

$$0 = \sum u\alpha + \sum v\beta,$$

d. h. für je zwei Achsen u, v , die in der Bildebene so liegen, daß der Uhrzeiger von u nach v 90° durchläuft, muß die algebraische Momentensumme der sechs Gewichte α für die Achse u und der drei Gewichte β für die Achse v gleich null sein. Die drei Achsen u dürfen nicht in einem Punkte sich schneiden, im übrigen können sie nach Belieben gewählt werden. Man wählt sie zweckmäßig so, daß jede Gleichung nur vier unbekannte Gewichte α , also nur vier Knotenmomente K enthält.

Ein aus aneinandergereihten Stabdreiecken bestehendes Fachwerk von k Knoten enthält $(k - 2)$ Stabdreiecke und $(2k - 3)$ Stäbe, also $(4k - 6)$ unbekannte Knotenmomente K . Zu ihrer Berechnung dienen die k Gleichungen der Gruppe II und die

$$3(k - 2) = 3k - 6$$

Formänderungsbedingungen der Gruppe III.

Beispiel 19. In nebenstehender Abbildung sind die Form, die Abmessungen und die Knotenlasten des Fachwerks angegeben. Die folgende Zahlentafel enthält

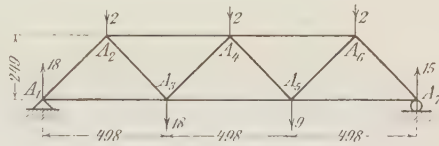


Abb. 37.

Stab	l cm	I cm ²	S t	$10^5 \vartheta$	$\frac{10^5 \varphi}{1 \text{ cm} \cdot \text{t}}$
$A_1 A_2$	352	50	- 26	- 26	11
$A_1 A_3$	498	50	+ 18	+ 18	17
$A_2 A_3$	352	40	+ 23	+ 29	14
$A_2 A_4$	498	60	- 34	- 28	12
$A_3 A_4$	352	30	+ 3	+ 5	20
$A_3 A_5$	498	70	+ 32	+ 23	11
$A_4 A_5$	352	30	- 6	- 10	20
$A_4 A_6$	498	60	- 28	- 23	12
$A_5 A_6$	352	40	+ 18	+ 22	14
$A_5 A_7$	498	50	+ 15	+ 15	17
$A_6 A_7$	352	50	- 21	- 21	11

die Momentengleichungen III sich beziehen. Die gemeinschaftliche Beizahl 10^{-5} der Werte α und β wurde fortgelassen. Aus diesen Zeichnungen können die $4k - 6 = 22$ Gleichungen zur Bestimmung der 22 unbekannten Knotenmomente K ohne weiteres abgelesen werden.

Die Gleichungsgruppe II.

- II 1) $0 = K_{13} + K_{12}$
- II 2) $0 = K_{24} + K_{23} + K_{21}$
- II 3) $0 = K_{35} + K_{34} + K_{32} + K_{31}$
- II 4) $0 = K_{46} + K_{45} + K_{43} + K_{42}$
- II 5) $0 = K_{57} + K_{56} + K_{54} + K_{53}$
- II 6) $0 = K_{67} + K_{65} + K_{64}$
- II 7) $0 = K_{76} + K_{75}$.

Die Gleichungsgruppe III

für das Stabdreieck $A_1 A_2 A_3$:

- III 1) $0 = -17 K_{31} + 2 \cdot 17 K_{13} - 2 \cdot 11 K_{12} + 11 K_{21} - 3 \cdot 11$
- III 2) $0 = -14 K_{23} + 2 \cdot 11 K_{21} - 2 \cdot 11 K_{12} + 17 K_{13} - 3 \cdot 44$
- III 3) $0 = -14 K_{32} + 14 K_{23} - 11 K_{12} + 17 K_{13} - 3 \cdot 11$;

für das Stabdreieck $A_2 A_3 A_4$:

- III 4) $0 = -12 K_{42} + 2 \cdot 12 K_{24} - 2 \cdot 14 K_{23} + 14 K_{32} + 3 \cdot 33$
- III 5) $0 = -20 K_{34} + 2 \cdot 14 K_{32} - 2 \cdot 14 K_{23} + 12 K_{24} - 3 \cdot 57$
- III 6) $0 = -20 K_{43} + 20 K_{34} - 14 K_{23} + 12 K_{24} + 3 \cdot 33$;

für das Stabdreieck $A_3 A_4 A_5$:

- III 7) $0 = -11 K_{53} + 2 \cdot 11 K_{35} - 2 \cdot 20 K_{34} + 20 K_{43} + 3 \cdot 33$
- III 8) $0 = -20 K_{45} + 2 \cdot 20 K_{43} - 2 \cdot 20 K_{34} + 11 K_{35} - 3 \cdot 18$
- III 9) $0 = -20 K_{54} + 11 K_{53} - 20 K_{34} + 20 K_{43} - 3 \cdot 18$;

für das Stabdreieck $A_4 A_5 A_6$:

- III 10) $0 = -12 K_{64} + 2 \cdot 12 K_{46} - 2 \cdot 20 K_{45} + 20 K_{54} + 3 \cdot 45$
- III 11) $0 = -14 K_{56} + 2 \cdot 20 K_{54} - 2 \cdot 20 K_{45} + 12 K_{46} - 3 \cdot 13$
- III 12) $0 = -14 K_{65} + 14 K_{56} - 20 K_{45} + 12 K_{46} + 3 \cdot 45$;

für das Stabdreieck $A_5 A_6 A_7$:

- III 13) $0 = -17 K_{75} + 2 \cdot 17 K_{57} - 2 \cdot 14 K_{56} + 14 K_{65} + 3 \cdot 36$
- III 14) $0 = -11 K_{67} + 2 \cdot 14 K_{65} - 2 \cdot 14 K_{56} + 17 K_{57} + 3 \cdot 7$
- III 15) $0 = -11 K_{76} + 11 K_{67} - 14 K_{56} + 17 K_{57} + 3 \cdot 36$.

Läßt man die beiden Größen K_{12} und K_{21} vorläufig unbestimmt, so können von den vorstehenden zweiundzwanzig Gleichungen zwanzig in der Weise geordnet werden, daß jede nur *eine* neue Unbekannte enthält, die sonach als Funktion von K_{12} und K_{21} sich ergibt. Die Reihenfolge, in der die Gleichungen zu verwenden sind, ist ohne weiteres zu erkennen: II 1), III 1), III 2), III 3), II 2), III 4), III 5), III 6), II 3), III 7), III 8), III 9), II 4), III 10), III 11), III 12), II 5), III 13), III 14), III 15). In dieser Reihenfolge ergeben sich die Knotenmomente K_{13} , K_{31} , K_{23} , K_{32} , K_{24} , K_{42} , K_{34} , K_{43} , K_{35} , K_{53} , K_{45} , K_{54} , K_{46} , K_{64} , K_{56} , K_{65} , K_{57} , K_{75} , K_{67} , K_{76} als Funktionen von K_{12} und K_{21} . Zum *zweiten* Mal können die beiden Größen K_{67} und K_{75} mittels der Gleichungen II 6) und II 7) durch K_{12} und K_{21} ausgedrückt werden. Die beiden Gleichungspaare (III 14, II 6) und (III 13, II 7) ergeben also zwei Gleichungen, welche die Zahlenwerte von K_{12} und K_{21} und dadurch alle anderen Knotenmomente bestimmen. Die Ausführung dieser Zahlenrechnung hat kein Interesse und ist daher hier fortgelassen.

Wenn, wie im vorliegenden Beispiel, das Fachwerk eine symmetrische Form hat, so kann man durch geeignete Wahl der Momentenachsen auch den Gleichungen III eine symmetrische Form geben, d. h. eine Form, in der die symmetrisch belegenen Knotenmomente mit gleichen Beizahlen auftreten. Ein erheblicher Rechenvorteil wird jedoch hierdurch nicht erreicht, weil es sich hier nicht wie bei dem in der Abhandlung XII, 21 beschriebenen Verfahren um die Auflösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten handelt. Das im vorstehenden beschriebene Verfahren erfordert nur *ein* Mal die Auflösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, wenn das Stabnetz des Fachwerks, wie es die Regel ist, aus aneinandergelegten Dreiecken besteht. Wesentlich unbequemer wird allerdings die Zahlenrechnung, wenn das Stabnetz Vierecke oder gar Fünfecke enthält. Solche Fälle sind jedoch als Ausnahmen zu betrachten und brauchen hier nicht näher erörtert zu werden.

Die Gleichungen II sind unter der Voraussetzung aufgestellt, daß die an einem Knoten zusammentreffenden Stabachsen mit der Knotenlast in *einem* Punkte sich schneiden. Eine Abweichung hiervon ist immer schädlich, aber zuweilen nicht zu vermeiden, z. B. wenn der Querschnitt einer geraden Gurtung an einem Knoten seine Größe ändert, wie es im vorliegenden Beispiel an den Knoten A_3 und A_5 der Fall ist. Liegt die Stabachse A_3A_5 infolge dieses

Umstandes um 1,2 cm unter dem gemeinschaftlichen Schnittpunkt der drei Stabachsen A_3A_1 , A_3A_2 , A_3A_4 mit der Knotenlast, so ändert sich, da

$$S_{35} = + 32 \text{ t}$$

ist, die Momentengleichung II 3) wie folgt:

$$\text{II 3) } 0 = K_{35} + K_{34} + K_{32} + K_{31} - 32 \cdot 1,2,$$

weil der Stab A_3A_5 außer dem unbekannten Bieugungsmoment K_{35} noch das bekannte statische Moment

$$- 1,2 S_{35} = - 1,2 \cdot 32 = - 38,4 \text{ cm} \cdot \text{t}$$

auf den Knoten A_3 überträgt, wodurch die Knotenmomente erheblich geändert werden.

Das im vorstehenden mitgeteilte Rechnungsverfahren gewährt im Vergleich mit dem Verfahren der Abhandlung XII, 21 den wesentlichen Vorteil, daß die zu bestimmenden Knotenmomente K unmittelbar als Unbekannte in die Rechnung eingeführt werden können. Die Auftragung des Verschiebungsplanes und die Auflösung der Gleichungsgruppe zur Bestimmung der Knotendrehwinkel fallen infolgedessen fort. Die Bildung der Gleichungen II und III ist, auch wenn die Stabdreiecke nicht, wie im vorliegenden Beispiel, *rechtwinklig* sind, sehr einfach, und die anschließenden Zahlenrechnungen erfordern, namentlich wenn eine Rechenmaschine zur Verfügung steht, keinen großen Zeitaufwand.

14. Literarische Notiz. Die erste Anwendung der sogenannten *Drehungsgewichte* findet sich in meinem Aufsatz: *Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen* im Jahrgang 1868 der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover. Ein mit diesen Gewichten belastetes Seil wird zur Darstellung der Formänderung eines geraden Balkens benutzt. In der Abhandlung: *Beitrag zur Theorie der elastischen Bogenträger* im Jahrgang 1870 derselben Zeitschrift wird diese Darstellung übertragen auf die Bestimmung der Formänderung und der Stützkkräfte eines vollwandigen Bogenträgers mit Kämpfergelenken. Der *Beitrag zur Theorie des Fachwerks* in den Jahrgängen 1874 und 1875 der Hannoverschen Zeitschrift bestimmt die Formänderung und die statisch nicht bestimmbaren äußeren Kräfte eines Fachwerks mit Hilfe von statischen Momenten der Drehungsgewichte, welche durch die Winkeländerungen der Stabdreiecke dargestellt werden.

Die Jahrgänge 1910, 1911 und 1912 der Zeitschrift *Der Eisenbau* enthalten eine Reihe von Aufsätzen:

Beitrag zur Theorie der Fachwerks, Jahrgang 1910, S. 2 und 93;

Beitrag zur Biegungslehre, Jahrgang 1911, S. 487;

Die Berechnung der Pfostenträger, Jahrgang 1912, S. 85;

Die Berechnung des Brückenrahmens, Jahrgang 1912, S. 150;

Die Berechnung der Nebenspannungen in Fachwerken mit steifen Knotenverbindungen, Jahrgang 1912, S. 181,

in welchen zur Darstellung der Theorie der Träger außer den Drehungsgewichten die *Dehnungsgewichte* verwendet werden.

Abhandlung XIV.

Das Raumbachwerk.

1. Einleitende Bemerkungen. Die Theorie des Raumbachwerks beruht auf derselben Grundlage wie die des ebenen Fachwerks. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, welches in der Hauptgleichung (XII, 2)

$$0 = \sum K dw - \sum S dl \quad (1)$$

zum Ausdruck kommt, beantwortet wie beim ebenen Fachwerk jede Frage, die in bezug auf das Gleichgewicht und die Formänderungen des Raumbachwerks gestellt werden kann. Auch das *zusammengesetzte* Raumbachwerk ist genau in derselben Weise zu berechnen, wie für das ebene Fachwerk in dem Abschnitt 15 der Abhandlung XII beschrieben wurde. In der Wahl der Hilfsmittel zur Ausführung der Untersuchungen besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied. Die graphische Statik, die beim ebenen Fachwerk eine so vielseitige Anwendung findet, ist für das Raumbachwerk fast unbrauchbar, weil die Konstruktionen im Raume nicht allein viel verwickelter, sondern in gleichem Maße auch ungenauer sind als die in der Ebene. Wir geben hauptsächlich aus dem letztgenannten Grunde dem *Rechnungsverfahren* entschieden den Vorzug.

2. Die Stützung des Raumbachwerks. Wie beim ebenen Fachwerk kann die Art der Stützung *durch Hinzufügung von Stützstäben* veranschaulicht werden, also durch Hinzufügung von starren Stäben, welche die Auflagerknoten mit festen Stützpunkten verbinden. Nach der Zahl der Stützstäbe eines Auflagers unterscheiden wir *einfache*, *zweifache* und *dreifache* Stützen oder Auflager. Ist ein Auflagerknoten *A* nur durch *einen* Stab *AB* gestützt, so kann er in der zu *AB* rechtwinklig gestellten Ebene kleine Verschiebungen nach allen Richtungen ausführen. Sind *zwei* Stützstäbe *AB*, *AC* vorhanden, so ist nur *eine* zur Ebene *ABC*

rechtwinklig gerichtete Verschiebung möglich. Ist endlich der Knoten A durch *drei* nicht in einer Ebene liegende Stützstäbe AB , AC , AD mit festen Punkten B , C , D verbunden, so ist jede Verschiebung unmöglich.

3. Die Anzahl und die Anordnung der notwendigen Stäbe. Um k Knoten mit den festen Stützpunkten, *die nicht zu den Knoten gezählt werden*, so zu verbinden, daß die Form und die Lage des Fachwerks durch die Stablängen bestimmt werden, sind $3k$ Stäbe notwendig; denn jeder Knoten erfordert zur Festlegung gegen die übrigen Knoten und gegen die Stützpunkte drei Stäbe. Die Anordnung dieser $3k$ Stäbe muß so sein, daß kein Teil des Fachwerks *überzählige* Stäbe enthält. Das Fachwerk darf also keine Gruppe von k_1 Knoten enthalten, die miteinander durch mehr als $(3k_1 - 6)$ Stäbe und mit den festen Stützpunkten durch mehr als $3k_1$ Stäbe verbunden sind. Es ist hierbei zu beachten, daß *sechs* Stäbe erforderlich sind, um *vier* Knoten starr miteinander zu verbinden, und daß jeder folgende Knoten *drei* Stäbe erfordert. Um k_1 Knoten starr miteinander zu verbinden, sind daher

$$6 + 3(k_1 - 4) = 3k_1 - 6$$

Stäbe notwendig.

Die Anordnung der $3k$ notwendigen Stäbe hat noch eine zweite Bedingung zu erfüllen: *Die Belastungen des Fachwerks dürfen nicht unendlich große Stabkräfte hervorrufen*; denn dann bildet die Stabverbindung keinen Träger, also auch kein Fachwerk. Nach Abschnitt 5 der Abhandlung XII tritt dieser Fall ein, wenn ein Stab im Zustande des Maximums oder des Minimums seiner Länge sich befindet. Um festzustellen, ob der bezeichnete Ausnahmefall vorliegt, berechnet man die Stabkräfte. Nehmen dieselben sehr große oder gar unendlich große Werte an, so ist die gewählte Fachwerksform unbrauchbar. In jedem anderen Falle hat das Fachwerk eine brauchbare Form. Die Wahl zwischen den verschiedenen brauchbaren Formen gehört nicht in das Gebiet der Statik.

4. Die Gleichgewichtsbedingungen. Bei der Berechnung der Stabkräfte wird zunächst vorausgesetzt, daß die Knoten des Fachwerks von reibungslosen Gelenken gebildet werden, und daß die Belastungen nicht von den Stäben, sondern nur von den Knoten aufgenommen werden. Die Stäbe haben dann nur Zug- und Druckkräfte in ihren Achsenrichtungen zu übertragen. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den Stabkräften und den Knotenlasten

können für jeden Knoten durch *drei* Gleichungen dargestellt werden. Wenn jeder Knoten im Gleichgewichte sich befindet, so ist dies auch für jeden Teil des Fachwerks und für das ganze Fachwerk der Fall. Für ein Raumfachwerk von k Knoten bestehen also zwischen den Stabkräften und den Knotenlasten nicht mehr als $3k$ voneinander unabhängige Gleichgewichtsbedingungen. Bei dieser Abzählung sind, wie nochmals hervorgehoben werden möge, die Stützstäbe zu den Stäben, die festen Stützpunkte aber nicht zu den Knoten des Fachwerks zu zählen.

Wenn ein Raumfachwerk von k Knoten nur die $3k$ notwendigen Stäbe in brauchbarer Anordnung enthält, so genügen die Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der Stabkräfte aus den gegebenen Knotenlasten. Ein solches Fachwerk wird daher ein *einfaches* Raumfachwerk genannt, zur Unterscheidung von dem *zusammengesetzten* Raumfachwerk, welches *mehr* als die $3k$ notwendigen Stäbe enthält. Die Stabkräfte des zusammengesetzten Raumfachwerks sind nicht allein von den Knotenlasten, sondern außerdem von der Temperatur der Stäbe und von der Lage der Stützen abhängig.

5. Die Berechnung der Stabkräfte eines einfachen Raumfachwerks aus den Gleichgewichtsbedingungen der Knoten. Die Bestimmung einer großen Anzahl von Unbekannten aus einer ebenso großen Anzahl von linearen Gleichungen ist in der Regel eine zeitraubende und mühsame Arbeit. Bei der Berechnung eines *ebenen* einfachen Fachwerks kann die Wahl der Gleichgewichtsgruppen und die Reihenfolge der Gleichgewichtsbedingungen in den meisten Fällen so angeordnet werden, daß jede Gleichung nur *eine* unbekannte Stabkraft enthält, und nur in Ausnahmefällen wird ein umständlicheres Verfahren nötig, das am Schluß des Abschnittes 6 der Abhandlung XII beschrieben worden ist. Ein ganz ähnliches Verfahren kann auch beim Raumfachwerk angewandt werden, um der Auflösung der Gleichungen eine tunlichst einfache und übersichtliche Form zu geben.

Unter den Gleichgewichtsgruppen, die durch Zerlegung des Fachwerks in zwei oder mehrere Teile gebildet werden können, sind die von den einzelnen Knoten aufzunehmenden Kräftegruppen in der Regel am einfachsten und für die Bildung der Gleichgewichtsbedingungen am bequemsten, weil alle Kräfte einer solchen Gruppe in *einem* Punkte, dem Knotenpunkte, sich schneiden. Nur in seltenen Fällen gewährt eine andere Zerlegung Vorteile. Es handelt sich

also um die Auflösung von k Gruppen von je drei Gleichungen, die zusammen $3k$ unbekannte Stabkräfte enthalten, während in jeder Gruppe in der Regel *mehr als drei* Unbekannte vorkommen. Um diese Anzahl auf drei zurückzuführen und dadurch die *Auflösung einer jeden einzelnen Gruppe abgesondert von den übrigen zu ermöglichen*, ordnen wir die $3k$ Stäbe des Fachwerks in zwei Gruppen. Die Stabkräfte der *ersten* Gruppe werden zunächst als *unbekannte Belastungen* in die Rechnung eingeführt. Die betreffenden Stäbe werden daher *Laststäbe* und ihre Stabkräfte *Stablasten* genannt. Die Laststäbe werden in möglichst geringer Anzahl n so ausgewählt, daß bei geeigneter Reihenfolge der Knoten an jedem außer den Stablasten *nicht mehr als drei* unbekannte Stabkräfte angreifen, so daß durch Auflösung der drei Gleichungen die unbekannten Stabkräfte der *zweiten* Gruppe als Funktionen der gegebenen Knotenlasten und der unbekannten Stablasten dargestellt werden können. Da die Anzahl der Gleichungen $3k$, die Anzahl der unbekannten Stabkräfte der zweiten Gruppe aber $(3k - n)$ beträgt, so können auf dem bezeichneten Wege n Stabkräfte *zweimal* als Funktionen der Lasten ausgedrückt werden. Indem man jedesmal diese beiden Werte einander gleichsetzt, ergeben sich n Gleichungen, die als Unbekannte nur die Stablasten, d. h. die Stabkräfte der ersten Gruppe enthalten. Um die Auflösung dieser n Gleichungen zu erleichtern, ist es erwünscht, die Anzahl der Laststäbe nicht größer als nötig zu wählen. Die Ausführung der Rechnung soll an einigen Beispielen erläutert werden.

6. Erstes Beispiel. Berechnung der Stabkräfte einer Kuppel nach Zimmermannscher Bauart. Das in den Abb. 1 und 2 im Aufriß und Grundriß dargestellte Raumbachwerk hat zwölf Knoten, die mit den römischen Ziffern I bis XII bezeichnet sind. Die acht unteren Knoten sind *zweifach* gestützt, nämlich durch je einen wagerechten und einen lotrechten Stützstab; der Knoten III z. B. durch die Stützstäbe 25 und 29. Die Stabnummern der lotrechten Stützstäbe sind im Grundriß neben den Knotennummern eingeschrieben. Außer den 16 Stützstäben sind 20 Fachwerkstäbe vorhanden, welche die Nummern 1 bis 20 tragen; die Stützstäbe sind mit den Nummern 21 bis 36 bezeichnet. Das Fachwerk ist ein *einfaches* Raumbachwerk, weil es die folgenden drei Bedingungen erfüllt: es enthält die

$$3 \cdot 12 = 36$$

notwendigen Stäbe, es enthält keinen überzähligen Stab, und die Stabkräfte nehmen, wie die folgende Rechnung zeigt, bestimmte end-

Die Wahl der Laststäbe. Eine einfache Ueberlegung läßt erkennen, daß es im vorliegenden Falle genügt, *zwei* Stäbe als Laststäbe einzuführen, z. B. die Stäbe 1 und 3 oder 5 und 15 oder 7 und 17 usw. Auf die Form und den Umfang der Rechnung hat diese Wahl keinen Einfluß. Um aber den Vorteil der Symmetrie ausnutzen zu können, empfiehlt es sich, nicht nur *ein* Paar von Stäben, sondern auch das hierzu symmetrisch belegene Paar zu den Laststäben zu zählen. Wir wählen die Stäbe 1, 2, 3, 4 und bezeichnen ihre Stabkräfte, also die *Stablasten*, mit (S_1) , (S_2) , (S_3) , (S_4) , um sie von den unbekannten Stabkräften S_5 , S_6 , $S_7 \dots$ der *zweiten* Stabgruppe zu unterscheiden.

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für die Knoten des Raumbuchwerks. Auf den Knoten I wirken die drei Knotenlasten X_1 , Y_1 , Z_1 , die beiden Stablasten (S_1) , (S_3) und die *drei* unbekannten Stabkräfte S_5 , S_7 , S_{15} . Den unbekannten Kräften S geben wir den positiven Sinn von *Zugkräften*. Bei *jeder* unendlich kleinen Bewegung des Knotens ist die Summe der Arbeitsgeschwindigkeiten dieser acht Kräfte gleich null. Wir bezeichnen die Geschwindigkeitskomponenten in der Richtung und dem Sinne der Knotenlasten X_1 , Y_1 , Z_1 mit ξ , η , ζ und setzen, da es sich nicht um die Größe, sondern nur um das Größenverhältnis der Geschwindigkeiten handelt, *eine* dieser Geschwindigkeiten, z. B.

$$\eta = +1.$$

Die drei Knotenlasten haben dann die Arbeitsgeschwindigkeit

$$\xi X_1 + Y_1 + \zeta Z_1;$$

ferner ist die Arbeitsgeschwindigkeit der beiden Stablasten gleich

$$\xi(S_1) + \zeta(S_3),$$

weil die Kräfte (S_1) und (S_3) Richtung und Sinn der Geschwindigkeiten ξ und ζ haben. Um die Arbeitsgeschwindigkeit der Kraft S_5 zu bestimmen, bezeichnen wir mit l_5 die Länge des Stabes 5 und mit x_5 , y_5 , z_5 die Projektionen der Strecke l_5 vom Sinne der Kraft S_5 auf die Richtungen der Knotengeschwindigkeiten ξ , η , ζ . Mit Benutzung dieser Bezeichnungen erhält die Arbeitsgeschwindigkeit von S_5 den algebraischen Wert

$$\frac{S_5}{l_5} (\xi x_5 + y_5 + \zeta z_5).$$

Wir setzen zur Abkürzung $\frac{S_5}{l_5} = s_5$,

und da $x_5 = -4$ Meter, $y_5 = +10$ Meter, $z_5 = 0$ ist, so hat die Arbeitsgeschwindigkeit die Größe

$$s_5 (-4\xi + 10).$$

Die Projektion x_5 ist negativ, weil S_5 nach links, ξ dagegen nach rechts zeigt; y_5 ist positiv, weil S_5 und η beide nach unten zeigen. In gleicher Weise ergeben sich die Arbeitsgeschwindigkeiten der beiden Kräfte S_7 und S_{15} :

$$\frac{S_7}{l_7} (\xi x_7 + y_7 + \zeta z_7) = s_7 (10 - 2\zeta)$$

$$\frac{S_{15}}{l_{15}} (\xi x_{15} + y_{15} + \zeta z_{15}) = s_{15} (-4\xi + 10 + 6\zeta).$$

Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung des Knotens I lautet demnach:

$$0 = \xi X_1 + Y_1 + \zeta Z_1 + \xi (S_1) + \zeta (S_3) + s_5 (-4\xi + 10) \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 = \xi X_1 + Y_1 + \zeta Z_1 + \xi (S_1) + \zeta (S_3) + s_5 (-4\xi + 10) \\ + s_7 (10 - 2\zeta) + s_{15} (-4\xi + 10 + 6\zeta). \end{matrix}} \right\} \quad (2)$$

Die Gleichgewichtsgruppe des Knotens II besteht aus den drei Knotenlasten X_2 , Y_2 , Z_2 , den beiden Stablasten (S_1) , (S_4) und den drei unbekannten Stabkräften S_9 , S_{11} , S_{13} . Als allgemeine Gleichgewichtsbedingung für diesen Knoten ergibt sich auf dem oben beschriebenen Wege:

$$0 = \xi X_2 + Y_2 + \zeta Z_2 + \xi (S_1) + \zeta (S_4) + s_9 (10 - 2\zeta) \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 = \xi X_2 + Y_2 + \zeta Z_2 + \xi (S_1) + \zeta (S_4) + s_9 (10 - 2\zeta) \\ + s_{11} (-4\xi + 10) + s_{13} (8\xi + 10 - 2\zeta). \end{matrix}} \right\} \quad (3)$$

Bei der Bildung der Gleichgewichtsbedingungen für die Knoten III, IV, V, VI ist zu beachten, daß die genaue Kenntnis der lotrechten Stützkkräfte kein Interesse hat. Um die Bedingungen zu vereinfachen, können daher von vornherein die lotrechten Geschwindigkeiten dieser Knoten

$$\eta = 0$$

gesetzt werden. Die Gleichgewichtsbedingungen erhalten hierdurch die einfachere Form:

$$0 = \xi X_3 + \zeta Z_3 + 4\xi s_5 + s_{17} (4\xi - 2\zeta) + 3 s_{25} \zeta \quad (4)$$

$$0 = \xi X_4 + \zeta Z_4 + 2 s_7 \zeta + s_{13} (8\xi + 2\zeta) + s_{17} (-4\xi + 2\zeta) + 4 \xi s_{21} \quad (5)$$

$$0 = \xi X_5 + \zeta Z_5 + 2 s_9 \zeta + s_{19} (-4\xi + 2\zeta) + 4 s_{23} \xi \quad (6)$$

$$0 = \xi X_6 + \zeta Z_6 + 4 \xi s_{11} + s_{16} (4\xi + 6\zeta) + s_{19} (4\xi - 2\zeta) + 3 s_{27} \zeta. \quad (7)$$

Die Auflösung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen. Um aus einer der vorstehenden Gleichungen eine ihrer drei Unbekannten zu bestimmen, setzt man die Faktoren der anderen beiden Unbekannten gleich null, mit anderen Worten: man wählt die Geschwindigkeiten ξ und ζ jedesmal so, daß nur die zu bestimmende Stabkraft Arbeit verrichtet.

Stabkraft S_5 . Um s_5 durch Gleichung 2) zu bestimmen, sind die Faktoren von s_7 und s_{15} gleich null zu setzen:

$$10 - 2\zeta = 0, \quad -4\xi + 10 + 6\zeta = 0;$$

also ist $\zeta = +5, \quad \xi = +10.$

Aus Gleichung 2) folgt dann:

$$s_5 = \frac{S_5}{l_5} = \frac{X_1}{3} + \frac{Y_1}{30} + \frac{Z_1}{6} + \frac{(S_1)}{3} + \frac{(S_3)}{6}. \quad (8)$$

Stabkraft S_7 . Man setzt die Faktoren von s_5 und s_{15} in Gleichung 2) gleich null:

$$-4\xi + 10 = 0, \quad -4\xi + 10 + 6\zeta = 0$$

und erhält

$$\xi = +\frac{5}{2}, \quad \zeta = 0$$

und

$$s_7 = \frac{S_7}{l_7} = -\frac{X_1}{4} - \frac{Y_1}{10} - \frac{(S_1)}{4}. \quad (9)$$

Stabkraft S_{15} . Man setzt in Gleichung 2)

$$-4\xi + 10 = 0, \quad 10 - 2\zeta = 0$$

und erhält hierdurch:

$$\xi = +\frac{5}{2}, \quad \zeta = +5$$

$$s_{15} = \frac{S_{15}}{l_{15}} = -\frac{X_1}{12} - \frac{Y_1}{30} - \frac{Z_1}{6} - \frac{(S_1)}{12} - \frac{(S_3)}{6}. \quad (10)$$

In gleicher Weise werden die drei Stabkräfte S_9 , S_{11} , und S_{13} durch die Gleichung 3) bestimmt:

Stabkraft S_9 . Man setzt

$$-4\xi + 10 = 0, \quad 8\xi + 10 - 2\zeta = 0,$$

also $\xi = +\frac{5}{2}, \quad \zeta = +15$

und erhält aus Gleichung 3):

$$s_9 = \frac{S_9}{l_9} = \frac{X_2}{8} + \frac{Y_2}{20} + \frac{3Z_2}{4} + \frac{(S_1)}{8} + \frac{3(S_4)}{4}. \quad (11)$$

Stabkraft S_{11} .

$$10 - 2\zeta = 0, \quad 8\xi + 10 - 2\zeta = 0$$

$$\zeta = +5, \quad \xi = 0$$

$$s_{11} = \frac{S_{11}}{l_{11}} = -\frac{Y_2}{10} - \frac{Z_2}{2} - \frac{(S_4)}{2}. \quad (12)$$

Stabkraft S_{13} .

$$10 - 2\zeta = 0, \quad -4\xi + 10 = 0$$

$$\zeta = +5, \quad \xi = +\frac{5}{2}$$

$$s_{13} = \frac{S_{13}}{l_{13}} = -\frac{X_2}{8} - \frac{Y_2}{20} - \frac{Z_2}{4} - \frac{(S_1)}{8} - \frac{(S_4)}{4}. \quad (13)$$

Jede der folgenden Gleichgewichtsbedingungen 4) bis 7) enthält nur *zwei* unbekannte Stabkräfte. Man kann daher die Geschwindigkeiten ξ und ζ so wählen, daß eine der Unbekannten den Faktor null, die andere den Faktor -1 erhält, wodurch die Rechnung vereinfacht wird.

Stabkraft S_{17} . Man setzt in Gleichung 4):

$$4\xi - 2\zeta = -1 \quad \text{und} \quad 3\zeta = 0$$

oder $\zeta = 0, \quad \xi = -\frac{1}{4}$

und erhält hierdurch:

$$s_{17} = -\frac{X_3}{4} - s_5,$$

und indem man den Wert von s_5 aus Gleichung 8) einsetzt:

$$s_{17} = \frac{S_{17}}{l_{17}} = -\frac{X_1}{3} - \frac{Y_1}{30} - \frac{Z_1}{6} - \frac{X_3}{4} - \frac{(S_1)}{3} - \frac{(S_3)}{6}. \quad (14)$$

Stabkraft S_{25} . Man setzt in Gleichung 4):

$$3\zeta = -1, \quad 4\xi - 2\zeta = 0,$$

also $\zeta = -\frac{1}{3}, \quad \xi = -\frac{1}{6}$

und erhält: $s_{25} = -\frac{X_3}{6} - \frac{Z_3}{3} - \frac{2}{3}s_5,$

daher nach Gleichung 8):

$$s_{25} = \frac{S_{25}}{l_{25}} = -\frac{2X_1}{9} - \frac{Y_1}{45} - \frac{Z_1}{9} - \frac{X_3}{6} - \frac{Z_3}{3} - \frac{2(S_1)}{9} - \frac{(S_3)}{9}. \quad (15)$$

Stabkraft S_{17} . Man setzt in Gleichung 5):

$$-4\xi + 2\zeta = -1, \quad 4\xi = 0,$$

also $\xi = 0 \quad \text{und} \quad \zeta = -\frac{1}{2}$

und erhält in Verbindung mit den Gleichungen 9) und 13):

$$s_{17} = \frac{S_{17}}{l_{17}} = \frac{X_1}{4} + \frac{Y_1}{10} + \frac{X_2}{8} + \frac{Y_2}{20} + \frac{Z_2}{4} - \frac{Z_4}{2} + \frac{3(S_1)}{8} + \frac{(S_4)}{4}. \quad (16)$$

Stabkraft S_{21} . Man setzt:

$$4\xi - 1, \quad -4\xi + 2\zeta = 0,$$

also $\xi = -\frac{1}{4}, \quad \zeta = -\frac{1}{2}$

und erhält aus Gleichung 5) in Verbindung mit den Gleichungen 9) und 13):

$$s_{21} = \frac{S_{21}}{l_{21}} = \frac{X_1}{4} + \frac{Y_1}{10} + \frac{3X_2}{8} + \frac{3Y_2}{20} + \frac{3Z_2}{4} - \frac{X_4}{4} - \frac{Z_4}{2} + \frac{5(S_1)}{8} + \frac{3(S_4)}{4}. \quad (17)$$

Stabkraft S_{19} . Man setzt in Gleichung 6):

$$-4\xi + 2\zeta = -1 \quad \text{und} \quad 4\xi = 0,$$

also $\xi = 0 \quad \text{und} \quad \zeta = -\frac{1}{2}$

und erhält in Verbindung mit Gleichung 11):

$$s_{19} = \frac{S_{19}}{l_{19}} = -\frac{X_2}{8} - \frac{Y_2}{20} - \frac{3Z_2}{4} - \frac{Z_5}{2} - \frac{(S_1)}{8} - \frac{3(S_4)}{4}. \quad (18)$$

Stabkraft S_{23} . Man setzt in Gleichung 6):

$$4\xi = -1 \quad \text{und} \quad -4\xi + 2\zeta = 0,$$

also $\xi = -\frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \zeta = -\frac{1}{2}$

und erhält in Verbindung mit Gleichung 11):

$$s_{23} = \frac{S_{23}}{l_{23}} = -\frac{X_2}{8} - \frac{Y_2}{20} - \frac{3Z_2}{4} - \frac{X_5}{4} - \frac{Z_5}{2} - \frac{(S_1)}{8} - \frac{3(S_4)}{4}. \quad (19)$$

Stabkraft S_{19} . Man setzt in Gleichung 7):

$$4\xi - 2\zeta = -1 \quad \text{und} \quad 3\zeta = 0,$$

also $\zeta = 0 \quad \text{und} \quad \xi = -\frac{1}{4}$

und erhält:

$$s_{19} = -\frac{X_6}{4} - s_{11} - s_{16}.$$

Die Größe s_{11} ist durch Gleichung 12) bekannt. Die Größe s_{16} ergibt sich aus dem Wert von s_{15} (Gleichung 10) nach dem Gesetz der Symmetrie:

$$s_{16} = -\frac{X_{12}}{12} - \frac{Y_{12}}{30} - \frac{Z_{12}}{6} - \frac{(S_2)}{12} - \frac{(S_4)}{6}. \quad (20)$$

Demnach ist:

$$s_{19} = \frac{S_{19}}{l_{19}} = \frac{Y_2}{10} + \frac{Z_2}{2} - \frac{X_6}{4} + \frac{X_{12}}{12} + \frac{Y_{12}}{30} + \frac{Z_{12}}{6} + \frac{(S_2)}{12} + \frac{2(S_4)}{3}. \quad (21)$$

Stabkraft S_{27} : Man setzt in Gleichung 7):

$$3\zeta = -1 \quad \text{und} \quad 4\xi + 6\zeta = 0,$$

also

$$\zeta = -\frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \xi = +\frac{1}{2}$$

und erhält:

$$s_{27} = \frac{X_6}{2} - \frac{Z_6}{3} + 2s_{11} + \frac{8}{3}s_{19}.$$

Durch Einsetzen der Werte von s_{11} und s_{19} aus den Gleichungen 12) und 18) ergibt sich:

$$s_{27} = \frac{S_{27}}{l_{27}} = -\frac{X_1}{3} - \frac{Y_2}{3} - 3Z_2 - \frac{4}{3}Z_5 + \frac{X_6}{2} - \frac{Z_6}{3} - \frac{(S_1)}{3} - 3(S_4). \quad (22)$$

Die Berechnung der Stablasten (S_1) , (S_2) , (S_3) , (S_4) . In den vorstehenden Gleichungen sind die zehn Stabkräfte S_5 , S_7 , S_{15} , S_9 , S_{11} , S_{13} , S_{25} , S_{21} , S_{23} , S_{27} je *einmal*, die Stabkräfte S_{17} und S_{19} dagegen *zweimal* als Funktionen der Knotenlasten X , Y , Z und der vier Stablasten (S_1) , (S_2) , (S_3) , (S_4) dargestellt. Indem man die beiden Werte von S_{17} aus den Gleichungen 14) und 16) und die beiden Werte von S_{19} aus den Gleichungen 18) und 21) einander gleichsetzt, ergeben sich zwei Bedingungen, die von den unbekannten Stablasten zu erfüllen sind:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 70X_1 + 16Y_1 + 20Z_1 + 15X_2 + 6Y_2 + 30Z_2 + 30X_3 \\ &\quad - 60Z_4 + 85(S_1) + 20(S_3) + 30(S_4) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

und

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 15X_2 + 18Y_2 + 150Z_2 + 60Z_5 - 30X_6 + 10X_{12} + 4Y_{12} \\ &\quad + 20Z_{12} + 15(S_1) + 10(S_2) + 170(S_4). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Hierzu symmetrisch bestehen für die andere Fachwerkshälfte die beiden Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 70X_{12} + 16Y_{12} + 20Z_{12} + 15X_{11} + 6Y_{11} + 30Z_{11} + 30X_{10} \\ &\quad - 60Z_9 + 85(S_2) + 20(S_4) + 30(S_3) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 15X_{11} + 18Y_{11} + 150Z_{11} + 60Z_8 - 30X_7 + 10X_1 + 4Y_1 \\ &\quad + 20Z_1 + 15(S_2) + 10(S_1) + 170(S_3). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Um aus diesen vier Bedingungen die unbekannten Stablasten zu berechnen, summiert man die Gleichungen 23), 25) und die Gleichungen 24), 26), wodurch zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten $(S_1) + (S_2)$ und $(S_3) + (S_4)$ entstehen. Ferner bildet man zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten $(S_1) - (S_2)$ und $(S_3) - (S_4)$, indem man Gleichung 25) von Gleichung 23) und

Gleichung 26) von Gleichung 24) subtrahiert. Auf diesem Wege erhält man:

$$(S_1) = \frac{1}{10560} \left(\begin{aligned} &- 8960 X_1 - 2020 Y_1 - 2280 Z_1 - 1600 X_2 \\ &- 356 Y_2 - 360 Z_2 - 3910 X_3 + 7820 Z_4 + 1420 Z_5 \\ &- 710 X_6 - 490 X_7 + 980 Z_8 + 340 Z_9 - 170 X_{10} \\ &+ 160 X_{11} + 260 Y_{11} + 2280 Z_{11} - 160 X_{12} + 4 Y_{12} \\ &+ 360 Z_{12} \end{aligned} \right) \quad (27)$$

$$(S_2) = \frac{1}{10560} \left(\begin{aligned} &- 8960 X_{12} - 2020 Y_{12} - 2280 Z_{12} - 1600 X_{11} \\ &- 356 Y_{11} - 360 Z_{11} - 3910 X_{10} + 7820 Z_9 \\ &+ 1420 Z_8 - 710 X_7 - 490 X_6 + 980 Z_5 + 340 Z_4 \\ &- 170 X_3 + 160 X_2 + 260 Y_2 + 2280 Z_2 - 160 X_1 \\ &+ 4 Y_1 + 360 Z_1 \end{aligned} \right) \quad (28)$$

$$(S_3) = \frac{1}{10560} \left(\begin{aligned} &- 80 X_1 - 130 Y_1 - 1140 Z_1 + 80 X_2 - 2 Y_2 \\ &- 180 Z_2 + 245 X_3 - 490 Z_4 - 170 Z_5 + 85 X_6 \\ &+ 1955 X_7 - 3910 Z_8 - 710 Z_9 + 355 X_{10} - 800 X_{11} \\ &- 1102 Y_{11} - 9420 Z_{11} + 800 X_{12} + 178 Y_{12} \\ &+ 180 Z_{12} \end{aligned} \right) \quad (29)$$

$$(S_4) = \frac{1}{10560} \left(\begin{aligned} &- 80 X_{12} - 130 Y_{12} - 1140 Z_{12} + 80 X_{11} - 2 Y_{11} \\ &- 180 Z_{11} + 245 X_{10} - 490 Z_9 - 170 Z_8 + 85 X_7 \\ &+ 1955 X_6 - 3910 Z_5 - 710 Z_4 + 355 X_3 - 800 X_2 \\ &- 1102 Y_2 - 9420 Z_2 + 800 X_1 + 178 Y_1 + 180 Z_1 \end{aligned} \right) \quad (30)$$

Indem man diese Werte der Stablasten in die Gleichungen 8) bis 22) einsetzt, werden alle Stabkräfte einer Fachwerkhälfte als Funktionen der Knotenlasten dargestellt.

7. Zweites Beispiel. Berechnung der Stabkräfte einer Kuppel nach Schwedlerscher Bauart. Das in den Abb. 3 und 4 im Aufriß und im Grundriß dargestellte einfache Raumbachwerk hat *zwölf* Knoten und *sechsenddreißig* Stäbe; erstere sind mit den Ziffern I bis XII, letztere mit den Nummern 1 bis 36 bezeichnet. Die sechs Knoten VII bis XII sind durch die zwölf Stützstäbe 25 bis 36 mit den festen Punkten *A, B, C, D, E, F* der Stützmauern verbunden, also zweifach gestützt. Die sechs punktierten Stäbe, welche die festen Stützpunkte miteinander verbinden, gehören nicht zum Fachwerk und dienen nur dazu, das Stützmauerwerk zu versteifen. Jeder der zwölf Knoten trägt drei zueinander rechtwinklig gerichtete Lasten *X, Y, Z*. Die Last *Y* ist lotrecht und zeigt nach

unten, wenn sie positiv ist. Die beiden Lasten X und Z sind waagrecht; X schneidet die Vertikalachse der Kuppel, und ihr positiver Sinn zeigt nach innen. Der positive Sinn von Z zeigt — im Sinne

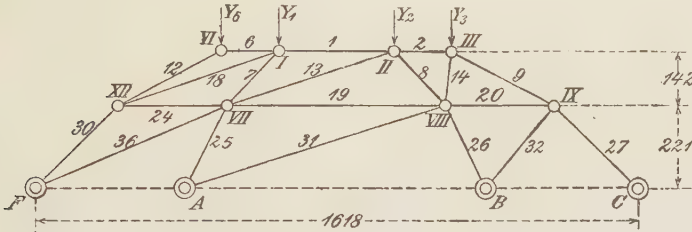


Abb. 3.

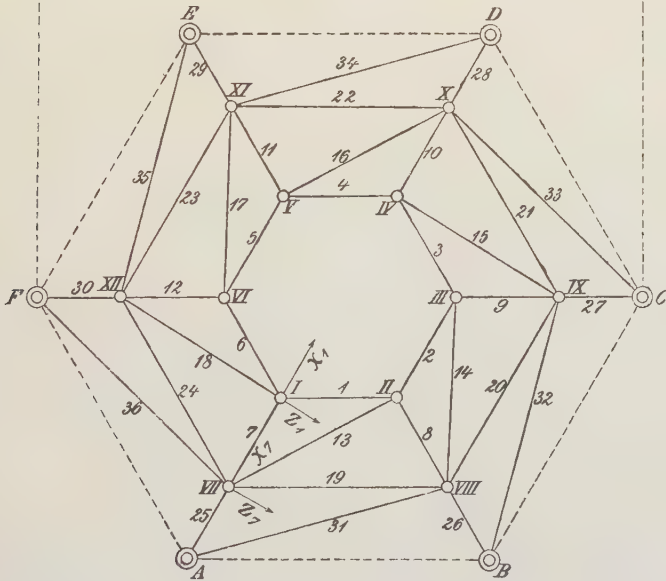


Abb. 4.

von X gesehen — nach rechts. Durch diese Zerlegung der Lasten wird erreicht, daß die sechs Gleichgewichtsgruppen der Knoten I bis VI und der Knoten VII bis XII gleiche Gestalt annehmen, so daß die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für die sechs Knoten eines Ringes der Form nach übereinstimmen.

Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung für einen Knoten des oberen Ringes, z. B. für den Knoten I. Auf den Knoten I wirken die drei Lasten X_1 , Y_1 , Z_1 und die vier Stabkräfte S_1 , S_6 , S_7 , S_{18} . Wenn, wie im vorliegenden Falle, die Projektionen der Stablängen auf die Richtungen der Lasten X , Y , Z nicht ohne weiteres aus der Zeichnung abzulesen sind, so empfiehlt es sich, statt jener

Projektionen die Kosinusse der Winkel zu bestimmen, welche von den Stabkräften mit den Lastrichtungen gebildet werden. Die folgende Tabelle enthält diese Kosinuswerte:

	S_1	S_6	S_7	S_{18}
X_1	+ 0,50	+ 0,50	— 0,89	+ 0,03
Y_1	0	0	+ 0,45	+ 0,27
Z_1	+ 0,87	— 0,87	0	— 0,96

In betreff der *Vorzeichen* der Kosinuswerte ist daran zu erinnern, daß den unbekannten Stabkräften der positive Sinn von *Zugkräften* beizulegen ist. Wir erteilen dem Knoten I gleichzeitig drei Geschwindigkeiten von der Richtung und dem Sinne der Lasten X , Y , Z , die in dieser Reihenfolge die Größen

$$100 \xi, 100, 100 \zeta$$

haben, und setzen nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten die Summe der Arbeitsgeschwindigkeiten der sieben Kräfte gleich null. Hierdurch entsteht die allgemeine Gleichgewichtsbedingung des Knotens I:

$$0 = 100 \xi X_1 + 100 Y_1 + 100 \zeta Z_1 + S_1 (50 \xi + 87 \zeta) + S_6 (50 \xi - 87 \zeta) + S_7 (-89 \xi + 45) + S_{18} (3 \xi + 27 - 96 \zeta). \quad (31)$$

Von gleicher Form sind die Bedingungen für die anderen fünf Knoten II, III, IV, V, VI des oberen Ringes; es ändern sich nur die Kennziffern der Kräfte. Für den Knoten II z. B. ergibt sich in dieser Weise die allgemeine Gleichgewichtsbedingung:

$$0 = 100 \xi X_2 + 100 Y_2 + 100 \zeta Z_2 + S_2 (50 \xi + 87 \zeta) + S_1 (50 \xi - 87 \zeta) + S_8 (-89 \xi + 45) + S_{13} (3 \xi + 27 - 96 \zeta).$$

Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung für einen Knoten des mittleren Ringes, z. B. für den Knoten VII. Auf den Knoten VII wirken die drei Lasten X_7 , Y_7 , Z_7 und die sechs Stabkräfte S_7 , S_{13} , S_{19} , S_{24} , S_{25} , S_{36} . Die Kosinusse der von den Richtungen der Stabkräfte mit den Richtungen der Lasten gebildeten Winkel sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	S_7	S_{13}	S_{19}	S_{24}	S_{25}	S_{36}
X_7	+ 0,89	+ 0,82	+ 0,50	+ 0,50	— 0,71	+ 0,24
Y_7	— 0,45	— 0,27	0	0	+ 0,71	+ 0,29
Z_7	0	0,51	+ 0,87	— 0,87	0	— 0,93

Werden die Geschwindigkeiten wie im vorhergehenden Falle gewählt, so lautet die allgemeine Gleichgewichtsbedingung des Knotens VII:

$$0 = 100\xi X_7 + 100Y_7 + 100\zeta Z_7 + S_7(89\xi - 45) + S_{13}(82\xi - 27 + 51\zeta) \left. \begin{aligned} &+ S_{19}(50\xi + 87\zeta) + S_{24}(50\xi - 87\zeta) \\ &+ S_{25}(-71\xi + 71) + S_{36}(24\xi + 29 - 93\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Von derselben Form sind die Bedingungen für die übrigen fünf Knoten VIII, IX, X, XI, XII des Mittelringes. Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung z. B. für den Knoten VIII entsteht aus der Gleichung 32), indem man die Kennziffern

	7	13	19	24	25	36
mit	8	14	20	19	26	31
vertauscht.						

Die Auflösung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen. In dem vorliegenden Beispiel ist es nicht nötig, *Laststäbe* einzuführen, weil man die besonderen Gleichgewichtsbedingungen so ordnen kann, daß in jeder nur *eine* unbekannte Stabkraft vorkommt. Es hat dies seinen Grund darin, daß von den vier Stabkräften S_1 , S_6 , S_7 , S_{18} , die an einem Knoten I des oberen Ringes angreifen, *drei*, nämlich S_6 , S_7 , S_{18} in *einer* Ebene liegen. Wählt man die Richtung der Geschwindigkeit des Knotens I rechtwinklig zu dieser Ebene, so verschwinden die Arbeitsgeschwindigkeiten jener drei Kräfte und die Gleichgewichtsbedingung enthält dann nur die unbekannte Kraft S_1 . Darauf lassen sich Bedingungen bilden, die ebenfalls nur *eine* unbekannte Stabkraft enthalten, und zwar in der Reihenfolge S_6 , S_7 , S_{18} , S_{13} , S_{19} , S_{24} , S_{25} , S_{36} . Alle übrigen Stabkräfte ergeben sich dann nach den Regeln der Symmetrie. Die Rechnung nimmt demnach folgende Form an.

In Gleichung 31) können aus dem angegebenen Grunde gleichzeitig die *drei* Bedingungen:

$$50\xi - 87\zeta = 0, \quad -89\xi + 45 = 0, \quad 3\xi + 27 - 96\zeta = 0$$

erfüllt werden. Sie bestimmen die Komponenten der zur Ebene 6, 7, 18 rechtwinklig gerichteten Geschwindigkeit:

$$100\xi = +51, \quad 100\zeta = +30$$

und durch Gleichung 31) die Stabkraft

$$S_1 = -X_1 - 1,98Y_1 - 0,57Z_1. \quad (33)$$

Nach den Regeln der Symmetrie folgt hieraus

$$S_6 = -X_6 - 1,98Y_6 - 0,57Z_6. \quad (34)$$

Um ferner S_{18} zu bestimmen, setzt man in Gleichung 31)

$$50\xi + 87\zeta = 0, \quad -89\xi + 45 = 0$$

und erhält

$$\xi = +0,51, \quad \zeta = -0,30,$$

folglich

$$S_{18} = 0,89(X_6 - X_1) + 1,76(Y_6 - Y_1) + 0,51(Z_6 + Z_1). \quad (35)$$

In derselben Weise ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung für den Knoten II:

$$S_{13} = 0,89(X_1 - X_2) + 1,76(Y_1 - Y_2) + 0,51(Z_1 + Z_2). \quad (36)$$

Man bestimmt endlich die letzte Kraft S_7 am Knoten I, indem man in Gleichung 31) einsetzt:

$$50\xi + 87\zeta = 0 \quad \text{und} \quad 50\xi - 87\zeta = 0$$

oder

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \zeta = 0.$$

Daraus folgt:

$$S_7 = 0,53(X_1 - X_6) - 1,16Y_1 - 1,06Y_6 - 0,31(Z_1 + Z_6). \quad (37)$$

Aus Gleichung 32) kann zunächst die Stabkraft S_{19} berechnet werden, weil S_7 und S_{13} aus den Gleichungen 37) und 36) bekannt sind, und alle anderen Stabkräfte S_{24} , S_{25} , S_{36} in einer Ebene liegen. Infolgedessen können gleichzeitig die drei Bedingungen erfüllt werden:

$$50\xi - 87\zeta = 0, \quad -71\xi + 71 = 0, \quad 24\xi + 29 - 93\zeta = 0.$$

Diese Bedingungen ergeben:

$$\xi = 1, \quad \zeta = 0,57$$

und in Verbindung mit den Gleichungen 32), 36) und 37):

$$\left. \begin{aligned} S_{19} = & -0,98X_1 - 0,97Y_1 - 0,29Z_1 + 0,75X_2 + 1,48Y_2 - 0,43Z_2 \\ & + 0,23X_6 + 0,47Y_6 + 0,14Z_6 - X_7 - Y_7 - 0,57Z_7. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Hierzu symmetrisch ist:

$$\left. \begin{aligned} S_{24} = & -0,98X_6 - 0,97Y_6 - 0,29Z_6 + 0,75X_1 + 1,48Y_1 - 0,43Z_1 \\ & + 0,23X_5 + 0,47Y_5 + 0,14Z_5 - X_{12} - Y_{12} - 0,57Z_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Die Berechnung der beiden letzten Stabkräfte S_{25} und S_{36} am Knoten VII bedarf hiernach keiner weiteren Erläuterung.

8. Die Auflösung der Gleichgewichtsbedingungen bei unregelmäßiger Form des Fachwerks. In den vorstehenden Beispielen nimmt die Auflösung der Gleichgewichtsbedingungen eine sehr einfache Form an, weil infolge der regelmäßigen Gestalt des Fachwerks einige Glieder jener Gleichungen verschwinden. Wenn dies *nicht* der Fall ist, so hat die allgemeine Gleichgewichtsbedingung eines Knotens die vollständige Form:

$$0 = A + s_1(x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta) + s_2(x_2\xi + y_2\eta + z_2\zeta) + s_3(x_3\xi + y_3\eta + z_3\zeta) \quad (40)$$

A bezeichnet die Summe der bekannten Glieder der Gleichung; die Bedeutung der übrigen Zeichen wurde im Abschnitt 6 erklärt. Zur Berechnung der drei Unbekannten s_1 , s_2 und s_3 setzt man im *ersten* Falle:

$$x_2 \xi + y_2 \eta + z_2 \zeta = 0 \quad \text{und} \quad x_3 \xi + y_3 \eta + z_3 \zeta = 0,$$

im *zweiten* Falle:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta = 0 \quad \text{und} \quad x_3 \xi + y_3 \eta + z_3 \zeta = 0$$

und im *dritten* Falle:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta = 0 \quad \text{und} \quad x_2 \xi + y_2 \eta + z_2 \zeta = 0.$$

Die in Gleichung 40) einzusetzenden Werte von ξ , η und ζ sind demnach im *ersten* Falle:

$$\xi = y_2 z_3 - z_2 y_3, \quad \eta = z_2 x_3 - x_2 z_3, \quad \zeta = x_2 y_3 - y_2 x_3, \quad (41)$$

ferner im *zweiten* Falle:

$$\xi = y_1 z_3 - z_1 y_3, \quad \eta = z_1 x_3 - x_1 z_3, \quad \zeta = x_1 y_3 - y_1 x_3 \quad (42)$$

und endlich im *dritten* Falle:

$$\xi = y_1 z_2 - z_1 y_2, \quad \eta = z_1 x_2 - x_1 z_2, \quad \zeta = x_1 y_2 - y_1 x_2. \quad (43)$$

Selbstverständlich sind diese Formeln auch gültig in den einfacheren Fällen, die in den obigen Beispielen vorlagen. Die Auflösung der Gleichgewichtsbedingungen ist hierdurch zurückgeführt auf das Einsetzen der gegebenen Strecken x , y , z in die vier Gleichungen 40) bis 43).

9. Die Bestimmung der Stabkräfte auf kinematischem Wege. Das im folgenden zu beschreibende Verfahren möge an dem ersten Beispiel, der Zimmermannschen Kuppel (Abb. 1 und 2), erklärt werden. Man schneide aus dem Laststabe 1 ein Stück heraus und ersetze dasselbe durch die beiden Stablasten (S_1) von unbekannter Größe im Sinne von Zugkräften. Hierdurch wird das Fachwerk in ein *zwangsläufiges Getriebe* verwandelt, auf das außer den Lasten X , Y , Z eines jeden Knotens nur noch die zwei Stablasten (S_1) einwirken. Wir erinnern daran, daß die positive Last Y lotrecht ist, während die wagerechten Lasten X und Z parallel zur Längsachse und zur Querachse der Kuppel gerichtet sind und nach innen zeigen, wenn sie das positive Vorzeichen tragen. Wir erteilen dem Getriebe eine unendlich kleine Bewegung und bezeichnen z. B. für den Knoten II mit ξ_2 , η_2 , ζ_2 seine Geschwindigkeitskomponenten in den Richtungen und dem positiven Sinne seiner Lasten X_2 , Y_2 , Z_2 . Ferner sei σ_1 die Dehnungsgeschwindigkeit der Stabstrecke I II des durchschnittenen Stabes. Die Dehnungsgeschwindigkeiten aller anderen Stabstrecken

sind gleich null. Die Arbeitsgeschwindigkeit der sämtlichen Knotenlasten wird durch die Summe $\Sigma (\xi X + \eta Y + \zeta Z)$ angegeben, während die Arbeitsgeschwindigkeit der beiden Stablasten die algebraische Größe $-\sigma_1 (S_1)$ hat. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ist die algebraische Summe dieser Arbeitsgeschwindigkeiten gleich null und folglich

$$(S_1) = \frac{\Sigma (\xi X + \eta Y + \zeta Z)}{\sigma_1}. \quad (44)$$

Zur Bestimmung der Geschwindigkeiten $\xi, \eta, \zeta, \sigma_1$ ist das *graphische* Verfahren *nicht* geeignet, weil es wenig übersichtlich und nicht genau genug ist. Daher verdient auch hier die *Rechnung* den Vorzug. Man vergleiche die Abschnitte 4 und 6 der Abhandlung XII. Die vorliegende Aufgabe enthält $(3k-1)$ unbekannte Größen, nämlich für jeden der k Knoten die drei Geschwindigkeiten ξ, η, ζ mit Ausnahme von *einer*, die nach Belieben gewählt werden kann. Wir zählen die Dehnungsgeschwindigkeit σ_1 nicht zu den Unbekannten, weil sie unmittelbar durch die Geschwindigkeiten der Knoten I und II bestimmt wird:

$$\sigma_1 = -\xi_1 - \xi_2. \quad (45)$$

Zur Berechnung der $(3k-1)$ Unbekannten läßt sich eine ebenso große Anzahl von linearen Gleichungen bilden, indem man für jeden der $(3k-1)$ starren Stäbe, die das Fachwerk außer dem durchschnittenen Stabe enthält, die *Schubgeschwindigkeit* zweimal aus den Geschwindigkeiten der beiden Endpunkte des Stabes bestimmt. Die Schubgeschwindigkeit eines starren Stabes bildet die Projektion der Geschwindigkeit irgend eines Punktes des Stabes oder die Projektionssumme seiner Geschwindigkeitskomponenten auf die Stabrichtung. Wir wählen als Beispiel den Stab 15, dessen Länge l_{15} durch die beiden Knoten I und VII begrenzt wird, und bestimmen seine Schubgeschwindigkeit *im Sinne der Strecke VII I*. Da die Strecke VII I in bezug auf die Richtungen der Geschwindigkeiten ξ_7, η_7, ζ_7 die Projektionen $+4^m, -10^m, +6^m$ hat, so ist die Projektionssumme der Geschwindigkeiten ξ_7, η_7, ζ_7 in bezug auf die Richtung und den Sinn der Strecke VII I gleich

$$\frac{1}{l_{15}} (4\xi_7 - 10\eta_7 + 6\zeta_7).$$

Ferner hat die Strecke VII I in bezug auf die Richtungen der Geschwindigkeiten ξ_1, η_1, ζ_1 des Knotens I die Projektionen $+4^m, -10^m,$

—6^m, und daher ist die Schubgeschwindigkeit des Stabes 15 im Sinne der Strecke VII I auch gleich

$$\frac{1}{l_{1,0}} (4 \xi_1 - 10 \eta_1 - 6 \zeta_1).$$

Zwischen den Geschwindigkeiten der Knoten VII und I, die durch den starren Stab 15 miteinander verbunden sind, besteht demnach die Bedingung:

$$4 \xi_7 - 10 \eta_7 + 6 \zeta_7 = 4 \xi_1 - 10 \eta_1 - 6 \zeta_1.$$

Eine Bedingung von dieser Art ergibt sich für jeden der 35 starren Stäbe des Getriebes.

Die Schubgeschwindigkeit eines jeden der mit den Nummern 21 bis 36 bezeichneten *Stützstäbe* ist gleich null, weil *ein* Endpunkt eines jeden Stützstabes *ruht*. Daher sind die 16 Geschwindigkeiten $\eta_3, \xi_3, \eta_4, \xi_4, \eta_5, \xi_5, \eta_6, \xi_6, \eta_7, \xi_7, \eta_8, \xi_8, \eta_9, \xi_9, \eta_{10}, \xi_{10}$ gleich null, und die acht zweifach gestützten Knoten III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X haben in dieser Reihenfolge nur die Geschwindigkeiten $\xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8, \xi_9$ und ξ_{10} . Für diese acht Größen ergeben sich durch die Schubgeschwindigkeiten der Stäbe 17, 19, 20, 18 die vier Bedingungen

$$4 \xi_3 = -2 \xi_4, \quad 4 \xi_6 = -2 \xi_5, \quad 4 \xi_7 = -2 \xi_8, \quad 4 \xi_{10} = -2 \xi_9$$

oder

$$\xi_4 = -2 \xi_3, \quad (46)$$

$$\xi_5 = -2 \xi_6, \quad (47)$$

$$\xi_8 = -2 \xi_7, \quad (48)$$

$$\xi_9 = -2 \xi_{10}. \quad (49)$$

Vermittels der vier Größen $\xi_3, \xi_6, \xi_7, \xi_{10}$ können ferner die Geschwindigkeiten der übrigen Knoten I, II, III, IV ausgedrückt werden, da für jeden dieser vier Knoten die Schubgeschwindigkeiten von *drei* anschließenden Stäben durch jene vier Größen bestimmt werden. Wir bestimmen zunächst die Geschwindigkeiten des Knotens I aus den Schubgeschwindigkeiten der Stäbe 5, 7 und 15:

$$4 \xi_1 - 10 \eta_1 = 4 \xi_3,$$

$$2 \xi_1 - 10 \eta_1 = 2 \xi_4 = -4 \xi_3,$$

$$4 \xi_1 - 10 \eta_1 - 6 \zeta_1 = 4 \xi_7.$$

Diese Bedingungen ergeben:

$$\xi_1 = \frac{1}{3} (7 \xi_3 - \xi_7) \quad (50)$$

$$\eta_1 = \frac{2}{15} (4 \xi_3 - \xi_7) \quad (51)$$

$$\zeta_1 = \frac{2}{3} (\xi_3 - \xi_7). \quad (52)$$

In gleicher Weise lassen sich die Geschwindigkeiten des Knotens XII aus den Schubgeschwindigkeiten der Stäbe 6, 8 und 16 bestimmen; einfacher ergeben sie sich nach den Regeln der Symmetrie aus den Gleichungen 50) bis 52):

$$\xi_{12} = \frac{1}{3} (7 \xi_{10} - \xi_6) \quad (53)$$

$$\eta_{12} = \frac{2}{15} (4 \xi_{10} - \xi_6) \quad (54)$$

$$\zeta_{12} = \frac{2}{3} (\xi_{10} - \xi_6). \quad (55)$$

Wir bestimmen ferner die Geschwindigkeiten des Knotens II aus den Schubgeschwindigkeiten der Stäbe 9, 11 und 13:

$$\begin{aligned} -10 \eta_2 + 2 \zeta_2 &= 2 \zeta_5 = -4 \xi_6, \\ 4 \xi_2 - 10 \eta_2 &= 4 \xi_6, \\ -8 \xi_2 - 10 \eta_2 + 2 \zeta_2 &= 2 \zeta_4 = -4 \xi_3, \end{aligned}$$

also:

$$\xi_2 = \frac{1}{2} (\xi_3 - \xi_6), \quad (56)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{5} (\xi_3 - 3 \xi_6), \quad (57)$$

$$\zeta_2 = \xi_3 - 5 \xi_6, \quad (58)$$

und folgern aus der Symmetrie:

$$\xi_{11} = \frac{1}{2} (\xi_{10} - \xi_7), \quad (59)$$

$$\eta_{11} = \frac{1}{5} (\xi_{10} - 3 \xi_7), \quad (60)$$

$$\zeta_{11} = \xi_{10} - 5 \xi_7. \quad (61)$$

Endlich liefern die Schubgeschwindigkeiten der Stäbe 2, 3 und 4 die Bedingungen:

$$\xi_{11} = -\xi_{12}, \quad (62)$$

$$\zeta_1 = -\zeta_{11}, \quad (63)$$

$$\zeta_2 = -\zeta_{12} \quad (64)$$

oder nach den Gleichungen 59), 53), 52), 61), 58) und 55):

$$0 = 2 \xi_6 + 3 \xi_7 - 17 \xi_{10}, \quad (65)$$

$$0 = 2 \xi_3 - 17 \xi_7 + 3 \xi_{10}, \quad (66)$$

$$0 = 3 \xi_3 - 17 \xi_6 + 2 \xi_{10}. \quad (67)$$

Wir wählen jetzt *eine* der Geschwindigkeiten nach Belieben, z. B.

$$\xi_{10} = -170,$$

und zwar so, daß auch die übrigen Geschwindigkeiten durch ganze

Zahlen ausgedrückt werden können. Die letzten drei Gleichungen ergeben dann:

$$\xi_3 = -3910, \quad \xi_6 = -710, \quad \xi_7 = -490.$$

Indem man diese Werte in die Gleichungen 46) bis 61) einsetzt, erhält man die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Größen der Geschwindigkeiten.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
ξ	-8960	-1600	-3910	0	0	-710	-490	0	0	-170	+ 160	-160
η	-2020	-356	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 260	+ 4
ζ	-2280	-360	0	+7820	+1420	0	0	+980	+340	0	+2280	+360

Um die Stablast (S_1) zu bestimmen, sind die vorstehenden Werte, sowie nach Gleichung 45) der Wert der Dehnungsgeschwindigkeit

$$\sigma_1 = -\xi_1 - \xi_2 = +8960 + 1600 = +10560$$

in Gleichung 44) einzusetzen. Es ergibt sich hierdurch die auf einem anderen Wege abgeleitete Gleichung 27):

$$(S_1) = \frac{1}{10560} \left(\begin{array}{l} -8960 X_1 - 2020 Y_1 - 2280 Z_1 - 1600 X_2 \\ -356 Y_2 - 360 Z_2 - 3910 X_3 + 7820 Z_4 + 1420 Z_5 \\ -710 X_6 - 490 X_7 + 980 Z_8 + 340 Z_9 - 170 X_{10} \\ + 160 X_{11} + 260 Y_{11} + 2280 Z_{11} - 160 X_{12} \\ + 4 Y_{12} + 360 Z_{12} \end{array} \right) \quad (68)$$

Das im Vorstehenden für den Stab 1 beschriebene Verfahren ist für den Stab 3 zu wiederholen. Hierbei bleiben die Gleichungen 46) bis 64) unverändert, mit Ausnahme der Gleichung 63), welche fortfällt, weil der Stab 3 zu durchschneiden ist. Diese Gleichung ist zu ersetzen durch die Bedingung für den starren Stab 1:

$$\xi_1 = -\xi_2. \quad (69)$$

Aus den Gleichungen 62), 64), 69) in Verbindung mit den Gleichungen 59), 53), 58), 55), 50) und 56) folgen die beiden Gleichungen 65) und 67):

$$\begin{aligned} 0 &= 2\xi_6 + 3\xi_7 - 17\xi_{10} \\ 0 &= 3\xi_3 - 17\xi_6 + 2\xi_{10} \end{aligned}$$

und die neue Bedingung

$$0 = -17\xi_3 + 3\xi_6 + 2\xi_7. \quad (70)$$

Wir wählen wieder *eine* dieser Geschwindigkeiten willkürlich, z. B.

$$\xi_6 = +85$$

und erhalten aus den letzten drei Gleichungen:

$$\xi_3 = +245, \quad \xi_7 = +1955, \quad \xi_{10} = +355.$$

Durch Einsetzen dieser vier Werte in die Gleichungen 46) bis 61) ergeben sich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Geschwindigkeiten:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
ξ	- 80	+ 80	+ 245	0	0	+ 85	+ 1955	0	0	+ 355	- 800	+ 800
η	- 130	- 2	0	0	0	0	0	0	0	0	- 1102	+ 178
ζ	- 1140	- 180	0	- 490	- 170	0	0	- 3910	- 710	0	- 9420	+ 180

In der Gleichung

$$(S_3) = \frac{\Sigma (\xi X + \eta Y + \zeta Z)}{\sigma_3} \quad (71)$$

bezeichnen ξ , η , ζ die in der vorstehenden Tabelle verzeichneten Geschwindigkeiten und σ_3 die Dehnungsgeschwindigkeit der Stabstrecke I XI des durchschnittenen Stabes 3, welche durch die Geschwindigkeiten der Knoten I und XI bestimmt wird:

$$\sigma_3 = -\zeta_I - \zeta_{11} = +1140 + 9420 = +10560. \quad (72)$$

Demnach ist wie in Gleichung 29):

$$(S_3) = \frac{1}{10560} \left(\begin{aligned} &- 80 X_1 - 130 Y_1 - 1140 Z_1 + 80 X_2 - 2 Y_2 \\ &- 180 Z_2 + 245 X_3 - 490 Z_4 - 170 Z_5 + 85 X_6 \\ &+ 1955 X_7 - 3910 Z_8 - 710 Z_9 + 355 X_{10} \\ &- 800 X_{11} - 1102 Y_{11} - 9420 Z_{11} + 800 X_{12} \\ &+ 178 Y_{12} + 180 Z_{12} \end{aligned} \right) \quad (73)$$

Die Ausdrücke für die Stablasten (S_2) und (S_4) können, wie im Abschnitt 6 beschrieben wurde, aus den Gleichungen 68) und 73) nach den Regeln der Symmetrie gebildet werden.

Das im Vorstehenden beschriebene Verfahren kann in gleicher Weise auch für die Berechnung der übrigen Stabkräfte benutzt werden. Es ist jedoch in jedem Falle zu überlegen, ob dieser Weg einfacher ist, als die im Abschnitt 6 beschriebene Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen für die Knoten des Fachwerks.

10. Die Berechnung der Formänderung eines einfachen Raumfachwerks. Wir nehmen an, daß die festen Punkte

der Stützstäbe ihre Lage *nicht* verändern und daß die Längenänderungen $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$ aller Stablängen $l_1, l_2, l_3 \dots$ gegeben sind. Durch die Längenänderungen der Stützstäbe kann eine gegebene Lagenänderung der gestützten Knoten in Rechnung gestellt werden. Die Aufgabe besteht also darin, die Verschiebungen ξ, η, ζ eines jeden Knotens *in der Richtung und dem Sinne der Achsen x, y, z eines festen Koordinatensystems* zu berechnen. Wenn die Dauer der Bewegung als Zeiteinheit gewählt wird, so können ξ, η, ζ auch als die *Geschwindigkeiten* der Knoten bezeichnet werden; denn letztere unterscheiden sich von den Verschiebungen nur durch die Maßeinheit. Wir erklären auch diese Rechnung an dem in Abb. 1 und 2 dargestellten Beispiel. Der x -Achse geben wir Richtung und Sinn der Stabstrecke III, der z -Achse Richtung und Sinn der Stabstrecke XII; die y -Achse ist lotrecht und zeigt nach oben.

Die Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten der beiden Endpunkte eines dehnbaren Stabes. Einem jeden Stabe, z. B. dem Stabe 16, geben wir den Sinn von dem Knoten mit der *niedrigeren* Nummer VI nach dem Knoten mit der *höheren* Nummer XII und bezeichnen also VI als den *Anfangspunkt* und XII als den *Endpunkt* der Stabstrecke VI XII, die *vor* der Bewegung die Länge l_{16} und *nach* der Bewegung die Länge $l_{16} + \delta_{16}$ hat. Bezeichnen $x_{16} = -4$ m, $y_{16} = +10$ m, $z_{16} = -6$ m die Projektionen der Stabstrecke VI XII auf die Koordinatenachsen *vor* der Bewegung, so hat die Schubgeschwindigkeit des dehnbaren Stabes 16 im *Anfangspunkte* VI die Größe

$$\frac{1}{l_{16}} (x_{16} \xi_6 + y_{16} \eta_6 + z_{16} \zeta_6) = \frac{1}{l_{16}} (-4\xi_6 + 10\eta_6 - 6\zeta_6) \quad (74)$$

und im *Endpunkte* XII

$$\frac{1}{l_{16}} (x_{16} \xi_{12} + y_{16} \eta_{12} + z_{16} \zeta_{12}) = \frac{1}{l_{16}} (-4\xi_{12} + 10\eta_{12} - 6\zeta_{12}). \quad (75)$$

Die Schubgeschwindigkeit des *Endpunktes* setzt sich algebraisch zusammen aus der Schubgeschwindigkeit des *Anfangspunktes* und der Dehnungsgeschwindigkeit δ_{16} der Stabstrecke. Zwischen den Geschwindigkeiten der beiden Knoten VI und XII, die durch den Stab 16 verbunden sind, besteht daher die Bedingung:

$$x_{16} \xi_{12} + y_{16} \eta_{12} + z_{16} \zeta_{12} = x_{16} \xi_6 + y_{16} \eta_6 + z_{16} \zeta_6 + l_{16} \delta_{16}. \quad (76)$$

Indem für jeden der $3k$ Stäbe des Fachwerks diese Bedingung gebildet wird, entstehen $3k$ Gleichungen zur Bestimmung der $3k$ Geschwindigkeiten oder Verschiebungen der k Knoten.

Die Auflösung der Gleichungen. Der Rechnungsgang bei Auflösung dieser Gleichungen ist ganz ähnlich dem im Abschnitt 6 beschriebenen Rechnungsgange zur Bestimmung der Stabkräfte; daher werden die folgenden Angaben genügen. Man zerlegt die Geschwindigkeiten in *zwei* Gruppen und wählt die k_1 Geschwindigkeiten der *ersten* Gruppe in möglichst geringer Anzahl so aus, daß bei geeigneter Reihenfolge die Geschwindigkeiten eines jeden Knotens durch je *drei* Bedingungen als Funktionen der Geschwindigkeiten der ersten Gruppe dargestellt werden können. Hierzu sind $(3k - k_1)$ Gleichungen erforderlich. Es bleiben also k_1 Gleichungen übrig zur Bestimmung der k_1 Geschwindigkeiten der *ersten* Gruppe. Eine einfache Ueberlegung läßt erkennen, daß im vorliegenden Beispiel nur *zwei* Geschwindigkeiten, z. B. ξ_3 und ξ_6 in die *erste* Gruppe zu stellen sind. Mit Benutzung dieser beiden Größen bestimmt man:

Die Geschwindigkeiten des Knotens	durch die Bedingungen für die Stäbe
III	25, 29
VI	27, 35
IV	17, 21, 31
V	19, 23, 33
II	9, 11, 13
I	1, 5, 7
VII	15, 28, 36
VIII	20, 24, 34
XI	3, 10, 12
XII	2, 4, 16
IX	8, 22, 32
X	6, 26, 30.

Die Bedingungen für die beiden Stäbe 14 und 18 bleiben übrig, um die beiden Geschwindigkeiten der ersten Gruppe ξ_3 und ξ_6 zu bestimmen, deren Werte darauf in die anderen Gleichungen einzusetzen sind.

II. Literarische Notizen. Der Inhalt der vorstehenden Abhandlung wurde entnommen den *Beiträgen zur Theorie des Raumfachwerks*, Zentralblatt der Bauverwaltung 1902, S. 205 und 634.

Mit der Berechnung einfacher Raumfachwerke beschäftigten sich:

Schwedler, Zeitschrift für Bauwesen 1866.

Henneberg, *Die Statik starrer Systeme*, Darmstadt 1886.

Hacker, Zeitschrift für Bauwesen 1888; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1888 und 1890.

Föppl, Schweizerische Bauzeitung 1888 und 1891; Zivilingenieur 1891; *Das Fachwerk im Raume*, Leipzig 1892; *Graphische Statik*, Leipzig 1900; Zentralblatt der Bauverwaltung 1901.

W. Ritter, *Das Fachwerk*, Zürich 1890.

Dietz, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1893.

Landsberg, Zentralblatt der Bauverwaltung 1898 und 1903.

Zimmermann, *Ueber Raumbachwerke*, Berlin 1901.

Mehrtens, *Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen*, Bd. I, Leipzig 1903.

Weitere Angaben finden sich bei *Henneberg*, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, IV, 5: *Die graphische Statik der starren Körper*.

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.
